Rad. 57

599 b - 1

Vega

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36638851360014

Bayer. Staatsbibliothek

Georg Freyherrn von Vega,

Landes-Mitstands des Herzogthums Krain, Ritters des milit. M. Th. Ordens, Oberst-Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie-Regiments, Mitgliedes der gelehrten Gesellschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

# Vorlesungen

über die

# Rechenkunst

und

# Algebra.

---

Fünfte, verbesserte Auflage.

Wien.

In der Beck'schen Universitäts-Buchhandlung.

1829.

Georg Freyherrn von Vega,

Landes = Mitstands des Herzogthums Krain, Ritters des milit. M. Th. Ordens, Oberst = Lieutenants des k. k. vierten Feldartillerie = Regiments, Mitgliedes der gelehrten Gesellschaften zu Berlin, Erfurt, Göttingen und Prag,

# Vorlesungen

über die

# Mathematik

sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artillerie = Corps.

---

Erster Band

die

## Rechenkunst und Algebra

enthaltend.

---

Fünfte, verbesserte Auflage.

---

Wien.

In der Beck'schen Universitäts = Buchhandlung.

1829.

BIBLIOTHECA
REGIA.
MONACENSIS.

# Vorbericht

## zur ersten Auflage.

An

das sämmtliche k. k. Artillerie-Corps.

Gegenwärtige Vorlesungen sind Ihnen gewidmet, und Ihr Urtheil soll ihren Werth bestimmen. Ich habe sie zum Drucke befördert, weil sie schon von einigen aus Ihnen, denen ich sie vorläufig mitgetheilet habe, des Druckes würdig gefunden worden sind. Dieser Theil enthält nur die nothwendigsten Gründe der allgemeinen Rechenkunst; jene der gemeinen und höheren Meßkunst nebst einer Anwendung sollen darauf folgen. Meine Absicht ist, denjenigen einen sichern Leitfaden in die Hände zu geben, welche in einer schicklichen von den übrigen Dienstgeschäften freyen Zeit die unentbehrlichsten Kenntnisse der höheren und angewandten Mathematik sich zu erwerben wünschen. Könnte ich wohl diesen Wunsch bey Ihnen vermissen, da es Ihnen bekannt ist, daß man sich kaum erkühnen darf, ohne diese Kenntnisse ein Artillerie-Buch zu öffnen?

Bezout, Papacino d'Antoni, Tempelhoff, Caravelli haben schon lange der Artillerie

diesen Weg gebahnet. Sie kennen den Werth dieser Schriften; und eben dieses flammte mich an, ihren Fußstapfen zu folgen, ohne doch ihnen sclavisch nachzuahmen.

Neue Sätze liefere ich Ihnen nicht; so ein Werk läßt keine andere Neuheit zu, als diejenige, die aus der Verschiedenheit des Zusammenhanges, der Entwicklung und Anwendung einiger Sätze entspringt.

Ihren Einsichten und Kenntnissen überlasse ich es, über gegenwärtige Vorlesungen ein Urtheil zu fällen. Sollten sie Ihren Beyfall erhalten, so ist meine Mühe belohnt, und mein Eifer zur Fortsetzung dieses Werkes verdoppelt.

Wien im Februar 1782.

Der Verfasser.

# Vorbericht
## zur zweyten Auflage.

Die Absicht, zu welcher diese Vorlesungen bestimmt sind, ist im Vorberichte zur ersten Auflage bemerket. Der Erfolg hat es gezeiget, daß der abgehaltene Unterricht in den unentbehrlichsten mathematischen Kenntnissen nach diesem Leitfaden in unseren Artillerie-Schulen dem abgezielten Endzwecke vollkommen entsprach; dergestalt nähmlich, daß die nach diesem Leitfaden ausgebildeten Schüler in den Stand gesetzet wurden, alle vorgetragenen Gründe vollständig zu begreifen, davon den gehörigen Gebrauch zu machen, und die Schriften anderer Verfasser, wenn solche zur Entwicklung der Wahrheiten auch andere weit schärfere Wege befolgen, ohne allen Anstand verstehen; ja daß sogar mehrere dadurch die Geschicklichkeit erlangten, beym Privatunterrichte anderen die mathematischen Kenntnisse sowohl nach diesem, als auch nach jedem anderen, nach Belieben gewählten Leitfaden, beyzubringen; obschon Viele unter den Schülern so beschaffen waren, daß sie in ihren Jünglingsjahren vor dem Eintritte in Militär-Dienste keine Gelegenheit hatten, durch die gewöhnlichen

Erziehungswissenschaften ausgebildet zu werden. Bey solchen hat sich hauptsächlich gezeiget, wie ungemein vortheilhaft ein gutes und auf eine leicht begreifliche Art betriebenes Studium der Mathematik die fernere Selbstbildung in jeder Rücksicht beförderte.

Auch wurden diese Vorlesungen an sehr vielen Orten im Civil- und Militär-Stande beym Privatunterrichte in der Mathematik mit entschiedenem Nutzen zum Leitfaden gewählet, wodurch eben die beträchtliche erste Auflage von 1500 Exemplaren bereits abgesetzet ist. Nur äußerten sich zuweilen einige Schwierigkeiten, hauptsächlich wenn der angestellte Privatlehrer nicht vorher in der arithmetischen Analysis gehörig ausgebildet war, wie es öfters bey Privatlehrern der Mathematik in unseren Gegenden zu geschehen pflegt.

Bey dieser neuen Auflage war daher meine vorzüglichste Bemühung, auch beym Privatunterrichte in der Mathematik dem angestellten Lehrer das Geschäft auf's möglichste zu erleichtern. Um diese Absicht zu erreichen, beobachtete ich genau bey dem mündlichen Vortrage der Mathematik nach diesem Leitfaden, welche Stellen so beschaffen waren, daß sie den meisten aus meinen Schülern etwas dunkel vorkamen, und welche Wendung ich nehmen mußte, damit solche Stellen sodann deutlich wurden. Eben solche Beobachtungen hat auf meine Veranlassung unter meinen Schülern der gewesene Oberlieutenant Gernrath *), sowohl anfänglich, da solcher noch

*) Dermahls k. k. Provincial-Baudirector in Mähren und Schlesien.

als Schüler Privatunterricht in der Mathematik ertheilte, als auch in der Folge während der Anstellung als Lehrer bey einer Abtheilung der Mathematik-Beflissenen im Bombardier-Corps aufgesammelt. Und da ich es mir zur Dienstpflicht rechnete, die mir anvertrauten Schüler so weit auszubilden, daß die vorzüglicheren aus diesen (nebstdem, daß sie die erlernten Gründe gut anzuwenden, und solche andern geschickt beyzubringen wüßten) auch schriftliche Aufsätze über wissenschaftliche Gegenstände zubearbeiten einige Fertigkeit erlangten; so veranstaltete ich, daß obgenannter Gernrath bey Gelegenheit seiner Anstellung eine vorläufige Bearbeitung dieser neuen Auflage übernahm, solche nach der ersten Auflage, nach den Zusätzen am Ende des zweyten Bandes, nach meinem mündlich darüber abgehaltenen Vortrage, und zum Theil auch nach seinen eigenen Ideen (als z. B. bey der Darstellung der Gründe von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel nach der decadischen Ordnung, bey der Ableitung der sogenannten Reesischen Regel, bey der Auswahl, Anordnung und Auflösung verschiedener Aufgaben u. m. d.) den obigen Bemerkungen gemäß vollständig ausführte, und meiner Uebersicht und Berichtigung vorlegte. Auf diese Art glaubte ich auch zugleich an der Deutlichkeit des Vortrages zu gewinnen, und diejenigen Schwierigkeiten zu vermeiden, die ihren Ursprung darin haben, daß oft die Entwicklung einer Wahrheit dem Verfasser sehr einleuchtend ist, wo doch ein anderer solche nur mit äußerster Anstrengung

einsehen kann. Bey dieser Gelegenheit habe ich auch verschiedene Gegenstände eingeschaltet, welche in der ersten Auflage nicht enthalten sind; als z. B. eine kritische Untersuchung über die Vergleichung verschiedener Gewichte und Maße im §. 198 und 199; die allgemeine Interpolationsformel im §. 315; die Summirung der $m^{ten}$ Potenzen einer arithmetischen Progression im §. 318 und 319; die Bestimmung der Exponenten bey der Umkehrung der Functionen statt des sonst hierzu dienlichen analytischen Dreyeckes im §. 240 u. m. d., wie es aus der Vergleichung der ersten Auflage mit dieser neuen zu ersehen ist.

Auf diese Art entstand nun gegenwärtige neue Auflage dieses ersten Bandes meiner Vorlesungen über die Mathematik; wo ich zugleich auch den Bedacht genommen habe, daß die etwas schwereren eigentlich zur höheren Mathematik gehörigen Gegenstände von anderen unumgänglich nothwendigen abgesondert, und gegen das Ende des Werkes hingeordnet wurden; so zwar, daß ein mittelmäßiger Kopf (so wie auch jeder andere, dem es sonstige Umstände nicht erlauben, sich die Algebra vollständig eigen zu machen), wenn er die bis zum §. 276 vorgetragenen Gründe begriffen hat, sodann gleich in den zweyten Band geführet werden kann. In solchen Fällen können auch einige der vorhergehenden §§. überschlagen werden; z. B. von §. 155 bis 169, ferner §. 228 wie auch §. 246 bis 252. Sollte sich in der Folge die Fähigkeit des Lehrlings besser entwickeln, so kann das Ausgelassene immer nachgeholet werden.

Wenn ich so glücklich wäre, meine Absicht erreicht zu haben, und wenn mein Bestreben zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse etwas beyzutragen, einigen Beyfall finden sollte; so wird auch schon diese einzige Belohnung für meine literärischen Bemühungen eine hinlängliche Aufmunterung zu ferneren Arbeiten seyn.

Wien den letzten October 1792.

Georg Vega.

# Vorbericht

## zur dritten Auflage.

Nach hergestelltem Frieden war für die mathematischen Schulen des k. k. Artillerie-Corps eine dritte Auflage dieses ersten Theiles meines Lehrbuches erforderlich, nachdem die aus fünfzehnhundert Exemplaren bestehende zweyte Auflage desselben, theils durch den Absatz in den k. k. Staaten, theils durch häufige Verschreibungen ins Ausland, in der Verlagshandlung gänzlich vergriffen war.

Eine kurze Anweisung zum Gebrauche dieses ersten Theiles sowohl für diejenigen, welche nur die Anfangsgründe der Arithmetik daraus lernen, als für solche, welche zur höheren Mathematik übergehen wollen, ist in dem hier beygedruckten Vorberichte zur zweyten Auflage enthalten. Darin ist auch bemerket, daß dieses Lehrbuch nicht bloß allein für Kriegsmänner, sondern auch für diejenigen aus dem Civil-Stande geeignet ist, die sich eine ausführlichere, dadurch erst wesentlich nützliche Kenntniß der Mathematik zu erwerben wünschen. Daß auch Zöglinge einer zweckmäßig eingerichteten Marine-Schule aus diesem Lehrbuche einen erwünschten Nutzen schö-

pfen könnten, ist ohne meine Erinnerung einleuchtend; um so mehr, da auch die ersten Bände des Cours de Mathematique par Bezout in den mathematischen Schulen der Artillerie, des Ingenieur-Corps, und der Marine in Frankreich den solche Schulen besuchenden Officieren zum gemeinschaftlichen Leitfaden dienen.

Diese dritte Auflage durfte zwar von der zweyten nicht wesentlich verschieden seyn. Dessen ungeachtet habe ich nach einer wiederhohlten sehr genauen Durchsicht und nochmahligen Berichtigung der zweyten Auflage einige unumgänglich nothwendige Abänderungen gemacht. Auch bey der Besorgung der Correctur ist die größte Mühe angewendet worden, um den Druck möglichst fehlerfrey zu erhalten. Die übersehenen, in den Aushängbögen sorgfältigst aufgesuchten Druckfehler sind am Ende getreulich angezeiget.

Die Potenzen-Tafel, die Quadrat- und Cubik-Zahlen, wie auch die Quadrat- und Cubik-Wurzeln, die in der zweyten Auflage weggelassen waren, haben hier anstatt der Tafel der Primzahlen ihren Platz wieder erhalten; weil jene den Lehrlingen der Mathematik, die nur mein Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch Leipzig 1800, und nicht meine ausführlicheren Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln in zwey Bänden Leipzig 1797 besitzen, nützlicher seyn können, als diese. Die Quadrat- und Cubik-Wurzeln wurden vermittelst der Logarithmen neu berechnet. Sämmtliche Tafeln des Anhanges sind durchaus richtig.

Nun sind es gerade zwanzig Jahre, daß dieser erste Theil meines Lehrbuches in den mathematischen Schulen des k. k. Artillerie = Corps zum Leitfaden des Unterrichtes angenommen ist.

Die dreyzehn Kriegsjahre dieses Zeitraumes haben den Satz: daß die Mathematik die sicherste Grundlage der echten Kriegswissenschaft ist, für alle cultivirten Nationen evident gemacht. Ich selbst genoß das belohnende Vergnügen, mich in den Feldzügen sowohl gegen die Pforte als gegen Frankreich zu überzeugen, daß diejenigen meiner Schüler, welche sich mit ununterbrochenem Eifer den mathematischen Wissenschaften gewidmet hatten, sich auch vorzüglich vor dem Feinde durch kluge Tapferkeit ausgezeichnet, und zur Aufrechthaltung und Vermehrung des alten Ruhmes des Oesterreichischen Artillerie = Corps bestens mitgewirket haben; worunter ich es mir zur vorzüglichen Ehre rechne, auch den von der untersten Stufe eines Kanoniers durch alle Zwischengrade bis zum Major und Mar. Theres. Ordens = Ritter beförderten Carl Perczel von Bonyhad zählen zu können, einen wahrhaft edlen Ungarn, welcher in den Feldzügen in Bosnien, in den Niederlanden, am Mittel= und Ober=Rhein und endlich in Italien sich rühmlichst ausgezeichnet, und seine militärische Laufbahn durch den ehrenvollesten Tod auf dem Schlachtfelde geendiget hat.

Es würde überflüssig seyn, Mehreres zur Aneiferung derjenigen anzuführen, für welche nun nach hergestelltem Frieden die mathematischen Schulen

wieder eröffnet sind; da die wahre Würdigung der Mathematik bey dem ganzen Artillerie-Corps einheimisch und so allgemein ist, daß sehr Viele selbst aus der gemeinen Mannschaft im Felde ihre wenigen Ruhestunden aus eigenem Antriebe dieser Wissenschaft gewidmet haben, welches ich, nicht ohne innigster Rührung, sehr oft als Augenzeuge wahrzunehmen die Gelegenheit hatte.

Wien im Februar 1802.

Grg. Frh. v. Vega.

# Vorbericht

## zur vierten und fünften Auflage.

Die Bestimmung und Eigenthümlichkeit dieser mathematischen Vorlesungen ist in den vorhergehenden Auflagen von dem damahls noch lebenden Verfasser selbst vollständig dargestellt worden. Die Verlagshandlung will also nur bemerken, daß sie zur Erhöhung des allgemein anerkannten Werthes ihrerseits dafür gesorgt habe, daß diese neue Ausgabe möglichst frey von beirrenden Druckfehlern erscheinen möge: sie hat zu dem Ende noch vor dem Abdrucke das Exemplar durch einen Sachkundigen von den in der dritten und vierten Auflage stehen gebliebenen Druckfehlern sorgfältig reinigen lassen.

Wien im November 1828.

# Erste Vorlesung.

## Von den Rechnungsarten in ganzen Größen.

## I. Abschnitt.

### Vorläufige Einleitung.

§. 1.

Jedes Ding für sich betrachtet ist eine Einheit seiner Art; und mehrere Einheiten von der nähmlichen Gattung machen eine Zahl aus. Z. B. sechs Menschen sind eine Zahl von Menschen; sieben Klafter sind eine Zahl von Klaftern; acht Pfunde sind eine Zahl von Pfunden, u. s. w. Hieraus ist zu ersehen, daß eine Einheit wieder als eine Zahl in Rücksicht ihrer Theile kann angesehen werden; so ist ein Pfund eine Einheit von Pfunden, aber eine Zahl von Lothen; weil ein Pfund aus mehreren Lothen besteht.

§. 2.

Die Zahlen, und alle diejenigen Dinge, die sich durch Zahlen vorstellen, oder messen lassen, z. B. Gewichte, die sich durch Centner, Pfunde, Lothe; Entfernungen, die sich durch Klafter, Schuhe, Zolle; Zeiten, die sich durch Tage, Stunden und Minuten u. dgl. vorstellen lassen; überhaupt alle jene Dinge, welche durch einiges Hinzuthun, oder Hinwegnehmen vergrößert oder verkleinert werden können, pflegt man Größen zu nennen.

§. 3.

Diejenige Wissenschaft, welche die Eigenschaften der Größen untersuchet, und hauptsächlich lehret, aus einigen bekannten Größen andere unbekannte zu finden, die mit jenen in einer

gewissen Verbindung stehen, wird überhaupt die Mathematik, oder Größenlehre, auch Meßkunst genannt. Sie wird eingetheilet in die reine und angewandte Mathematik. Die erste beschäftiget sich mit der Vergleichung und Bestimmung der Größen, wo bloß in Erwägung gezogen wird, daß sie durch einiges Hinwegnehmen oder Hinzuthun kleiner oder größer werden, ohne auf ihre übrigen Eigenschaften Acht zu haben. Die zweyte ist eine Anwendung der reinen Mathematik, und zieht nebst der Eigenschaft der Größe auch noch die übrigen physischen Beschaffenheiten mit in Betrachtung. Zur reinen Mathematik gehöret die Arithmetik und die Geometrie; erstere beschäftiget sich mit unstätigen Größen, das ist, mit Größen, welche aus abgesonderten, und durch eigene Gränzen bestimmten Theilen bestehen; letztere aber hat stätige Größen zum Gegenstande: das ist, Größen, deren Theile ununterbrochen aneinander hängen. Z. B. es sollte die Zahl der Ziegeln auf einem Dache bestimmt werden, so ist dieß ein Gegenstand der Arithmetik; sollte aber die Menge des Schnees bestimmt werden, welcher das Dach bedecket, so ist es ein Gegenstand der Geometrie.

Die angewandte Mathematik wird eingetheilet in die mechanischen, optischen und astronomischen Wissenschaften; die erstern handeln von den Bewegungen der Körper, und den Kräften, die solche verursachen, oder hemmen; die andern beschäftigen sich mit den Gesetzen des Sehens, und den Eigenschaften der Lichtstrahlen; und die letztern lehren die Ausmessung der Körperwelt im Großen, und stellen Untersuchungen über die Größe, Zusammenordnung und Verbindung der Weltkörper, und ihre Bewegungen an. Jede dieser Wissenschaften wird wieder in verschiedene willkührliche Theile zertheilet, und mit eigenen Nahmen beleget. Was man eigentlich unter dem Worte die höhere Mathematik versteht, läßt sich hier nicht verständlich erklären; darum muß solches hier mit Stillschweigen übergangen, und an seinem Orte erkläret werden.

Außer den angeführten Theilen der Mathematik gibt es noch andere Wissenschaften, die zu den mathematischen gerechnet, und unter dem Nahmen technische Mathematik verstanden wer-

den; dergleichen sind die Befestigungskunst, die bürgerliche Baukunst, die Wasserbaukunst, die Geschützkunst, die Markscheidekunst, die Steuermannskunst u. dgl. Es sind Anwendungen der reinen und angewandten Mathematik, zu deren Ausübung man aber noch andere Wissenschaften und Künste nöthig hat; wessentwegen sich deren Benennungen in Kunst endigen.

§. 4.

Wir zählen im gemeinen Leben, nach der uns von Jugend auf bekannten Art, von eins bis zehn; und die Größe dieser Zahl zehn, so wie einer jeden der vorhergehenden, neun, acht, sieben, sechs u. s. w. ist uns alsogleich bekannt, sobald wir sie uns nur denken, oder aussprechen hören; sodann zählen wir zehn und eins, zehn und zwey, zehn und drey; oder abgekürzt, eilf, zwölf, dreyzehn u. s. f. bis wir auf eine Zahl kommen, die zweymahl so groß ist als zehn, und diese nennen wir zwanzig; dann fangen wir wieder von eins an, bis wir auf eine Zahl kommen, die drey — vier — fünf — sechs — sieben — acht — neunmahl so groß ist als zehn, und nennen solche dreyßig, vierzig, fünfzig, sechszig, siebenzig, achtzig, neunzig, bis wir auf eine Zahl kommen, die zehnmahl so groß ist als zehn, diese nennen wir ein Hundert. Dann zählen wir wieder von eins angefangen, und so erhalten wir zwey Hundert, drey Hundert .... neun Hundert. Zehn Hundert nennen wir ein Tausend; tausendmahl tausend eine Million; eine Million Millionen eine Billion; eine Million Billionen eine Trillion u. s. w.

§. 5.

Um nicht die Zahlen mit Worten schreiben zu müssen, hat man auf willkührliche Zeichen gedacht, wodurch man solche vorstellen und kürzer schreiben könnte. Einige Völker, als die Phönicier, Griechen und Hebräer haben hierzu die Buchstaben ihres Alphabets gewählet, deren zehn ersten sie die Werthe von eins bis zehn beygelegt haben; den eilften ließen sie zwanzig, den zwölften dreyßig u. s. f. gelten, so, daß der neunzehnte den Werth hundert bekam, von wo aus sie wieder verschiedene Ein-

theilungen machten. Die Römer wählten zu ihren Zahlzeichen einige Buchstaben ihres Alphabets, I eins, V fünf, X zehn, L fünfzig, C hundert, D oder IↃ fünfhundert, und M oder CIↃ tausend. Sie zählten diese Zeichen, wenn sie neben einander stehen, zusammen, als II zwey, VI sechs, XXVII sieben und zwanzig; wenn aber ein kleineres links neben einem größern Zeichen steht, so rechnet man solches von dem größern hinweg; als z. B. IV vier, IX neun, XL vierzig u. s. w. Diese Zahlen werden heut zu Tag noch recht oft bey öffentlichen Aufschriften gebraucht. Die Sinesen, wie Herr Leibnitz angibt, bedienten sich nur der zwey Zahlzeichen 1 und 0, durch welche sie jede Zahl vorstellten, indem sie den Werth des Zeichens 1 (eins) so oft verdoppelten, als es um eine Stelle gegen die Linke gerückt wurde; das Zeichen 0 hatte aber keinen Werth; sondern besetzte nur die leeren Plätze: sie schrieben demnach 1 eins, 10 zwey, 11 drey, 100 vier, 101 fünf, 110 sechs, 111 sieben, 1000 acht, 1001 neun, 1010 zehn, 1011 eilf, 1100 zwölf, 1101 dreyzehn u. s. w.

§. 6.

Die gewöhnlichsten Zahlzeichen sind nun die sogenannten Ziffern, die uns so wie die Buchstaben des Alphabets *a*, *b*, *c* ꝛc. bekannt sind; nähmlich 1 bedeutet für sich allein eins, 2 zwey, 3 drey, 4 vier, 5 fünf, 6 sechs, 7 sieben, 8 acht, 9 neun, 0 null. Sie werden die arabischen Ziffern genennet, weil wir solche von den Arabern sollen erhalten haben.

Um mit diesen zehn Ziffern jede Zahl bezeichnen zu können, hat man durch eine allgemeine Übereinstimmung folgendes Gesetz angenommen: Wenn mehrere Ziffern nebeneinander stehen, so bedeutet jede Ziffer an der folgenden Stelle gegen die Linke zehnmahl so viel, als an der nächst vorhergehenden. Es bedeutet daher bey einer durch die Zusammensetzung der angeführten Ziffern bezeichneten Zahl z. B. bey 8746295 die erste Ziffer zur Rechten bloße Einheiten oder sogenannte Einer, 5 (fünf); die Ziffer an der zweyten Stelle bedeutet Zehner, und zwar so viele Zehner, als sie für sich allein Einheiten bedeuten würde, 9 (neun) Zehner oder abgekürzt neunzig, zusammen 95 (neunzig und fünf,

oder nach dem Sprachgebrauche, fünf und neunzig); die dritte Ziffer bedeutet Hunderter, oder Einheiten der Hunderter, 295 (zwey Hundert 95); die vierte bedeutet Tausender, 6295 (sechs Tausend 295); die fünfte Zehntausender, 46295 (46 Tausend 295); die sechste Hunderttausender, 746295 (746 Tausend 295); die siebente Einheiten der Millionen, 8746295 (acht Millionen 746 Tausend 295). Nach diesen kommen die Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender der Millionen; endlich an der dreyzehnten Stelle Einheiten der Billionen u. s. w.

Daß aus den angeführten zehn Zahlzeichen, und dem dabey angenommenen Gesetze abgeleitete Lehrgebäude pflegt man das decadische System, oder die Decadik zu nennen, von dem griechischen Worte Δεκα (zehn); so wie jenes System mit zwey Zahlzeichen (§. 5.) Dyadik von Δυο (zwey) genennt wird, welches aber nicht gebräuchlich ist.

§. 7.

0 Null bedeutet für sich allein nichts, sondern vermehret nur bey der Zusammensetzung den Werth der übrigen bedeutlichen Ziffern, wenn diese dadurch weiter links zu stehen kommen. Wenn sich daher bey einer mit Ziffern bezeichneten Zahl Nullen befinden, so ist es ein Zeichen, daß an denjenigen Stellen, wo Nullen stehen, die dahingehörigen Einer, Zehner, Hunderter oder Tausender ꝛc. abgehen. Z. B. 10 zehn; 20 zwanzig; 400 vier Hundert; 801 acht Hundert und eins; 60040 sechszig Tausend und vierzig.

In folgender Tafel kann man den Werth der Ziffern mit einem Blicke übersehen, der ihnen vermög ihrer Stelle zugehöret; es bedeutet nähmlich

die 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. Stelle

| der Trillionen | | | der Billionen | | | der Millionen | | | Bloße | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Einheiten | Zehner | Hunderter | Einheiten | Zehner | Hunderter | Einheiten | Zehner | Hunderter | Einheiten | Zehner | Hunderter |
| Tausender | Zehntausender | Hunderttausender | | | | | | | | | |
| u. s. w. | | | | | | | | | | | |

§. 8.

Wer nur einmahl die Fertigkeit erlanget hat, jede mit drey Ziffern bezeichnete Zahl richtig auszusprechen, dem wird es sodann auch sehr leicht seyn, jede mit wie viel immer Ziffern aufgeschriebene Zahl auszusprechen, und zwar auf folgende Art.

Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, gebe jeder Classe drey Ziffern (die letzte links kann auch deren weniger behalten); hinter der ersten Classe mache man einen Punct, hinter der zweyten einen Strich, hinter der dritten einen Punct, hinter der vierten zwey Striche, hinter der fünften einen Punct, hinter der sechsten drey Striche: sodann lese man jede Classe für sich, als wenn sie allein stünde, und setze an jeder Stelle eines Punctes das Wort Tausend; an der Stelle eines Striches das Wort Million, bey zwey Strichen Billion, bey drey Strichen Trillion u. s. w., so ist die Zahl richtig ausgesprochen. Z. B. die Zahl 84,,,650.046,,508.700,964.005 heißt: 84 Trillionen, 650 Tausend und 46 Billionen, 508 Tausend und 700 Millionen, 964 Tausend und 5. Eben so 5,,640.000,300.000 heißt 5 Billionen, 640 Tausend Millionen, und 300 Tausend.

Und eben so läßt sich jede ausgesprochene Zahl aufschreiben, wenn man bey der höchsten Classe links anfängt, die bedeutlichen Ziffern gehörig anschreibt, wo aber keine Hunderte, Zehner, oder Einheiten ausgesprochen werden, Nullen ansetzt, ferner überall, wo die Worte Tausend, Millionen, Billionen ꝛc. ausgesprochen werden, die gehörigen Zeichen macht und nachsieht, ob alle Classen vorhanden sind, und ob jede Classe drey Ziffern habe, wo nur die erste links stehende Classe zuweilen nur zwey, auch gar nur eine Ziffer allein haben kann. Z. B. um folgende Zahl mit Ziffern zu bezeichnen (sechs und zwanzig Tausend und vier Millionen, neunmahl Hundert und sechs Tausend und acht), so schreibe man 26; nach diesen folgen die Hunderte und Zehner der Millionen, weil aber keine solche ausgesprochen worden, so setze man an ihre Stellen zwey Nullen, und sodann die vier Einheiten der Millionen, nähmlich 26.004 Millionen; nach den Millionen folgen die Hun-

derttausende, in dem angeführten Beyspiele neun, man setze also 9 an; nach diesen kommen Zehntausende, hier keine, man schreibe also 0; nach diesen kommen sechs Einheiten der Tausende, diese werden auch angesezt, und dann erhält man 26.004,906 Tausend; endlich schreibe man an die Stellen der nicht ausgesprochenen bloßen Zehner und Hunderte zwey Nullen, und setze die acht letzten Einheiten an, so sieht die vorgelegte Zahl also aus 26.004,906.008.

§. 9.

Die Zahlen, deren Einheiten noch mit keinem besondern Nahmen belegt sind, und welche daher noch jede Gattung der Größen vorstellen können, werden unbenannte Zahlen genannt; z. B. die Zahl 28 ist in so lange eine unbenannte Zahl, als man sich noch alle Gattungen der Größen, als 28 Menschen, 28 Häuser, 28 Klafter u. s. w. darunter vorstellen kann. Hat man aber einer Zahl einmahl einen Nahmen beygelegt, so ist sie eine benannte Zahl; z. B. 8 Menschen, 17 Gulden, 100 Bücher u. s. w. sind benannte Zahlen.

§. 10.

Zahlen sind gleichnahmig, wenn sie gleichen Nahmen führen, oder auf gleiche Nahmen gebracht werden können; im Gegentheile sind sie ungleichnahmig. Z. B. 6 Klafter und 4 Klafter sind gleichnahmige Zahlen; 7 Pfunde und 6 Meilen sind ungleichnahmig; 3 Bombardiere und 2 Kanoniere sind zwar ungleichnahmig; wenn aber die Rede von Artilleristen ist, so sind sie gleichnahmig; auch könnte man 2 Klafter und 5 Schuhe oder Fuß für gleichnahmig betrachten, wenn man sich einbildet, daß die Schuhe Theile einer Klafter sind.

§. 11.

Zwey gleichnahmige Zahlen oder Größen können auf die einfachste Art gegen einander verglichen werden, wenn man untersuchet, ob sie gleich groß, oder ob eine größer sey als die andere; ungleichnahmige Größen hingegen können nicht gegeneinander verglichen werden. Man kann z. B. untersuchen, welches mehr, oder größer sey, 5 Klafter oder 2 Klafter; eben so, welches größer sey, 1 Pfund oder 12 Loth, weil man sich einbilden kann,

daß ein Pfund aus 32 Loth bestehe: aber man kann nicht untersuchen, welches größer sey 4 Klafter oder 5 Pfund. Man hat, um die Gleichheit zweyer Größen auszudrücken, folgendes Zeichen = gewählet, welches zwischen zwey Größen gesetzt wird, die gleich groß sind, das heißt, deren eine für die andere gesetzt werden darf; z. B. 1 Kl. = 6 Sch., und wird gelesen eine Klafter ist gleich 6 Schuhen; 4 Gr. = 12 Kr. Und um die Ungleichheit auszudrücken, bedient man sich des Zeichens >, welches zwischen zwey ungleiche Größen gesetzt wird, so, daß die Spitze gegen die kleinere zu stehen kömmt; z. B. 1 Fl. > 20 Kr. und wird gelesen 1 Fl. ist größer als 20 Kr.; eben so 4 Sch. < 1 Kl. 4 Schuhe sind kleiner als 1 Klafter.

Dieses ist die erste Vergleichung der Größen, womit die Mathematik ihren Anfang macht: sie gründet ihr Lehrgebäude auf die hieraus entspringenden Grundsätze (Sätze, deren Wahrheit ohne allen Beweis einleuchtend ist), schreitet sodann zur Erkenntniß anderer verborgener Wahrheiten fort, und führet uns auf diese Art an die Gränzen unseres Verstandes.

## §. 12.

Grundsätze. Nr. 1. Jedes Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich, und ist größer als jeder seiner Theile; z. B. 1 Kl. = 6 Sch.; 1 Fl. = 20 Gr. Hingegen 1 Kl. > 4 Sch.; 19 Gr. < 1 Fl.

Nr. 2. Gleiches kann für Gleiches gesetzt werden. Statt 18 Schuhen kann man drey Klafter setzen; statt ein Pfund können 32 Lothe gesetzt werden.

Nr. 3. Wenn zwey Größen einer dritten Größe gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; ist aber eine Größe größer, oder kleiner, als eine von zwey gleichen Größen, so ist sie auch größer, oder kleiner als die andere; z. B.

| | |
|---|---|
| 1 Fl. = 60 Kr. | 1 Fl. = 60 Kr. |
| 1 Fl. = 20 Gr. | 3 Gr. < 1 Fl. |
| also auch 60 Kr. = 20 Gr. | 3 Gr. < 60 Kr. |

# II. Abschnitt.

## Von der Addition.

### §. 13.

Eine Zahl, welche so groß ist, als zwey, oder mehrere Zahlen zusammengenommen, wird die Summe dieser Zahlen genennt; so z. B. ist die Zahl 5 die Summe der Zahlen 2, und 3; weil 3 und 2 zusammengenommen 5 gibt. Eben so ist 9 die Summe von 2, 3 und 4 u. s. w.

### §. 14.

Die Rechnungsart aber, nach welcher man die Summen mehrerer gegebenen Zahlen findet, wird die Addition genennt: nähmlich, addiren heißt die Summe mehrerer gegebenen Zahlen finden. Die zu addirenden Zahlen müssen aber gleichnahmig seyn, sonst können solche nicht addirt werden; z. B. 3 Pfund und 4 Gulden können unmöglich in eine Summe gebracht werden; denn die Summe würde weder Pfunde noch Gulden bedeuten. Eben so kann auch von 5 Pfunden und 4 Lothen die Summe weder 9 Pfunde, noch 9 Lothe seyn: es wird aber weiter hinten gezeigt werden, wie derley Zahlen, welche zwar ungleichnahmig sind, doch aber auf gleiche Nahmen gebracht werden können, zu addiren sind.

### §. 15.

Das Zeichen, dessen man sich bey der Addition bedienet, ist ein aufrecht stehendes Kreuz, nähmlich +, welches ausgesprochen wird mehr (plus), und zeigt an, daß diejenigen Zahlen, oder Größen, zwischen welchen es steht, addirt werden sollen; z. B. $4 + 3 = 7$; wird gelesen 4 mehr 3 ist gleich 7; $9 + 5 = 14$; $9 + 8 = 17$ u. s. w.

Anmerkung. Hier muß der Anfänger sich in der Summirung zweyer Zahlen, welche beyde nur aus einer Ziffer bestehen, oder auch, wenn eine aus zwey, und die andere nur aus einer Ziffer besteht, wohl üben; z. B. 8 und 5 sind 13; 9 und 8 sind 17; 24 und 7 sind 31; 48 und 9 sind 57; 86 und 8 sind

94 u. s. w. Und man kann sich gewisse Regeln machen, die einem Ungeübten gut zu Statten kommen können; z. B. man wüßte nicht geschwind, wie viel 26 und 9 sey, so erinnere man sich nur, daß 26 und 10=36 sey; also um eins weniger gibt 35. Ingleichen man wüßte nicht alsogleich, wie viel 48 und 7 sey, so gebe man in Gedanken indessen 2 von 7 zu 48, so hat man 50, und 5 gibt 55; und mehr dergleichen.

## §. 16.

Grundsätze. Nr. 1. Wenn man zu gleichen Größen Gleiches addirt, so sind die Summen gleich.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 4 + 3 = 7 | 1 Fl. = 60 Kr. |
| 2 + 6 = 8 | 1 Gr. = 3 Kr. |
| also auch 4+3+2+6=7+8 | 1 Fl. + 1 Gr. = 63 Kr. |

Es ist also einerley, ob man die ganzen Größen, oder alle ihre Theile, woraus sie bestehen, zusammen addiret.

Nr. 2. Addirt man aber zu gleichen Größen Ungleiches: so ist jene Summe größer, wo das Größere addirt worden ist.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 7 + 8 = 15 | 1 Kl. = 6 Sch. |
| 5 > 4 | 1 Sch. > 4 Zoll. |
| also auch 7+8+5>15+4; | also auch 1 Kl. + 1 Sch. > 6 Sch. + 4 Z. |

## §. 17.

Um nun Zahlen, wenn sie aus noch so viel Ziffern bestehen, addiren zu können, beobachte man folgende Regeln.

1) Man schreibe die zu addirenden Zahlen so untereinander, daß die Einheiten unter die Einheiten, Zehner unter die Zehner, Hunderte unter die Hunderte u. s. w. zu stehen kommen; nähmlich man ordne sie von der Rechten gegen die Linke gehörig untereinander; wo bey jenen Zahlen, die aus weniger Ziffern bestehen, die Stellen zur Linken leer verbleiben; und ziehe darunter einen Querstrich.

2) Dann addire man erstlich die Columne der Einheiten, und setze die Summe hiervon, wenn solche nur aus einer Ziffer besteht (wie hier vorausgesetzt wird), unter den Strich an die Stelle der Einheiten; nähmlich im Beyspiele Nr. 1 sagt man: 4 und 1 gibt 5, und 3 gibt 8 Einheiten; auf die nähmliche Art

addire man nun auch die Columne der Zehner, indem man wieder sagt: 6 und 2 gibt 8, und 1 gibt 9, und setze diese Summe, da sie wieder nur aus einer Ziffer besteht, an die Stelle der Zehner; und so addire man ferner die Hunderte, Tausende, Zehntausende u. s. w.; so wird man die verlangte Summe erhalten, wie aus dem Beyspiele Nr. 1 zu ersehen ist. Befinden sich in einer Columne lauter Nullen, so wird auch in der Summe eine Nulle an die Stelle gesetzt, damit die folgenden Ziffern ihren Rang behalten (§. 7), wie aus dem Beyspiele Nr. 2 zu ersehen ist.

## Beyspiele.

| Nr. 1. | |
|---|---|
| Zu addiren | 92164 |
| | 321 |
| | 5413 |
| Summe | 97898 |

| Nr. 2. | |
|---|---|
| Zu addiren | 7001 |
| | 9505 |
| | 302 |
| Summe | 16808 |

3) Besteht aber die Summe einer Columne aus zwey Ziffern, so schreibe man nur die erste Ziffer rechts unter die addirte Columne, und die andere Ziffer addire man zur folgenden Columne; nähmlich im Beyspiele Nr. 3 sagt man: 6 und 8 gibt 14, und 9 gibt 23, nähmlich 3 Einheiten, und zwey Zehner; man schreibe deßwegen die 3 Einheiten an die Stelle der Einheiten, die 2 Zehner aber übertrage man zur Columne der Zehner, indem man ferner sagt: 2 geblieben und 5 gibt 7, und 6 gibt 13, und 1 gibt 14 Zehner, nähmlich 4 Zehner und 1 Hundert; folglich schreibe man die 4 Zehner an die Stelle der Zehner, und übertrage das 1 Hundert zur Columne der Hunderte, und sage ferner: 1 geblieben und 4 gibt 5, und 8 gibt 13, und 7 gibt 20 Hunderte, nähmlich kein oder 0 Hundert, und 2 Tausende, man schreibe demnach an die Stelle der Hunderte eine Nulle, damit die folgenden Ziffern ihren Werth behalten, und übertrage die 2 Tausende zur Columne der Tausende; und so fahre man fort, bis keine Columne mehr vorhanden ist, so wird man die richtige Summe haben. Besteht eine Columne aus lauter Nullen, und es ist etwas von der vorigen Columne geblieben; so muß solches an diese Stelle gesetzt werden, wie es das Beyspiel Nr. 4 zeiget.

## Beyspiele.

| Nr. 3. | | Nr. 4. | |
|---|---|---|---|
| Zu addiren | 4456 | Zu addiren | 3084 |
| | 2868 | | 2063 |
| | 719 | | 8095 |
| Summe | 8043 | Summe | 13242 |

4) Wenn viele Zahlen zu addiren sind, so kann seyn, daß die Summe irgend einer Columne aus 3 Ziffern bestehe; da setze man ebenfalls nur die erste Ziffer rechts unter die addirte Columne, und zähle die übrigen zur folgenden Columne; z. B. es wäre die Summe der Columne der Einheiten = 124; so setze man die erste Ziffer 4 an die Stelle der Einheiten, und die übrigen 12 addire man zur Columne der Zehner.

Man kann aber auch in dergleichen Fällen, wo gar viele Zahlen zu addiren sind, und also zu viele Aufmerksamkeit erfordert wird, die Zahlen in zwey oder mehrere Theile zertheilen, jeden Theil insbesondere addiren, und die Summen davon in eine Hauptsumme bringen; z. B. es wäre folgende Addition zu verrichten: 87569 + 5498 + 3695 + 95678 + 3097 + 909 + 40895 + 3278 + 78567 + 4039 + 97908 + 21706 + 6537 + 69578 + 59857; so könnte man also schreiben

| | | | |
|---|---|---|---|
| 87569 | | | |
| 5498 | | 78567 | |
| 3695 | | 4039 | |
| 95678 | | 97908 | |
| 3097 | | 21706 | |
| 909 | | 6537 | |
| 40895 | | 69578 | 240619 |
| 3278 | | 59857 | 338192 |
| Summe | 240619 | Summe 338192 | Hauptsumme 578811 |

Daß man nach diesen vorgeschriebenen Regeln die richtige Summe erhalte, erhellet aus (§. 12, Grundsatz 1), weil man auf diese Art alle Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende u. s. w., als alle Theile des Ganzen, welches hier die Summe heißt, zusammenzählet.

### §. 18.

Zweifelt man, ob nicht in der Addition gefehlet worden, so ist die beste Probe, wenn man die Addition noch einmahl wiederholet; und zwar das zweyte Mahl addire man von unten hinauf, wenn das erste Mahl von oben hinunter addirt worden ist,

oder umgekehrt; erhält man nun in beyden Fällen einerley Summen, so ist die Addition richtig.

---

# III. Abschnitt.

## Von der Subtraction.

§. 19.

Diejenige Zahl, welche anzeigt, um wie viel eine von zwey gegebenen Zahlen größer sey als die andere, wird die Differenz, oder der Unterschied dieser Zahlen genennt; so z. B. ist 5 die Differenz der Zahlen 9 und 4; weil 9 um 5 größer ist als 4.

§. 20.

Die Rechnungsart, nach welcher die Differenz jeder zwey gegebenen Zahlen gefunden werden kann, wird die Subtraction genannt; nähmlich subtrahiren oder abziehen heißt die Differenz zweyer gegebenen Zahlen finden.

Von den Zahlen selbst wird die größere, von welcher abgezogen wird, der Minuendus, und die kleinere, welche abgezogen werden soll, der Subtrahendus genennt.

Auch hier müssen beyde Zahlen, die von einander subtrahirt werden sollen, gleichnahmig seyn; denn sonst könnten sie ja gar nicht verglichen werden (§. 11).

§. 21.

Das Zeichen der Subtraction ist ein liegender Strich —, welches ausgesprochen wird weniger (minus), und zeigt an, wenn solches zwischen zwey Zahlen, oder Größen steht, daß die hinter dem Zeichen von jener vor dem Zeichen abgezogen werden soll; z. B. $15 - 7 = 8$ wird gelesen 15 weniger 7 ist gleich 8; $11 - 5 = 6$; $9 - 2 = 7$ u. s. w.

Anmerkung. Die Anfänger müssen sich auch hier üben, um alsogleich die Differenz zweyer Zahlen zu wissen, wo jede nur aus einer einzigen Ziffer besteht, oder auch wenn eine Zahl, der Minuendus, aus zwey, die andere aber, der Subtrahen-

dus, nur aus einer Ziffer besteht; z. B. $9-2=7$; $8-3=5$; $17-8=9$; $16-9=7$; $13-8=5$ u. s. w.

§. 22.

Grundsätze. Nr. 1. Wenn man von gleichen Größen Gleiches subtrahiret, so sind die Differenzen gleich.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| $3+6=9$ | 1 Fl. = 60 Kr. |
| $2+5=7$ | 1 Gr. = 3 Kr. |
| also auch $3+6-2-5=9-7$; | also auch 1 Fl. — 1. Gr. = 57 Kr. |

Daher ist es einerley, ob man die Theile einer Größe von den Theilen einer andern Größe, oder die ganze Größe auf einmahl abzieht.

Nr. 2. Subtrahiret man von gleichen Größen Ungleiches, so sind die Differenzen ungleich, und zwar dort größer, wo am wenigsten subtrahiret worden ist.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| $12+6=18$ | 1 Zent. = 100 Pf. |
| $5>4$ | 30 Loth < 1 Pf. |
| also auch $12+6-5<18-4$; | also auch 1 Z. — 30 L. > 99 Pf. |

Nr. 3. Zieht man von ungleichen Größen Gleiches ab, so ist dort die Differenz größer, wo vorhin Größeres war.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 1 Tag > 20 Stunden | $6+3>8$ |
| 60 Min. = 1 Stunde | $4=4$ |
| also auch 1 T. — 60 M. > 19 St. | also auch $6+3-4>8-4$. |

§. 23.

Sind nun zwey Zahlen, die aus mehrern Ziffern bestehen, von einander abzuziehen, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere, so daß die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. s. w. zu stehen kommen, wie bey der Addition, und ziehe darunter einen Querstrich.

2) Dann subtrahire man zuerst die Einheiten der untern Zahl von den Einheiten der obern Zahl, so auch die Zehner von den Zehnern, die Hunderte von den Hunderten u. s. w. und schreibe die Differenz jedesmahl an eben dieselbe Stelle, so hat man die verlangte Differenz. Im Beyspiele Nr. 1 sagt man: 2 von 5 blei-

ben 3, 3 von 4 bleibt 1, 0 von 9 bleiben 9, 2 von 6 bleiben 4. Bleibt aber irgendwo gar nichts übrig, so muß an die Stelle eine Null gesetzt werden; nähmlich im Beyspiele Nr. 2 sagt man: 1 von 4 bleiben 3, 8 von 8 bleibt 0, 3 von 7 bleiben 4. Besteht die obere Zahl aus mehr Ziffern als die untere, so werden die noch übrigen Ziffern zur Differenz herunter gesetzt, wie im Beyspiele Nr. 3 zu ersehen ist.

Beyspiele.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nr. 1. | 6945 | Nr. 2. | 784 | Nr. 3. | 23587 |
| | 2032 | | 381 | | 432 |
| Diff. | 4913 | Diff. | 403 | Diff. | 23155 |

3) Wenn eine Ziffer, von welcher man abziehen soll, kleiner ist, als die abzuziehende, so borge man von der nächstfolgenden links eine Einheit, und bezeichne diese Ziffer mit einem Puncte, zum Zeichen, daß sie sodann um eins weniger gelte: diese geborgte Einheit gibt 10 Einheiten der vorhergehenden Ziffer (§. 6); derowegen vermehre man die Ziffer, von welcher abgezogen werden soll, um 10 Einheiten, und ziehe die darunter stehende von ihr ab. So können im Beyspiele (Nr. 4) 5 Einheiten von 3 Einheiten nicht abgezogen werden: man borge deßwegen einen Zehner, und sage: 5 von 13 Einheiten bleiben 8 Einheiten, und 3 von 5 bleiben 2 Zehner; ferner 9 Hunderte von 8 Hunderten können nicht abgezogen werden: man borge also ein Tausend, und sage: 9 Hunderte von 18 Hunderten bleiben 9; und endlich 1 von 4 bleiben 3 Tausende. Kömmt eine bedeutliche Ziffer von einer Null abzuziehen, so borge man ebenfalls von der folgenden Ziffer eine Einheit, wo sodann aus 0 zehn wird. Ist aber eine Null von einer andern Nulle abzuziehen, so wird in der Differenz ebenfalls eine Nulle gesetzt, wie solches aus dem Beyspiele Nr. 5 zu ersehen ist. Wäre die Ziffer, von welcher man borgt, ein 1, so muß man sich sodann an dessen Stelle eine Null gedenken, wie es das Beyspiel Nr. 6 zeigt.

Beyspiele.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nr. 4. | 5̇86̇3 | Nr. 5 | 6030 | Nr. 6. | 8̇1̇15 |
| | 1935 | | 2014 | | 2057 |
| | 3928 | | 4016 | | 6058 |

4) Wenn einer Ziffer, von welcher man nicht abziehen kann, eine oder mehrere Nullen nachfolgen, so übergehe man alle Nullen, und borge von der nächsten bedeutlichen Ziffer eine Einheit; diese gibt an der Stelle der ersten Null 10 Einheiten: eine davon hinweg geborgt bleibt ein 9; die geborgte Einheit gibt wieder an der Stelle der vorhergehenden Null 10 Einheiten, und eins davon geborgt bleibt wieder an dieser Stelle ein 9 u. s. w., woraus folgende Regel fließt: Wenn von einer oder mehr nacheinander folgenden Nullen eins geborgt werden soll, so borge man von der nächstfolgenden bedeutlichen Ziffer eine Einheit, und bemerke alle übersprungenen Nullen mit einem Puncte, zum Zeichen, daß solche sodann lauter 9 sind; wie es im Beyspiele Nr. 7 und 8 zu ersehen ist.

Beyspiele.

| Nr. 7. | 6704 | Nr. 8. | 9000800106 |
|---|---|---|---|
| | 6356 | | 43491638 |
| | 348 | | 8957308468 |

Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet daraus, weil es einerley ist, ob man die Einheiten, Zehner, Hunderte u. s. w. jede insbesondere, oder ob man die ganze kleinere Zahl auf einmahl abziehet. (§. 22, Grundsatz 1.)

§. 24.

Da (vermög §. 19) die Differenz anzeigt, um wie viel die größere Zahl größer ist, als die kleinere, so können die Differenz und die kleinere Zahl als Theile der größern angesehen werden; addirt man demnach die Differenz zur kleinern Zahl, so muß die größere zum Vorschein kommen; welches zur Probe der Subtraction dienen kann.

§. 25.

Einige Beyspiele zur Anwendung der Addition und Subtraction.

1. Frage: Die Armee einer Monarchie besteht aus 238500 Mann Infanterie, 65840 Mann Cavallerie, 10830 Mann Artillerie, und noch aus verschiedenen andern Corps 12640 Mann; Wie stark ist wohl diese Kriegsmacht?

Antwort. 238500 + 65840 + 10830 + 12640 = 327810 Mann.

2. Frage. Die Stadt Trier wird in der Geschichte um 1300 Jahre älter als die Stadt Rom angegeben. Da nun Rom 753 Jahr vor Christi Geburt soll erbaut worden seyn; wie alt ist wohl die Stadt Trier in diesem Jahre 1802?

Antwort. 1300 + 753 + 1802 = 3855 Jahre.

3. Frage: Amerika ist von Christoph Columbus im Jahre 1497 entdeckt worden: wie lang ist es nun in diesem Jahre 1802, daß wir von diesem vierten Welttheile eine Wissenschaft haben?

Antwort. 1802 — 1497 = 305 Jahre.

4. Frage: Eine Armee ist 280000 Mann stark ins Feld gezogen; im ersten Feldzuge verlor sie 25648 Mann; dagegen erhielt sie 36800 Mann Recruten; im zweyten Feldzuge verlor sie 38794 Mann, erhielt aber 40500 Recruten; im dritten Feldzuge verlor sie 8456 Mann, und erhielt einen Zuwachs von 50000 Recruten: wie stark ist wohl die Armee am Ende des dritten Feldzuges?

Antwort. 280000 + 36800 + 40500 + 50000 — 25648 — 38794 — 8456 = 407300 — 72898 = 334402 Mann.

---

# IV. Abschnitt.

## Von der Multiplication.

### §. 26.

Wenn eine nähmliche Zahl ein oder mehrere Mahl zu sich selbst addirt werden soll, so hat man eine Rechnungsart eingeführt, durch welche der Betrag viel geschwinder, als durch die gewöhnliche Addition gefunden werden kann; diese Rechnungsart wird die Multiplication genennt. Die Zahl, welche etliche Mahl genommen, oder addirt werden soll, nennt man den Multiplicandus, und diejenige Zahl, welche anzeigt, wie oft der Multiplicandus zu nehmen ist, heißt der Multiplicator; beyde zusammen heißen die Factoren, und der Be-

trag wird hier das Product genennt. Zwey Zahlen miteinander multipliciren heißt demnach eine Zahl so oft nehmen, als die andere Einheiten in sich enthält. Z. B. 4 mit 3 multipliciren heißt die Zahl 4 dreymahl, oder welches einerley ist, die Zahl 3 viermahl nehmen. In beyden Fällen kommt 12 zum Vorschein: 3 und 4 sind demnach die Factoren, und 12 ist das Product.

Es ist daher auch, bey der Multiplication, gleichgültig, welchen Factor man als Multiplicator annimmt, weil das Product einerley ist; und es zeigt jeder Factor mit seinen Einheiten an, wie oft der andere genommen werden muß, damit das Product zum Vorschein komme; oder, welches einerley ist, wie oft der andere Factor in dem Producte enthalten ist.

## §. 27.

Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz $\times$, oder auch nur ein Punct .; es wird ausgesprochen, multiplicirt, und bedeutet, daß die Zahlen oder Größen, zwischen welchen es steht, miteinander multiplicirt werden sollen; z. B. $6 \times 8 = 48$, wird gelesen: 6 multiplicirt mit 8 ist gleich 48; eben so $9 . 4 = 36$; $7 . 6 = 42$ u. s. w.

Sind 3 oder mehrere Zahlen mit dem Multiplicationszeichen verbunden, so bedeutet es, daß das Product der vorhergehenden Zahlen immer mit der nachfolgenden zu multipliciren sey; z. B $2 . 4 . 9 = 8 . 9 = 72$.

Anmerkung. Die Anfänger müssen die Producte von zweyen Zahlen, wovon jede nur aus einer Ziffer besteht, welche man das Einmahleins nennt, wohl auswendig lernen, wenn sie im Multipliciren eine Fertigkeit erlangen wollen; und es gibt auch hier gewisse Regeln, die sich ein Ungeübter zu Nutzen machen kann; z. B. man wüßte nicht geschwind, wie viel 9 mahl 7 ist, so kehre man es um und sage 7 mahl 9, und es wird vielleicht geschwinder einfallen; oder man sage: 10 mahl 7 ist 70, 7 davon ist 63 u. dgl.

Das Einmahleins ist am besten aus folgender Tafel, welche der pythagorische Rechentisch genennt wird, zu erlernen.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Der Gebrauch ist folgender: z. B. man wollte das Product von 6mahl 7 wissen, so suche man einen Factor, z. B. 6 in der ersten verticalen Reihe, und den andern 7 in der obersten horizontalen Reihe, u. fahre mit dem Finger aus der ersten Reihe horizontal, und aus der andern vertical; und dort, wo beyde zusammentreffen, findet man das Product 42.

## §. 28.

Benannte Zahlen können nicht miteinander multiplicirt werden, wenn sie auch gleichnahmig sind; denn wären z. B. 6 Fl. mit 3 Fl. zu multipliciren, was sollte wohl das Product 18 bedeuten? Wohl aber kann man eine benannte Zahl mit einer unbenannten multipliciren, das heißt, man kann sie so vielmahl nehmen, als man will; z. B. 6 Fl. 3 mahl genommen gibt zum Producte 18 Fl.; 4 Kr. × 5 = 20 Kr. u. s. w.

## §. 29.

Grundsätze Nr. 1. Wenn man gleiche Größen mit gleichen multiplicirt, so sind die Producte gleich.

### Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 8 = 5 + 3 | 2 Gr. = 6 Kr. |
| 4 = 4 | 5 = 3 + 2 |
| also auch 8 . 4 = 5. 4 + 3 . 4 | also auch 2 Gr. × 5 = 6 kr. × 3 + 6 kr. × 2 |
| nähmlich 32 = 20 + 12 | nähmlich 10 Gr. = 18 kr. + 12 kr. das ist 10 Gr. = 30 kr. |

Man erhält also einerley Product, ob man alle Theile einer Größe, oder die ganze Größe mit einer andern Größe multiplicirt.

Nr. 2. Multiplicirt man aber gleiche Größen mit ungleichen, oder ungleiche Größen mit gleichen, so erhält man verschiedene Producte; und zwar dort größere, wo die Factoren größer sind.

## Beyspiele.

| | |
|---|---|
| $8 = 6 + 2$ | 1 Gr. > 2 Kr. |
| $4 > 3$ | 3 = 3 |
| also auch $8 . 4 > 6 . 3 + 2 . 3$ | also auch 3 Gr. > 6 Kr. |

### §. 30.

Sind nun zwey Zahlen mit einander zu multipliciren, wovon eine nur aus bloßen Einheiten, die andere aber aus mehreren Ziffern besteht, so beobachte man Folgendes:

1) Man schreibe den kleinern Factor unter den größern, und multiplicire damit zuerst die Einheiten, dann die Zehner, Hunderte, Tausende des andern Factors, und schreibe die Producte, wenn dieselben nur aus einer Ziffer bestehen, jedesmahl an eben dieselbe Stelle, so hat man das verlangte Product (§. 29, Grundsatz 1) wie es das Beyspiel Nr 1 zeiget.

2) Besteht aber ein Product aus zwey Ziffern, so setze man nur, wie bey der Addition, die erste Ziffer rechts, wenn es auch eine Null wäre, an dieselbe Stelle, und addire die andere zum folgenden Producte; nähmlich im Beyspiele Nr. 2 sagt man: 4 mahl 6 gibt 24 Einheiten, nähmlich 4 Einheiten, und 2 Zehner; man setze deßwegen die 4 Einheiten an ihre Stelle, und behalte die 2 Zehner in Gedanken (man kann selbe auch auf der Seite anmerken); ferner sage man: 4 mahl 7 gibt 28, und 2 geblieben Zehner dazu geben 30 Zehner, nähmlich keine Zehner, und 3 Hunderte; deßwegen setze man an die Stelle der Zehner eine 0, und behalte die 3 Hunderte wieder in Gedanken; ferner 4 mahl 1 gibt 4, und 3 geblieben gibt 7 Hunderte, und 4 mahl 8 gibt 32 Tausende.

3) Befindet sich im obern Factor eine Null, so muß auch im Producte eine Null gesetzt werden; wäre aber vom vorhergehenden Producte etwas geblieben, so wird solches an diese Stelle gesetzt, wie es aus dem Beyspiele Nr. 3 zu ersehen ist; indem man sagt: 4 mahl 8 gibt 32, 2 geschrieben, bleibt 3; 4 mahl 0 gibt 0, und 3 geblieben ist 3; 4 mahl 1 gibt 4; 4 mahl 0 gibt 0; und 4 mahl 5 gibt 20.

Beyspiele.

| Nr. 1. | 2341 |
|---|---|
| | 2 |
| Prod. | 4682 |

| Nr. 2. | 8176 |
|---|---|
| | 4 |
| Prod. | 32704 |

| Nr. 3. | 50108 |
|---|---|
| | 4 |
| Prod. | 200432 |

§. 31.

Ist eine Zahl mit 10 zu multipliciren, so hänge man nur hinten eine Null daran; denn dadurch erhält jede Ziffer einen zehnfachen Werth (§. 6 und 7), und folglich ist die ganze Zahl mit 10 multipliciret (§. 29, Grundsatz 1). Eben so wird eine Zahl mit 100 multiplicirt, wenn man hinten 2 Nullen anhängt; mit 1000, wenn man 3 Nullen anhängt u. s. w.

§. 32.

Wären aber zwey Zahlen, welche beyde aus mehreren bedeutlichen Ziffern bestehen, miteinander zu multipliciren, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man schreibe den kleinern Factor unter den größern, und multiplicire zuerst mit den Einheiten des untern Factors den ganzen obern Factor (§. 30).

2) Dann multiplicire man auch auf eben diese Art mit den Zehnern des untern Factors den ganzen obern Factor: wo aber die erste Ziffer dieses Products nicht mehr Einheiten, sondern Zehner bedeutet; denn im folgenden Beyspiele Nr. 1, im 2ten Producte sollte man eigentlich sagen: 20mahl 3 gibt 60, statt daß man abgekürzt sagt 2mal 3 gibt 6; eben deßwegen bedeutet die zweyte Ziffer dieses Productes Hunderte, die 3te Tausende u. s. w. Man schreibe daher dieses Product so unter das vorige, daß die erste Ziffer an die Stelle der Zehner zu stehen kömmt.

3) Auf eben diese Art multiplicire man mit den Hunderten des untern Factors den ganzen obern Factor, und schreibe dieses Product so unter die vorigen, daß die erste Ziffer, welche hier schon Hunderte bedeutet, an die Stelle der Hunderte zu stehen kömmt. Und so multiplicire man mit jeder Ziffer des untern Factors den ganzen obern Factor, und rücke das Product aus angeführter Ursache jedesmahl um eine Stelle weiter gegen die Linke.

4) Hat der untere Factor eine oder mehrere Nullen in der

Mitte, so überspringe man solche, und multiplicire nur mit den folgenden bedeutlichen Ziffern, rücke aber das Product um so viele Stellen weiter gegen die Linke, als man Nullen übersprungen hat; wie es das Beyspiel Nr. 2 zeiget.

5) Sodann addire man diese besondern, oder Partialproducte, so wie sie untereinander stehen, zusammen, und man erhält das wahre Product (§. 29, Grundsatz 1).

6) Hat einer oder beyde Factoren am Ende einige Nullen, so multiplicire man solche, als wenn die Nullen hinten nicht wären, und hänge an das Product rechts so viele Nullen an, als deren beyde Factoren zusammen haben; denn es ist im Beyspiele Nr. 3 (vermög §. 31), $320 \times 4600 = 32 \times 10 . 46 \times 100 = 32 . 46 . 1000$.

### Beyspiele.

| Nr. 1. | Nr. 2. | Nr. 3. |
|---|---|---|
| 4523 | 4809 | 4600 |
| 324 | 2006 | 320 |
| 18092 | 28854 | 92 |
| 9046 | 9618 | 138 |
| 13569 | 9646854 | 1472000 |
| 1465452 | | |

### §. 33.

Die beste Probe über die Multiplication ist, wenn man selbe noch einmahl wiederhohlet: und man könnte das zweyte Mahl die Factoren verwechseln, das heißt, jenen zum Multiplicator annehmen, der vorhin der Multiplicandus war. Erhält man nun einerley Product, so ist richtig multiplicirt worden.

Es wird zwar weiter hinten bey der Division noch eine Probe über die Multiplication gezeigt werden, die aber ebenfalls nicht leichter, als diese seyn wird.

### §. 34.

Einige Fragen zur Anwendung der Multiplication.

1. Frage: Wenn eine Klafter 6 Schuhe enthält, wie viel Schuhe machen 49 Klafter?

Antwort. $6 . 49 = 294$ Schuhe.

2. Frage: Ein Gulden hat 60 Kreuzer; wie viel Kr. machen 285 Fl. und 45 Kr.?

Antwort. $285 . 60 + 45 = 17145$ Kr.

3. Frage: Ein Schuh Länge von einem gewissen Bauholze kostet 45 Kr.; wie viel Kreuzer kostet nun ein Baum, welcher 5 Klafter und 4 Schuhe lang ist?

Antwort. 5 Klafter und 4 Schuhe machen 5 . 6 + 4 Schuhe = 34 Schuhe; mithin kostet der Baum 34 . 45 = 1530 Kr.

4. Frage: Wenn ein Soldat monathlich 3 Fl. bekömmt; wie viel bekommen 30 Soldaten in einem Jahre?

Antwort. 3 . 12 . 30 = 1080 Fl.

5. Frage: Es soll eine Mauer von Ziegelsteinen errichtet werden: der Länge nach kommen 2600, der Dicke nach 8, und der Höhe nach 150 Ziegeln zu liegen; wie viel Ziegeln braucht man hiezu?

Antwort. Da der Länge nach 2600, und der Dicke nach 8 Ziegeln liegen sollen, so kommen in einer Schichte 8 . 2600 = 20800 Ziegeln zu liegen; und da 150 solche Schichten übereinander liegen sollen, so kommen zur ganzen Mauer 150 . 20800 = 208 . 15 . 1000 = 3120000 Ziegeln.

Mehrere Beyspiele kann sich der Anfänger selbst leicht aufgeben.

---

# V. Abschnitt.

## Von der Division.

### §. 35.

Es kommt recht oft vor, daß man zu wissen nöthig hat, wie oft eine bekannte Zahl von einer andern bekannten abgezogen werden kann, bis nichts mehr übrig bleibt; oder welches einerley ist, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist; z. B. man möchte gern wissen, wie viel 48 Schuhe in Klaftern betragen, so kömmt es nur darauf an, daß man untersuche, wie oft 6 in 48 enthalten ist; weil 6 Schuhe = 1 Klafter ist.

Um nun dieses leichter, als durch eine öfters wiederhohlte Subtraction finden zu können, hat man eine besondere Rech-

nungsart eingeführt, welche die Division genennt wird. Dividiren heißt demnach untersuchen, wie oft eine gegebene Zahl in einer andern gegebenen enthalten ist. Die Zahl, welche dividirt werden soll, heißt der Dividendus; jene, durch welche dividirt wird, heißt der Divisor; und die zu suchende Zahl, welche anzeigt, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, wird der Quotient genannt. In unserm angeführten Beyspiele ist 48 der Dividendus, 6 der Divisor, und 8 der Quotient; weil 6 in 48, 8mahl enthalten ist.

§. 36.

Da der Quotient mit seinen Einheiten anzeiget, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist; so kann (vermög §. 26) der Dividendus als ein Product, wovon der Quotient und der Divisor die Factoren sind, angesehen werden; und es zeigt also auch der Divisor mit seinen Einheiten an, wie oft der Quotient im Dividendus enthalten ist; das heißt, wie viel Theile man aus dem Dividendus machen kann, deren jeder so groß, als der Quotient ist. Man kann demnach auch sagen: Dividiren heißt eine gegebene Zahl in so viele gleiche Theile zertheilen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten in sich enthält. 48 durch 6 dividiren heißt deßwegen auch, die Zahl 48 in 6 gleiche Theile theilen.

§. 37.

Das Zeichen der Division sind zwey aufrecht stehende Puncte, nähmlich: und wird ausgesprochen dividirt durch. Dieses Divisionszeichen, wo es zwischen zwey Zahlen, oder Größen steht, zeigt an, daß die links vor dem Zeichen stehende durch jene rechts nach dem Zeichen folgende Größe dividirt werden soll. Unser obenangeführtes Beyspiel wird demnach also geschrieben, $48 : 6 = 8$, und gelesen, 48 dividirt durch 6 ist gleich 8.

Man pflegt auch die Division durch einen horizontalen Strich, über welchem der Dividendus, und unter welchem der Divisor steht, anzudeuten; so heißt auch $\frac{28}{7} = 4$, nähmlich 28 dividirt durch 7 ist gleich 4.

§. 38.

Eine benannte Zahl kann durch eine andere gleichnahmig benannte Zahl dividirt werden; so ist z. B. 12 Pf. : 4 Pf. = 3, und es zeigt hier der Quotient an, wie oft 3 Pf. in 12 Pfunden enthalten sind. Auch kann eine benannte Zahl durch eine unbenannte dividirt werden; z. B. 15 Fl.: 3 = 5 Fl., und hier zeigt der Quotient an, wie groß jeder Theil wird, wenn man 15 Fl. in 3 gleiche Theile theilet; nicht aber kann eine unbenannte Zahl durch eine benannte, oder eine benannte Zahl durch eine gänzlich ungleichnahmige benannte dividiret werden.

§. 39.

Grundsätze. Nr. 1. Wenn man gleiche Größen durch Gleiches dividiret, so sind auch die Quotienten gleich.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 9 = 6 + 3 | 6 Gr. = 18 Kr. |
| 3 = 3 | 2 = 2 |
| also auch 9 : 3 = 6 : 3 + 3 : 3; | also auch 6 Gr. : 2 = 18 Kr. : 2 |
| nähmlich 3 = 2 + 1 | nähmlich 3 Gr. = 9 Kr. |

Es ist deßwegen auch einerley, ob man ein Ganzes oder jeden seiner Theile durch eine nähmliche Zahl dividiret.

Nr. 2. Dividirt man aber gleiche Größen durch Ungleiches, so sind die Quotienten ungleich, und zwar dort größer, wo der Divisor kleiner ist.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 12 = 9 + 3 | 2 Kl. = 12 Sch. |
| 4 > 3 | 2 < 3 |
| also auch 12 : 4 < 9 : 3 + 3 : 3 | also auch 2 Kl. : 2 > 12 Sch. : 3 |
| nähmlich 3 < 3 + 1 | nähmlich 1 Kl. > 4 Sch. |

Nimmt man daher bey ungeändertem Dividendus den Divisor 2, 3, 4 . . . *n* mahl größer, oder kleiner an, so wird der Quotient 2, 3, 4 . . . *n* mahl kleiner oder größer seyn.

Nr. 3. Dividirt man hingegen ungleiche Größen durch Gleiches, so ist dort der Quotient größer, wo der Dividendus größer ist.

## Beyspiele.

| | |
|---|---|
| 12 > 8 | 10 Gr. < 35 Kr. |
| 4 = 4 | 5 = 5 |
| also auch 12 : 4 > 8 : 4 | also auch 10 Gr. : 5 < 35 Kr. : 5 |
| nähmlich 3 > 2. | nähmlich 2 Gr. < 7 Kr. |

Nimmt man daher bey ungeändertem Divisor den Dividendus 2, 3, 4 . . . *n* mahl größer, oder kleiner an, so wird auch der Quotient 2, 3, 4 . . . *n* mahl größer, oder kleiner seyn.

### §. 40.

Wenn man bey einer Division den Dividendus und Divisor mit einer nähmlichen Größe multiplicirt oder dividirt, so bleibt der Quotient ungeändert.

Denn durch die Multiplication des Dividendus wird der Quotient vergrößert (§. 39, Nr. 3), und durch die Multiplication des Divisors wird der Quotient verkleinert (§. 39, Nr. 2). Wird nun der Dividendus und Divisor mit einer nähmlichen Zahl multiplicirt, so wird der Quotient eben so vielmahl vergrößert als verkleinert, und folglich bleibt er ungeändert. Eben so wird auch der Quotient durch die Division des Dividendus so vielmahl verkleinert, als er durch die Division des Divisors vergrößert wird, wenn beyde durch eine nähmliche Zahl dividirt werden, und folglich bleibt er ganz ungeändert.

### §. 41.

Wenn eine Zahl die kleiner als hundert ist, durch eine einfache Zahl dividirt werden soll, so ist der Quotient schon aus dem Einmahleins bekannt. Ist aber eine Zahl, die aus mehr als 2 Ziffern besteht, durch eine Zahl, die nur bloße Einheiten enthält, zu dividiren, so verfahre man auf folgende Art:

1) Man schreibe den Dividendus zur Linken, den Divisor zur Rechten, zwischen ihnen das Divisionszeichen, und hinter dem Divisor setze man das Gleichheitszeichen, nach welchem der Quotient zu stehen kömmt.

2) Dann untersuche man, wie oft der Divisor in der ersten links stehenden Ziffer des Dividendus, oder wenn diese kleiner ist als der Divisor, in den zwey ersten Ziffern des Dividendus

enthalten sey; (im Beyspiele Nr. 1 sagt man: 4 in 9 geht 2 mahl) diesen gefundenen Theil des Quotienten schreibe man hinter das Gleichheitszeichen, multiplicire damit den Divisor, schreibe das Product unter jene Ziffer des Dividendus, in welche man dividirt hat, und zieht es davon ab (man sagt in unserm Beyspiele 2 mahl 4 gibt 8; 8 von 9 bleibt 1.)

3) zu dem Reste (1) hänge man die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (4) rechts an (14), und dividire dieses wieder durch den Divisor; (4 in 14 geht 3 mahl); den Quotienten hänge man an den schon gefundenen Theil an, multiplicire damit den Divisor, und ziehe das Product wieder von den Ziffern ab, in welche man dividirt hat; (3 mahl 4 gibt 12; 12 von 14 bleiben 2). Zu dem Reste setze man wieder die nächstfolgende Ziffer des Dividendus (8) herunter, und dividire solches wieder durch den Divisor (4 in 28 geht 7 mahl), den Quotienten wieder an den schon gefundenen angehängt, den Divisor damit multiplicirt, und das Product wieder abgezogen u. s. w.

4) Bleibt irgendwo gar kein Rest übrig, wie im Beyspiele Nr. 2, so wird die folgende Ziffer des Dividendus allein herunter gesetzt, und wie vorhin dividirt; wäre sie aber kleiner als der Divisor, so muß zuerst in dem Quotienten eine Null angesetzt werden; sodann wird die folgende Ziffer des Dividendus noch herunter gesetzt, und wieder wie vorhin dividirt, wie es im Beyspiele Nr. 3 zu ersehen ist.

5) Hat man nun auf diese Art alle Ziffer des Dividendus schon herunter gesetzt, und es ist bey der letzten Subtraction gar nichts übrig geblieben, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor in dem Dividendus genau enthalten sey; und zwar so oft, als der Quotient Einheiten in sich enthält; so ist im Beyspiele Nr. 1 der Divisor, 4 in 948 genau 237 mahl enthalten. Sollte aber bey der letzten Subtraction noch ein Rest übrig bleiben, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor im Dividendus nicht genau enthalten sey. So bleibt im Beyspiele Nr. 3 bey der letzten Subtraction noch der Rest 2 übrig, welcher anzeigt, daß noch 2 durch 7 zu theilen übrig bleiben. In einem solchen Falle schreibt man den Rest ober einen Strich, unter welchen der Divisor zu

stehen kömmt, und hängt diese angezeigte Division, welche man einen Bruch nennt, mit etwas kleinern Ziffern geschrieben, an den Quotienten an, zum Zeichen, daß der Quotient noch um etwas, welches aber keine ganze Einheit mehr betragen kann, vermehrt werden muß. Wie viel aber dieser Bruch betrage, wird weiter unten, bey der Lehre von Brüchen, gezeigt werden.

### Beyspiele.

**Nr. 1.**

948 : 4 = 237.

8
14
12
28
28
0

**Nr. 2.**

1575 : 5 = 315.

15
7
5
25
25
0

**Nr. 3.**

1444 : 7 = 206$\frac{2}{7}$.

14
44
42
2

Daß man durch dieses Verfahren den richtigen Quotienten erhalte, ist aus (§. 39, Grundsatz 1) leicht zu begreifen; weil man durch dieses Verfahren, die Einheiten, Zehner, Hunderte, Tausende des Dividendus, jede insbesondere, vom Höchsten angefangen, dividiret, und den Rest jedesmahl zum Nächstkleinern addiret.

Anmerkung. In der Ausübung pflegt man gemeiniglich die Division, wenn der Divisor nur aus einer Ziffer besteht, zu verrichten, indem man jedesmahl den Quotienten mit dem Divisor in Gedanken multiplicirt, das Product von dem betreffenden Dividendus abzieht, und den Rest oberhalb ansetzt: z. B.

3152
15776 : 6 = 2629$\frac{2}{3}$

da man sagt: 6 in 15 geht 2 mahl; 2 mahl 6 ist 12; 12 von 15 bleiben 3; 6 in 37 geht 6 mahl; 6 mahl 6 ist 36; 36 von 37 bleibt 1; 6 in 17 geht 2 mahl; 2 mahl 6 ist 12; 12 von 17 bleiben 5; 6 in 56 geht 9 mahl; 9 mahl 6 ist 54; 54 von 56 bleiben 2.

## §. 42.

Besteht aber auch der Divisor aus mehreren Ziffern, so beobachte man folgende Regeln:

1) Man ordne die Division wie im vorigen (§. 41), und

dividire mit der ersten linken Ziffer des Divisors in die erste, oder wenn diese zu klein ist, in die zwey ersten Ziffern des Dividendus; die gefundene Ziffer setze man an die Stelle des Quotienten hin, multiplicire damit den ganzen Divisor: das Product schreibe man unter so viel Ziffern des Dividendus, als der Divisor Ziffern hat, wenn die erste Ziffer des Divisors kleiner ist, als jene des Dividendus, wie im Beyspiele Nr. 4; hätte man aber die zwey ersten Ziffern des Dividendus dividiren müssen, wie im Beyspiele Nr. 5, so muß auch das Product um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt werden; sodann ziehe man dieses Product gehörig ab.

2) Zu dem Reste setze man die folgende Ziffer des Dividendus herab, und dividire solchen wieder durch den Divisor; wenn er aber nicht darin enthalten ist, wie im Beyspiele Nr. 5, so hänge man im Quotienten eine Null an, setze noch eine Ziffer des Dividendus herunter, und dividire sodann wie in 1) mit dem Divisor hinein, und setze die gefundene Ziffer an die folgende Stelle im Quotienten. Mit dieser gefundenen Ziffer des Quotienten multiplicire man wieder den ganzen Divisor, ziehe das Product gehörig ab, und setze abermahl eine Ziffer zum Reste herunter u. s. w.

3) Sollte sich ereignen, daß irgendwo ein Product zu groß ist, und von den Ziffern, in welche man dividirt hat, nicht abgezogen werden kann; so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden, und solcher muß daher vermindert werden. Wäre hingegen nach geschehener Subtraction der Rest noch größer als der Divisor, so ist es ein Zeichen daß der Quotient zu klein angenommen worden ist, und solcher muß daher größer gemacht werden; worauf jedesmahl zu sehen ist, weil nicht allezeit der ganze Divisor so oft im ganzen Dividendus, als die erste Ziffer des Divisors in jener des Dividendus enthalten ist.

4) Hat man nun auf diese vorgeschriebene Art alle Ziffern des Dividendus schon heruntergesetzt, so ist die Division vollendet und man muß nur dem etwa noch vorhandenen Reste den Divisor unterschreiben, und nach (§. 41. Nr. 5) an den Quotienten anhängen, wie im Beyspiele Nr. 5 zu ersehen ist.

## Beyspiele.

**Nr. 4.**

738364 : 2134 = 346
6402

9816
8536

12804
12804

**Nr. 5.**

25882891 : 4257 = $6080\frac{331}{4257}$
25542

34089
34056

331

5) Ist eine Zahl durch 10 zu dividiren, so schneide man rechts eine Ziffer ab; dadurch wird jede Ziffer des Dividendus 10 mahl kleiner (§. 6), und folglich ist die ganze Zahl durch 10 dividirt (§. 39, Grundsatz 1); eben so wird eine Zahl durch 100 dividirt, wenn man zwey —, durch 1000, wenn man drey Ziffern u. s. w. rechts abschneidet; die abgeschnittenen Ziffern aber müssen, wenn es keine Nullen sind, als der Rest mit dem unterschriebenen Divisor an den Quotienten, wie vorhin, angehängt werden; z. B. 6837 Pf. wie viel Centner machen sie? Antwort: $6837 : 100 = 68\frac{37}{100}$ Centner.

6) Haben beyde, Divisor und Dividendus, am Ende einige Nullen, so schneide man von beyden gleichviel Nullen ab, und dividire sodann nach den vorigen Regeln; dadurch werden beyde, Divisor und Dividendus, durch eine nähmliche Zahl dividirt; daher verbleibt der Quotient ungeändert. (§. 40.) Z. B. 36000 : 600 = 360 : 6 = 60.

7) Hat aber nur der Divisor allein am Ende Nullen, so schneide man von dem Dividendus rechts so viel Ziffern ab, als der Divisor am Ende Nullen hat, und dividire die übrigen durch die bedeutlichen Ziffern des Divisors; dem Reste aber werden die abgeschnittenen Ziffern wieder angehängt, und der ganze Divisor unterschrieben; denn es ist z. B.

$2367 : 400 = (2300 + 67) : 400 = 2300 : 400 + \frac{67}{400} =$
$23 : 4 + 67 : 400 = 5 + \frac{3}{4} + \frac{67}{400} = 5 + \frac{300}{400} + \frac{67}{400} = 5\frac{367}{400}.$

Anmerkung. Man pflegt auch öfters die Division zu ordnen, indem man den Divisor links, den Dividendus in der Mitte, und den Quotienten rechts ansetzt, und alle drey durch Striche von einander absondert; übrigens aber die Division nach

eben den gegebenen Gründen verrichtet, wie im nachstehenden Beyspiele zu ersehen ist.

| Divis. | Divid. | Quotient. |
|---|---|---|
| 24 | 38567 | $1606\frac{23}{24}$ |
| | 24 | |
| | 145 | |
| | 144 | |
| | 167 | |
| | 144 | |
| | 23 | |

Bey der wirklichen Anwendung der Rechenkunst ist es am vortheilhaftesten, die Division jederzeit so anzusetzen, wie es in diesem letzten Beyspiele geschehen ist, weil man auf diese Art weniger Platz dazu braucht, und es fast allenthalben so gebräuchlich ist.

## §. 43.

In den Rechnungen, wo mehrere Zahlen durch eine nähmliche Zahl dividirt, oder auch multiplicirt werden sollen, kann man sich die Arbeit um Vieles erleichtern, wenn man sich die Vielfachen dieser Zahl bis zum Neunfachen in eine Tafel einträgt: hierdurch kann man nicht nur jedesmahl den Theil des Quotienten richtig bestimmen, sondern man ersparet auch das jedesmahlige Multipliciren, weil man das betreffende Product nur aus der Tafel heraus schreiben darf; z. B. es wären mehrere Zahlen durch 864 zu dividiren, so verfertige man sich nachstehende Tafel.

| | |
|---|---|
| 1 fach | 864 |
| 2 — | 1728 |
| 3 — | 2592 |
| 4 — | 3456 |
| 5 — | 4320 |
| 6 — | 5184 |
| 7 — | 6048 |
| 8 — | 6912 |
| 9 — | 7776 |

Es sey nun die Zahl 2511648 durch 864 zu dividiren, so sieht man aus der Tafel, daß die

2511648 : 864 = 2907.

1728

7836

7776

6048

6048

0

erste Ziffer des Quotienten nicht 3, sondern 2 seyn muß; weil bey 3 das Product 2592 größer ist als 2511, in welches man dividiret; man schreibe deßwegen im Quotienten 2,

und ziehe das Product aus der Tafel bey 2, nähmlich 1728 gehörig ab, setze die folgende Ziffer herunter u. s. w.

§. 44.

Da man nach (§. 36) den Dividendus als ein Product ansehen kann, wovon der Quotient und der Divisor die Factoren sind, so kann die Division am besten geprüft werden, wenn man den Quotienten mit dem Divisor multipliciret, und den etwa gebliebenen Rest zum Producte addiret; kömmt nun der Dividendus zum Vorschein, so ist die Division gut verrichtet worden. Und so kann man auch umgekehrt die Multiplication durch die Division, prüfen, wenn man das Product durch den einen Factor dividirt, wo dann der andere Factor zum Vorschein kommen muß; allein, da die Division etwas beschwerlicher als die Multiplication ist, so wird Mancher lieber die Multiplication durch die Wiederhohlung, wie im (§. 33) gesagt worden, prüfen.

§. 45.

Einige Fragen zur Anwendung der Division.

1. Frage. Wenn 8 Personen 1248 Fl. unter sich gleich vertheilen sollen, wie viel bekömmt jede?

Antwort. 1248 Fl. : 8 = 156 Fl.

2. Frage. Eine Klafter hat 6 Schuhe, und der Schuh 12 Zolle; wie viel betragen also 23400 Zoll in Klaftern?

Antwort. 23400 Z.: 12 = 1950 Sch., und 1950 Sch.: 6 = 325 Kl.

3. Frage. Ein Jahr hat 31556928 Secunden, wie viel macht dieses Tage, Stunden, Minuten und Secunden aus?

Antwort. Da 60 Secunden eine Minute ausmachen, so sind 31556928 Sec.: 60 = 525948 Min. + 48 Sec.; ferner, da 60 Minuten eine Stunde ausmachen, so sind 525948 Min.: 60 = 8765 St. + 48 Min.; endlich sind 8765 St. : 24 = 365 Tage + 5 St.; folglich hat das Jahr 365 T. + 5 St. + 48 M. + 48 Sec.

4. Frage. Es sollen 270000 Ziegelsteine in einen Haufen geschichtet werden: in jeder Schichte sollen der Länge nach, 150, der Breite nach aber 60 Ziegel zu liegen kommen, wie viel müssen solche Schichten aufeinander gelegt werden?

Antwort. Da der Länge nach 150, und der Breite nach 60 liegen ſollen, ſo kommen in eine Schichte 150 . 60 = 9000, und folglich 270000 : 9000 = 30 Schichten.

5. Frage. Wenn man zu einer Montur 6 Ellen Tuch braucht; wie viele Montirungen wird man aus 20 Stücken von dieſem Tuche liefern können, wenn jedes Stück 36 Ellen hat?

Antwort. Da in einem Stück Tuch 36 Ellen ſind, ſo haben 20 Stück 36 . 20 = 720 Ellen; und weil man zu jeder Montur 6 Ellen braucht, ſo bekommt man von allen dieſen Ellen 720 : 6 = 120 Montirungen.

---

# VI. Abſchnitt.

## Von den Rechnungsarten mit ungleichnahmigen Zahlen, welche gleichnahmig gemacht werden können.

### §. 46.

Durch die bisher gezeigten vier Rechnungsarten können nun auch ungleichnahmige Zahlen, welche auf gleichen Nahmen gebracht werden können, addirt, ſubtrahirt, multiplicirt und dividirt werden, wenn man ſie vorher auf gleiche Nahmen, und zwar auf Einheiten der kleinſten Gattungen bringet, wie in einigen Beyſpielen (§. 34) gezeigt worden iſt; z. B. es wären 3 Kl. 5 Sch. 9 Zoll zu addiren zu 4 Kl. 4 Sch. und 8 Zoll; ſo ſind 3 Kl. + 5 Sch. + 9 Z. = 285 Z., und 4 Kl. + 4 Sch. + 8 Z. = 344 Z.; folglich iſt die Summe 285 + 344 = 629 Zoll; welches wieder zu Klaftern, Schuhen und Zollen gebracht werden kann, wie es in einigen Beyſpielen (§. 45) gezeigt worden iſt.

Allein man hat auch hier eine beſondere Art eingeführet, durch welche man geſchwinder zum Zwecke kömmt: es iſt aber vorher bey einem wie beym andern nothwendig, daß man bey den Rechnungen, wo ſolche ungleichnahmige Zahlen vorkommen, die Eintheilung wiſſe, wie viel eine Einheit der größeren Gattung Einheiten der nächſt kleinern Gattung enthält.

Da aber nicht nur diese Eintheilungen selbsten, besonders der Gewichte, Längenmaßen und Münzen fast in jedem Lande verschieden sind, sondern auch unter einem nähmlichen Nahmen in verschiedenen Ländern ganz ungleiche Dinge verstanden werden (so ist z. B. ein Kaisergulden = 60 Kaiserkreuzer, ein Reichsgulden = 50 Kaiserkreuzer, ein pohlnischer Gulden = 15 Kaiserkreuzer u. s. w.), so wollen wir uns hier bloß an die in Österreich eingeführten Eintheilungen halten, welche aus folgenden Tabellen zu ersehen sind.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | Grän. | Quinten. | | | | | | |
| | | | | Quintl. | 60 | 12 | Punct. | | | | | |
| | | | Lothe. | 4 | 240 | 144 | 12 | Linien. | | | | |
| | | Unzen. | 2 | 8 | 480 | 1728 | 144 | 12 | Zolle. | | | |
| | Pfunde. | 16 | 32 | 128 | 7680 | 20736 | 1728 | 144 | 12 | Schuhe. | | |
| 1 Z. | 100 | 1600 | 3200 | 12800 | 768000 | 124416 | 10368 | 864 | 72 | 6 | 1 K. | |

| | | | | | Heller. | Terzen. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Pfennig. | 2 | 60 | Secunden. | | | | |
| | | | Kreuzer. | 4 | 8 | 3600 | 60 | Minuten. | | | |
| | | Groschen. | 3 | 12 | 24 | 216000 | 3600 | 60 | Stunden. | | |
| 1 Gulden. | 20 | 60 | 240 | 480 | 5184000 | 86400 | 1440 | 24 | 1 Tag. | | |

Große Entfernungen werden durch Meilen gemessen, eine österreichische Meile ist genau = 4000 Wiener-Klafter; oder 10000 militärische Schritte; eine halbe Meile nennt man eine Stunde Weges.

Getränke, als Wein, Bier u. dgl. werden hier durch Eymer gemessen. Ein Eymer enthält 40 Maß, und eine Maß 4 Seitel. Beym Weine pflegt man 10 Eimer ein Faß, und 30 Eymer einen Dreyling zu nennen.

Getreide wird nach Metzen gemessen; ein Metzen wird abgetheilt in den halben, viertel und achtel Metzen.

Kalk mißt man mit Mittel; ein Kalkmittel enthält 2 und einen halben Metzen.

Kohlen werden mit Stibich gemessen; ein Stibich ist 2 Metzen.

Bey Dingen, die nach der Zahl verkauft werden, pflegt man 12 ein Dutzend, 15 eine Mandel, 30 einen Schilling, 60 ein Schock zu nennen.

Beym Papier machen 24 Bogen ein Buch, 20 Buch einen Riß, und 10 Riß einen Ballen. Beym Druckpapier machen 25 Bogen ein Buch.

Es wird aber weiter hinten bey der Lehre von den Proportionen auch gezeigt werden, wie die verschiedenen Maßen und Gewichte eines Landes in ähnliche von einem andern Lande verwandelt werden können.

## §. 47.

Sind nun solche ungleichnahmige Zahlen, welche auf gleichen Nahmen gebracht werden können, zu addiren, so ordne man selbe so, daß alle diejenigen, welche gleichen Nahmen haben, untereinander, und die von der kleinsten Gattung rechts zu stehen kommen, dann fange man bey der kleinsten Gattung zu addiren an; enthält nun die Summe davon einige Einheiten der größern Gattung, so dividire man selbe durch die Zahl, welche eine Einheit der größern Gattung ausmacht; den Rest schreibe man unter die addirte Stelle, und den Quotienten zähle man zur folgenden Gattung; und eben so fahre man nun weiter gegen die Linke von Gattung zu Gattung fort, wie es folgende Beyspiele zeigen.

### Beyspiele.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 Fl. | 12 Gr. | 2 Kr. | 3 Dr. | |
| 10 = | 18 = | 1 = | 2 = | |
| 2 = | 17 = | 2 = | 3 = | |
| 26 = | 9 = | 1 = | 1 = | |
| 48 Fl. | 18 Gr. | 2 Kr. | 1 Dr. | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 22 St. | 45 Min. | 27 Sec. | |
| 13 = | 14 = | 30 = | |
| 6 = | 0 = | 20 = | |
| 42 St. | 0 Min. | 17 Sec. | |

Im ersten Beyspiele sagt man: 1 und 3, und 2 und 3 sind 9 Pfen., das ist 2 Kr. und 1 Dr. (weil 4 in 9, 2 mahl enthalten ist); 1 Dr. wird angesetzt, und 2 Kr. zur folgenden Stelle addirt: 2 und 1, und 2, und 1, und 2 sind 8 Kr., das sind 2 Gr. und 2 Kr. (weil 3 in 8, 2 mahl enthalten ist); darum werden die 2 Kr. an die Stelle der Kreuzer gesetzt, und die 2 Gr. wieder zur Stelle der Groschen addirt, nähmlich 2 + 12 + 18 + 17 + 9 = 58 Gr. = 2 fl. und 18 Gr. (weil 20 in 58 zweymahl

enthalten ist, und noch 18 zum Reste läßt); also 18 wieder an die Stelle der Groschen gesetzt; endlich ist 2 + 8 + 10 + 2 + 26 = 48 Fl.

§. 48.

Sollen solche Zahlen voneinander abgezogen werden, so ordne man selbe wie bey der Addition (§. 47), fange von der kleinsten Gattung an, und subtrahire jede Gattung insbesondere. Ereignet sich aber, daß irgendwo bey einer Gattung die obere Zahl kleiner ist, als die abzuziehende, so borge man von der nächstfolgenden Gattung eine Einheit, vermehre sodann die Zahl um so viel, als die ausgeborgte Einheit Einheiten dieser Gattung enthält, und verrichte die Subtraction.

Beyspiele.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Von 36 Fl. | 4 | Kr. | 3 | Dr. | | Von 13 St. | 0 | M. | 0 | Sec. | |
| abzuziehen 9 | = | 16 | = | 1 | = | abzuziehen 10 | = | 29 | = | 40 | = |
| Diff. 26 Fl. | 48 | Kr. | 2 | Dr. | | Diff. 2 St. | 30 | M. | 20 | Sec. | |

In dem ersten Beyspiele können 16 Kr. von 4 Kr. nicht abgezogen werden; man borge deßwegen einen Gulden, dieser macht 60 Kr. also hat man 64 Kr.; 16 davon bleiben 48 Kr. Eben so muß im zweyten Beyspiele von 13 St. 1 geborgt werden: dieses an die Stelle der Minuten getragen gibt 60 Min.; dann wieder 1 davon geborgt, und an die Stelle der Secunden getragen, gibt 60 Sec.; wo sodann die Subtraction verrichtet werden kann.

§. 49.

Wenn ungleichnahmige Zahlen, die auf einerley Nahmen gebracht werden können, mit einer unbenannten Zahl multiplicirt werden sollen, so fange man wieder bey der kleinsten Gattung zu multipliciren an, und ziehe aus dem Producte die etwa darin enthaltenen Einheiten der größern Gattung durch die Division heraus, und addire solche zum folgenden Producte, der Rest aber wird an die Stelle gesetzt; und so auch bey den übrigen Gattungen.

Beyspiele.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24 Kl. | 5 | Sch. | 7 | Zoll | | 6 Cent. | 24 | Pf. | 18 | Loth | |
| multiplicirt mit | | | 4 | | | multiplicirt mit | | | 9 | | |
| 99 Kl. | 4 | Sch. | 4 | Zoll | | 56 Cent. | 21 | Pf. | 2 | Loth | |

Im ersten Beyspiele sagt man: 4 mahl 7 sind 28 Zoll, nähmlich 2 Sch. und 4 Zoll (weil 12 in 28, 2 mahl enthalten ist); man setzt deßwegen 4 Zoll an die Stelle der Zolle, und behält die 2 Schuh auf die künftige Stelle; ferner 4 mahl 5 sind 20, und 2 geblieben sind 22 Schuhe, nähmlich 3 Kl. und 4 Sch. u. s. w.

Es kann allhier auch noch erinnert werden, daß man öfters die Klaftern mit dem auf die Ziffern Rechts oberhalb angesetzten Zeichen $^{0}$, mit $^{I}$ die Schuhe, mit $^{II}$ die Zolle, mit $^{III}$ die Linien, mit $^{IV}$ die Puncten, und mit $^{V}$ die Quinten zu bezeichnen pflegt; so schreibt man z. B. $5^{0}$, $4^{I}$, $9^{II}$, $10^{III}$, $7^{IV}$, $11^{V}$ anstatt 5 Klafter, 4 Schuhe, 9 Zolle, 10 Linien, 7 Puncten, und 11 Quinten.

## §. 50.

Sollen dergleichen ungleichnahmige Zahlen, die auf einen gleichen Nahmen gebracht werden können, durch eine unbenannte Zahl dividirt, das heißt in eine gegebene Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so fange man bey der größten Gattung zu dividiren an, und den Rest addire man jederzeit zur nächst kleinern Gattung, wo man solchen vorher auf Einheiten dieser Gattung bringt, so erhält man den richtigen Quotienten.

### Beyspiele.

($10^{0}$, $55^{I}$, $9^{II}$, $8^{III}$): $4 = 2^{0}$, $4^{I}$, $5^{II}$, $5^{III}$.

(25 St. 8 Min. 30 Sec.): 6 = 4 St. 11 Min. 25 Sec.

Im ersten Beyspiele sagt man: 4 in 10 geht 2 mahl, und es bleiben noch $2^{0}$ übrig; diese zu Schuhen gemacht geben $12^{I}$, und zu $5^{I}$ addirt sind $17^{I}$; 4 in 17 geht 4 mahl u. s. w.

## §. 51.

Wären aber solche ungleichnahmige Zahlen wieder durch derley Zahlen, die mit ihnen gleichnahmig gemacht werden können, zu dividiren; nähmlich zu untersuchen, wie oft diese in jenen enthalten sind, so bringe man beyde auf die kleinste Gattung, damit beyde gleichnahmig werden, und verrichte sodann die Division, als wenn es unbenannte Zahlen wären.

### Beyspiele.

(12 Fl. 18 Kr. 2 Dr.): (1 Fl. 45 Kr. 2 Dr.)
= 2954 Dr.: 422 Dr. = 7 mahl.

($11^{0}$, $4^{I}$): ($5^{I}$, $10^{II}$) = $840^{II}$: $70^{II}$ = 12 mahl.

3 Centner: 18 Loth = 9600 L.: 18 L. = $533\frac{6}{18}$.

# VII. Abschnitt.

## Von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

### §. 52.

Die Ziffern oder Zahlenzeichen, obwohl man durch solche jede Gattung der Größen vorstellen kann, sind doch noch zu eingeschränkt, um damit allgemeine Rechnungen anlegen zu können, die für jeden ähnlichen Fall gelten sollen; z. B. durch 5 kann ich nur 5 Menschen, 5 Gulden, 5 Pfunde, aber keineswegs fünf, acht, eilf oder wie viel immer entweder Menschen oder Gulden oder Pfunde, und dergleichen bezeichnen. Man müßte daher die Rechnung so oft von neuem anfangen, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht würde; ja es gibt Rechnungen, die durch bloße Zahlzeichen entweder gar nicht, oder mit äußerster Schwierigkeit sich verrichten lassen. Man war deßwegen auf allgemeinere Zeichen bedacht, durch welche man nicht nur jede Gattung der Größen, sondern auch jede Menge der Einheiten sich vorstellen kann; und man hat hierzu das kleine lateinische Alphabet gewählet, weil es den meisten Völkern in Europa bekannt ist; durch $a$ z. B. kann man 5, 8 oder 11 Menschen, 5, 11 oder 20 Gulden, 5, 10 oder 100 Pfunde u. s. w. vorstellen; und so auch durch $b$, $c$, $d$ . . . $x$, $y$, $z$: nur muß jeder Buchstab den Werth, den man ihm beym Anfange einer Rechnung beylegt, durch die ganze Rechnung beybehalten.

Zuweilen werden auch die großen Buchstaben dieses Alphabets genommen, $A$, $B$, $C$ . . . $X$, $Y$, $Z$; auch bedienen sich einige Schriftsteller der griechischen Buchstaben, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ . . . $\pi$, $\varphi$, $\psi$, $\omega$.

### §. 53.

Die Wissenschaft mit Buchstaben zu rechnen, wird die allgemeine Rechenkunst, oder die Algebra genannt. Hierdurch wird die Arithmetik in zwey Theile, nähmlich in die Zahlen-Rechenkunst, oder die gemeine Arithmetik, und in

die Buchstaben-Rechenkunst, oder die allgemeine Arithmetik eingetheilet.

§. 54.

Bey den Rechnungsarten mit Buchstaben bedienet man sich der nähmlichen Zeichen, wie bey der Zahlenrechnung; so bedeutet $a + b$, daß der Werth von $a$ zum Werthe von $b$ addirt werden soll; eben so heißt $a + b + c + 5$, daß die Werthe der Buchstaben $a$, $b$, $c$, zusammen addiret, und die Summe davon noch um 5 vermehrt werden soll.

Soll ein Buchstab von einem andern Buchstaben, oder von einer Zahl, oder auch eine Zahl von einem Buchstaben abgezogen werden, so verbindet man selbe durch das Subtractionszeichen (§. 21), als $a - b$, $a - 20$, $56 - a$; eben so bedeutet $(a + b) - (a + c)$, daß die Summe aus $a$ und $c$ von der Summe aus $a$ und $b$ abgezogen werden soll; z. B. es wäre $a = 30$, $b = 20$, und $c = 8$; so ist der angeführte Ausdruck $(a + b) - (a + c)$ eben so viel als $(30 + 20) - (30 + 8) = 50 - 38 = 12$.

§. 55.

Sind Buchstaben miteinander zu multipliciren, z. B. $a$ mit $b$, so schreibt man $a \times b$, oder $a . b$; meistens aber werden die einzelnen Buchstaben, die mit einander zu multipliciren sind, ohne alle Zeichen dicht aneinander geschrieben, nähmlich $ab$; eben so ist $abcd$ das Product der vier Factoren $a$, $b$, $c$ und $d$; ingleichen bedeutet auch $(a + b) . (b - c)$, daß die Summe von $a$ und $b$, mit der Differenz von $b$ und $c$ multiplicirt werden soll; z. B. es sey $a = 8$, $b = 5$, $c = 3$, so ist der angeführte Ausdruck $= (8 + 5)\ (5 - 3) = 13 . 2 = 26$.

Kömmt ein Buchstab einigemahl mit sich selbst zu multiplicirен, so pflegt man Kürze halber den Buchstaben nur einmahl zu schreiben, und ober demselben rechts eine Zahl zu setzen, welche anzeiget, wie oft dieser Factor eigentlich stehn sollte; so schreibt man z. B. $a^4$ anstatt $aaaa$; eben so $a^3 b^2 c$, anstatt $aaabbc$. Die Zahlen, welche über den Buchstaben stehen, werden hier Exponenten genannt; und dort, wo keine Zahl ausdrücklich angesetzt ist, wird jederzeit ein 1 darunter verstanden; so ist im

letzten Beyspiele ($a^3 b^2 c$) 3 der Exponent von $a$, 2 der Exponent von $b$, und 1 der Exponent von $c$. Das Product $a^3 b^2 c$ wird gelesen: $a$ der 3ten, $b$ der 2ten, $c$; und $x^n$ heißt, $x$ der $n$ten (Potenz).

Auch die Zahlen, wenn selbe mit Buchstaben multiplicirt werden sollen, werden ohne Zeichen, dicht an die Buchstaben vorwärts angeschrieben; z. B. $3a$ heißt $a$ soll mit 3 multiplicirt werden, oder welches einerley ist, $a$ soll 3 mahl genommen werden; es ist also $3a = a + a + a$; ingleichen $4bx = bx + bx + bx + bx$. Eben so heißt auch $3a(bc - x)$, daß 3 mit $a$ und mit $(bc - x)$ multiplicirt werden soll; z. B. es wäre $a = 5$, $b = 7$, $c = 2$, und $x = 8$; so ist der angeführte Ausdruck $= 3 . 5 . (7 . 2 - 8) = 15\ (14 - 8) = 15 . 6 = 90$. Die Zahlen, welche vor den Buchstaben ohne Zeichen stehen, werden hier Coefficienten genennt; z. B. in dem Ausdrucke $3a$ ist 3 der Coefficient von $a$; in dem Ausdrucke $8bx$ ist 8 der Coefficient von $bx$ u. s. w. Hat ein Buchstab keine Zahl vor sich, so kann man sich den Coefficienten 1 hingedenken, weil z. B. $ab = 1ab$ ist.

Die Anfänger müssen sich wohl hüthen, die Coefficienten mit den Exponenten zu verwechseln; denn, um den Unterschied zwischen $3a$, und $a^3$ deutlicher einzusehen, sey $a = 4$, so ist $3a = 3 . 4 = 12$; und $a^3 = 4 . 4 . 4 = 16 . 4 = 64$.

## §. 56.

Soll endlich eine mit Buchstaben geschriebene Größe wieder durch Buchstaben, oder durch eine Zahl, oder auch eine Zahl durch Buchstaben dividirt werden, so verbinde man selbe gehörig durch das Divisionszeichen; z. B. $a : b$, oder $\frac{a}{b}$ heißt, es soll der Werth von $a$ durch den Werth von $b$ dividirt werden; eben so heißt $\frac{a-b}{3}$, man soll $b$ von $a$ abziehen, und die Differenz durch 3 dividiren; ingleichen $\frac{a+x}{b-c}$ heißt, man soll die Summe von $a$ und $x$ durch die Differenz von $b$ und $c$ dividiren.

Noch kommt hier zu erinnern, daß die Buchstaben in Betreff der Stelle, wo sie stehen, gar keinen solchen Rang haben,

wie die Ziffern im §. 6 und 7; es ist nähmlich einerley, ob man schreibt $a+b+c$, oder $a+c+b$, oder $b+a+c$ u. s. w.; so wie es auch einerley ist, ob man schreibt $abc$, $acb$, $bca$..; denn es sey z. B. $a=4$, $b=7$, und $c=3$, so ist $4+7+3=3+4+7=14$; und $4.7.3=7.3.4=84$; wohl aber ist $a-b$ von $b-a$ zu unterscheiden; denn das erste heißt, man soll $b$ von $a$, und das andere, man soll $a$ von $b$ abziehen. Eben so muß auch $a:b$ von $b:a$ unterschieden werden, weil im ersten Falle $a$ durch $b$, und im andern $b$ durch $a$ dividirt wird.

Anmerkung. Den Anfänger darf es nicht befremden, daß man mit Buchstaben rechnet, da man doch noch nicht weiß, was jeder Buchstab für einen Werth habe; denn derselbe darf sich nur erinnern, daß man mit den unbenannten Zahlen und Ziffern auch alle Rechnungsarten anstellet, ohne noch zu wissen, welche Größen als Einheiten zum Grunde liegen.

## §. 57.

Jeder durch Buchstaben angeschriebene Ausdruck wird überhaupt eine algebraische Größe genennt; und zwar heißt solche eine einfache, oder einnahmige algebraische Größe, wenn sie nur aus einem, oder auch aus mehreren Buchstaben besteht, welche nicht durch die Zeichen + und — aneinander hängen; so sind z. B. die Größen $3a$, $14ab$, $\frac{abd}{c}$ einnahmige algebraische Größen. Besteht aber eine Größe aus mehreren Theilen, die durch die Zeichen + und — verbunden sind, so ist sie eine mehrnahmige algebraische Größe und zwar: sie ist eine zwey-, drey-, viernahmige Größe, wenn sie aus 2, 3, 4... Theilen besteht; so ist z. B., $a+b$ eine zweynahmige, $a+bc-5$ eine dreynahmige, $\frac{ac}{b}-18+cd-y$ eine viernahmige algebraische Größe u. s. w. Die Theile einer algebraischen Größe werden auch die Glieder dieser Größe genennt; man sagt demnach, eine Größe bestehe aus 1, 2, 3, 4... Gliedern.

Auch werden die algebraischen Größen Functionen derjenigen Buchstaben genennt, die sich auf was immer für eine Art darinnen befinden; so z. B. sind die Größen $3a$, $a-x$,

$ab + 1$, $\frac{5}{a}$, Functionen von $a$, so wie die zweyte auch zugleich eine Function von $x$, und die dritte auch eine Function von $b$ ist.

§. 58.

Die Glieder einer albgebraischen Größe heißen gleichnahmig, oder ähnlich, wenn selbe vollkommen einerley Buchstaben, mit den nähmlichen Exponenten, enthalten; nur die Zeichen und die Coefficienten können auch verschieden seyn; so z. B. sind $4\,ab^2c$, und $-3\,ab^2c$, gleichnahmige Glieder. Eben so sind auch jene Glieder, die nur aus bloßen Zahlen bestehen, gleichnahmig. Bestehen aber die Glieder nicht vollkommen aus den nähmlichen Buchstaben, so sind sie ungleichnahmige Glieder. Es sind daher in der algebraischen Größe $3\,ab - 3\,cb^2d + 5\,ab - 3\,cbd$ nur das erste und dritte Glied gleichnahmig; hingegen das zweyte und vierte ungleichnahmig, weil im vierten Gliede $b$ nur den Exponenten 1 hat; so sind auch diese Glieder $3\,a^2b$ und $3\,ab^2$ ungleichnahmig.

§. 59.

Es kommen in den algebraischen Rechnungen Größen vor, die einander ganz, oder zum Theil tilgen, in Anbetracht dessen, was man durch selbe zu bestimmen sucht. Z. B. man wollte die Verlassenschaft eines Verstorbenen berechnen, und es haben sich $a$ Fl. bares Geld vorgefunden, und für die verkauften Geräthschaften sind gelöset worden $b$ Fl., hingegen haben sich auch $c$ Fl. Schulden vorgefunden, und die Begräbnißkosten betragen $d$ Fl. Hier sieht man nun, daß die Verlassenschaft durch die vier Größen $a$, $b$, $c$ und $d$ bestimmt werden muß, welche alle einerley Einheiten, nähmlich Gulden bedeuten, aber in dieser Rechnung gerade einander entgegengesetzt sind; denn die ersten zwey $a$, $b$ sind der Verlassenschaft zum Vortheil, und die letzten zwey, $c$, $d$ sind derselben zum Nachtheil, nähmlich vermindern dieselbe. Solche Größen, deren gleich große Theile einander tilgen, werden in einer Rechnung entgegengesetzte Größen genennt, und zwar jene, welche der daraus zu bestimmenden Größe zum Vortheil dienen, oder dieselbe vermehren, heißen positive (bejahende) Größen; und jene, welche der daraus zu be-

stimmenden Größe zum Nachtheile dienen, oder dieselbe vermindern, werden negative (verneinende) Größen genennt; und damit man in einer Rechnung die positiven Größen von den negativen unterscheiden könne, ist es am natürlichsten, die positiven Größen mit dem Additionszeichen +, und die negativen mit dem Subtractionszeichen — zu bezeichnen, weil erstere die zu bestimmende Größe vermehren, nähmlich dazu addirt werden müssen, und letztere dieselbe vermindern und davon subtrahirt werden sollen. In unserem Beyspiele ist demnach die Verlassenschaft $= + a + b - c - d$, oder $= a + b - c - d$, weil das Zeichen + im Anfange fast niemahls angesetzt, sondern jederzeit schon darunter verstanden wird. Und so werden auch alle diejenigen Glieder einer algebraischen Größe, die das Zeichen + vor sich haben, positive, und die das Zeichen — vor sich haben, negative genennt.

Es sey noch z. B. die Größe eines Bankerotts zu bestimmen, wo sich nur $a$ Fl. Vermögen, hingegen $b$ Fl. Schulden vorgefunden haben; so ist die Größe des Bankerotts $= b - a$ Fl.; weil die vorgefundenen $a$ Fl. Vermögen den Bankerott vermindern. Man sieht hieraus, daß auch ein wirkliches Vermögen eine negative Größe seyn kann, wenn es der dadurch zu bestimmenden Größe zum Nachtheil ist, und eine Verminderung verursacht. Positive und negative Größen sind demnach einander gerade entgegengesetzte Größen in einer Rechnung, so daß, wenn die eine ein Vermögen, eine Erhöhung, eine Bewegung gegen die Rechte u. dgl. vorstellet, die andere eine, dem Vermögen entgegengesetzte, Schuld eine Vertiefung, eine Bewegung gegen die Linke u. s. w. bedeutet.

## §. 60.

Wäre nun in dem letzten angeführten Beyspiele das vorgefundene Vermögen $a = 8000$ Fl., und die vorgefundene Schuld $b$ ebenfalls $= 8000$ Fl.; so ist die Größe des Bankerotts $= 8000 - 8000 = 0$; weil das Vermögen die Schuld gänzlich tilget. Wäre aber das Vermögen $a = 6000$, und die Schuld $b = 8000$ so ist der Bankerott $= 8000 - 6000 = 2000$; weil die 6000 Fl. Vermögen eben so viel an der Schuld tilgen. Wäre hingegen

das Vermögen $a = 9000$ Fl. und die Schuld $b = 8000$ Fl.; so ist die Größe des Bankerotts $= -1000$ Fl.; nähmlich es bleiben dem Schuldner, nach Tilgung aller Schulden, noch 1000 Fl. Vermögen übrig; das heißt, wenn positive und negative Größen in einer Rechnung vorkommen, so tiget die kleinere in der größern so viele Einheiten, als sie selbst hat; sind beyde aber gleich groß, so tilgen sie einander gänzlich.

Befinden sich mehrere positive und negative Größen in einer Rechnung, so tilget die kleincre Summe in der größern so viele Einheiten, als sie deren selbst hat.

§. 61.

Sind nun algebraische Größen, welche aus positiven und negativen Gliedern bestehen, zu addiren, so verfahre man nach folgenden Regeln:

1) Man schreibe alle Glieder der zu addirenden Größen mit ihren Zeichen in einer Zeile, oder auch in mehreren Zeilen untereinander hin, weil albgebraisch addiren eigentlich nichts anders heißt, als die Größen mit ihren Zeichen zusammenfügen; denn es sey zu $a + b$ die Größe $c - d$ zu addiren, so ist klar, daß die Summe $= a + b + c - d$ ist; denn würde man $+ d$ statt $- d$ setzen, so wäre die Größe $a + b$ um die Summe von $c$ und $d$ vermehrt worden, da doch eigentlich der Sinn ist, daß sie nur um die Differenz von $c$ und $d$ vermehrt werden soll.

2) Suche man die gleichnahmigen Glieder auf (§. 58); und hat man deren zwey gefunden, so sehe man auf ihre Zeichen.

3) Sind die Zeichen gleich, nähmlich in beyden gleichnahmigen Gliedern $+$ oder in beyden $-$, so addire man nur die Coefficienten mit Beybehaltung des gemeinschaftlichen Zeichens, und die Buchstaben werden nur einmahl mit ihren Exponenten geschrieben; so ist z. B. $3a^2b + 5a^2b = 8a^2b$; ingleichen $-9d^3x - 12d^3x = -21d^3x$. Sind aber die Zeichen verschieden, so ziehe man den kleinern Coefficienten von dem größern ab, mit Beybehaltung des größern Zeichens, und der gemeinschaftlichen Buchstaben; z. B. $+5ab - 2ab = 3ab$; in-

gleichen $4ax^2 - 9ax^2 = -5ax^2$. Haben endlich beyde Glieder gleiche Coefficienten, und verschiedene Zeichen, so lasse man beyde Glieder gänzlich hinweg; z. B. $4ab - 4ab = 0$. Alles dieses erhellet aus (§. 60).

4) Die ungleichnahmigen Glieder aber schreibe man in der Summe mit ihren Zeichen hin.

### Beyspiele.

I. Zu addiren $\begin{cases} 3ab + 2ac + 3d^2g \\ 2ab - 5ac - 3dg^2 \end{cases}$

Summe $5ab - 3ac + 3d^2g - 3dg^2$

II. Zu addiren $\begin{cases} 8ax - 3bc - 5dx + 12 \\ -ax + 7bc + 2dx - 8 \end{cases}$

Summe $7ax + 4bc - 3dx + 4$

III. Zu addiren $\begin{cases} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{cases}$

Summe $2a^3 + 6ab^2$.

IV. $a^3 + 2ax + x^2 - a^3 + 2ax - x^2 = 4ax$.

V. $a^m b^2 + 2c^3 x^{m+1} - 3c^3 x^{m+1} + 10a^m b^2$
$= 11a^m b^2 - c^3 x^{m+1}$.

## §. 62.

Bey der Subtraction der algebraischen Größen merke man folgendes:

Man verändere die Zeichen aller Glieder bey der abzuziehenden Größe, nähmlich — in +, und + in —, und addire sodann (nach dem vorigen §. 61) diese veränderte Größe zu derjenigen, von welcher sie abzuziehen ist, so wird man die gehörige Differenz haben.

### Beyspiele.

| I. | II. | III. | IV. |
|---|---|---|---|
| von $a$ | von $a$ | von $-a$ | von $-a$ |
| abzuz. $b$ | abzuz. $-b$ | abzuz. $+b$ | abzuz. $-b$ |
| Diff. $a-b$ | Diff. $a+b$ | Diff. $-a-b$ | Diff. $-a+b$ |

Daß bey der Subtraction das Zeichen + in — verwandelt werden muß, daran wird Niemand zweifeln: aber auch daß — in + verändert werden müsse, ist leicht einzusehen; denn die Differenz muß (nach §. 24) so beschaffen seyn, daß, wenn man selbe zur Größe, welche man abgezogen hat, addiret, die Größe, von welcher man abgezogen hat, zum Vorschein komme, nähmlich die Differenz zum Subtrahendus (§. 24) addirt, muß den Minuendus wieder herstellen; würde man nun in dem Beyspiele II. in der Differenz $a - b$ setzen, so wäre $a - b - b = a - 2b$; setzt man aber in der Differenz $a + b$, so ist $a + b - b = a =$ der Größe, von welcher man abgezogen hat. Es heißt daher eine Größe algebraisch subtrahiren nichts anders, als eben diese Größe mit verkehrten Zeichen hinzu addiren.

Noch einige Beyspiele zur Übung.

| | | |
|---|---|---|
| V. | von | $a^2b - 4e$ |
| | ist abzuziehen | $5a^2b - dc - 4e$ |
| die Zeichen geändert | — | $+ \quad +$ |

Differenz $= -\ 4a^2b + dc.$

| | | |
|---|---|---|
| VI. | von | $5ax - x^2 - 3a - 9$ |
| | ist abzuziehen | $3ax + x^2 + 30 - 3a - 5b$ |
| die Zeichen geändert | — | $- \quad - \quad + \quad +$ |

Differenz $= 2ax - 2x^2 - 39 + 5b.$

| | | |
|---|---|---|
| VII. | von | $5a^m x^2 - 20 + 7ab^3x - 4b^m cx^2$ |
| | ist abzuziehen | $2b^m cx^2 + 5a^m x^2 + 8 - 2a^3 bx$ |
| die Zeichen geändert | — | $- \quad - \quad +$ |

Differenz $= -28 + 7ab^3x - 6b^m cx^2 + 2a^3bx.$

§. 63.

Ist eine mehrnahmige algebraische Größe mit einer einnahmigen zu multipliciren, so multiplicire man jedes Glied der mehrnahmigen Größe mit der einnahmigen; weil es einerley ist, ob man das Ganze, oder jeden seiner Theile insbesondere multipliciret (§. 29, Grundsatz 1), allwo man jederzeit die in beyden Factoren verschiedenen Buchstaben in alphabetischer Ordnung

dicht hintereinander anschreibt (vermög §. 55), nur beobachte man dabey auch noch folgende Regeln.

1) Sind beyde Glieder, die miteinander zu multipliciren sind, positiv, so ist ohne Zweifel auch das Product positiv; z. B. $+a \times +b = +ab$.

2) Wäre ein Glied negativ, und das andere positiv, so ist das Product negativ; z. B. $-a \times +b = -ab$, welches aus folgenden erhellet:

es ist $+a = 2a - a$
und $+b = +b$
also auch $+ab = +2ab - ab$, vermög (§. 29, Grundsatz 1); denn würde man im Producte rechts das letzte Glied $+ab$ setzen, so wäre $+2ab + ab$ nicht gleich $+ab$, welches doch vermög (§. 29, Grundsatz 1) seyn muß.

3) Sind aber beyde Glieder negativ, so ist das Product positiv; z. B. $-a \times -b = +ab$;

denn es ist $a = 2a - a$
und $-b = -b$
also auch $-ab = -2ab + ab$ (vermög §. 29, Grundsatz 1); denn würde man hier im Producte rechts das letzte Glied $-ab$ setzen; so wäre $-2ab - ab$ nicht gleich $-ab$, welches doch wieder vermög des angeführten Grundsatzes seyn muß. Hieraus fließt nun die Regel, gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche aber ein negatives Product.

4) Die Coefficienten beyder Glieder werden mit einander multiplicirt; so ist z. B. $2a \times 3cd = 6acd$;
$4a \times -5b = -20ab$; $-3a \times -5bc = +15abc$.

5) Haben beyde Glieder gleiche Buchstaben, so wird im Producte jeder gemeinschaftliche Buchstab nur einmahl geschrieben, und die Exponenten dieses Buchstabens werden zusammen addiret; z. B. $4a^3 \times 5a^2 = 20a^5$; denn es ist $4a^3 \times 5a^2 = 4 . 5 . aaa . aa = 20 . aaaaa = 20a^5$ (§. 55); eben so ist $ab^2 \times -4abc = -4a^2b^3c$.

## Beyspiele.

I. $(2a - 3a^2b + bc^2) \times 6ab^2d$
$= 12a^2b^2d - 18a^3b^3d + 6ab^3c^2d.$

II. $(a^3 - 3a^2b + 4ab^2) \times -2ab^2c$
$= -2a^4b^2c + 6a^3b^3c - 8a^2b^4c.$

III. $(4a - 30 + b^2c^m) \times 5ab^nc$
$= 20a^2b^nc - 150ab^nc + 5ab^{n+2}c^{m+1}.$

## §. 64.

Sind aber beyde Factoren mehrnahmige Größen, so multiplicire man mit jedem Gliede des einen Factors, rechts oder links angefangen, den ganzen anderen Factor nach den (im vorigen §. 63) gegebenen Regeln, und man hat das richtige Product (vermög §. 29); wo man nur noch die etwa darin befindlichen gleichnahmigen Glieder reduciren darf.

## Beyspiele.

I. $\left.\begin{matrix} 3a^2 - 2ax + x^2 \\ 2a - 3x \end{matrix}\right\}$ Factoren.

Prod. $= 6a^3 - 4a^2x + 2ax^2 - 9a^2x + 6ax^2 - 3x^3$
$= 6a^3 - 13a^2x + 8ax^2 - 3x^3.$

II. $\left.\begin{matrix} a^m + bx - 2c^n \\ 2a^m - 3b \end{matrix}\right\}$ Factoren.

Prod. $2a^{2m} + 2a^m bx - 4a^m c^n - 3a^m b - 3bx + 1 + 6bc^n.$

III. $\left.\begin{matrix} 2a^3 - 2m bc^{m-2} - 5a^{-2}b^{m+1} \\ 3a^{4m-5}b^{2m}c^{3-4m} - 6 \end{matrix}\right\}$ Factoren.

Prod. $= 6a^{2m-2}b^{2m+1}c^{1-3m} - 15a^{4m-7}b^{3m+1}c^{3-4m}$
$- 12a^{3-2m}bc^{m-2} + 30a^{-2}b^{m+1}.$

## §. 65.

Wenn eine einnahmige algebraische Größe wieder durch eine einnahmige zu dividiren ist, so kann die Division nur damahls wirklich verrichtet werden, wenn sich alle Buchstaben des Divisors in dem Dividendus befinden, und zwar nach folgenden Regeln.

1) Gleiche Zeichen geben einen positiven, ungleiche aber einen negativen Quotienten.

2) Der Coefficient des Dividendus wird durch den Coefficienten des Diviſors dividirt.

3) Die Buchſtaben welche im Diviſor und Dividendus mit dem nähmlichen Exponenten enthalten ſind, werden in dem Quotienten ganz hinweggelaſſen; ſind aber die Exponenten verſchieden, ſo wird der Exponent des Diviſors von jenem des Dividendus abgezogen.

4) Die übrigen Buchſtaben des Dividendus, welche der Diviſor nicht zugleich gemein hat, werden im Quotienten mit ihren Exponenten angeſetzt; ſo iſt z. B. $12ab : 3a = 4b$;

$5a^2b^3cd : -ab^2d = -5abc$;
$-8a^mb^3c : -2ab^n = +4a^{m-1}b^{3-n}c$;
$-15a^3b : 5a^3b = -3$; $a^mb^{1-n} : a^mb^{1-n} = 1$.

Die Richtigkeit dieſer Regeln erhellet daraus, weil das Product aus dem Quotienten in dem Diviſor jederzeit den Dividendus zum Vorſchein bringen muß. (§. 44.)

Wären aber nicht alle Buchſtaben des Diviſors in dem Dividendus enthalten, ſo kann die Diviſion nicht wirklich verrichtet werden; ſondern man deutet in dieſem Falle die Diviſion durch den liegenden Strich (§. 37) an, und man kann diejenigen Factoren, die der Diviſor und Dividendus gemein haben, ganz hinweg laſſen (§. 40); z. B.

$$5ab^2 : 3b^2c = \frac{5a}{3c}; \quad 6a^2b : -2ac = -\frac{3ab}{c}$$

## §. 66.

Beſteht der Dividendus aus mehr Gliedern, der Diviſor aber nur aus einem einzigen Gliede, ſo dividire man nach den erſtgegebenen Regeln jedes Glied durch den Diviſor, wenn ſolcher in jedem Gliede des Dividendus enthalten iſt; im Gegentheile kann die Diviſion entweder nur angezeigt, oder zum Theil verrichtet, und zum Theil angezeigt werden; z. B.

$$(6a^2b - 10ax) : 2a = 3ab - 5x.$$

$$(4a^2b - 2x + 3a) : 2b = 2a^2 - \frac{x}{b} + \frac{3a}{2b}.$$

§. 67.

Sind aber beyde, Divisor und Dividendus, zusammengesetzte Größen, so verfahre man auf folgende Art:

1) Mit dem ersten Gliede des Divisors dividire man in ein Glied des Dividendus, so hat man den ersten Theil des Quotienten; mit diesem Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product von dem Dividendus ab.

2) In dem Reste wähle man wieder ein Glied, in welchem das erste Glied des Divisors enthalten ist, und dividire solches, so hat man den zweyten Theil des Quotienten, welcher mit seinem Zeichen zum ersten hinzugefügt wird; mit diesem gefundenen zweyten Theil des Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, und ziehe das Product vom Dividendus ab; den Rest dividire man wieder durch das erste Glied des Divisors u. s. w.

3) Kommt man nun durch diese Operation einmahl zu Ende, nähmlich, daß alles genau aufgehet, so ist es ein Zeichen, daß der Divisor im Dividendus genau enthalten sey; im Gegentheile muß man den noch vorhandenen Rest mit dem unterschriebenen Divisor an den Quotienten mittelst gehörigen Zeichens + oder — anhängen, wie bey der Division mit Zahlen (§. 41, Nr. 5).

Beyspiele.

I. $(b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 - 3b^2cx^4 + 9b^2x^5) : (b^2cx - 3b^2x^2) = cx - 3x^3$

$+b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3$
$- \quad +$
$-3b^2cx^4 + 9b^2x^5$
$-3b^2cx^4 + 9b^2x^5$
$+ \quad -$
$0$

II. $(12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4)$ Divid.
$: (3a^2b - 6abc + 3bc^2)$ Divis. $= 4a^2 - 5c^2$

$+12a^4b - 24a^3bc + 12a^2bc^2$
$- \quad + \quad -$
$-15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4$
$-15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4$
$+ \quad - \quad +$
$0$

III. $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$

$+ a^3 - a^2 b$

$- \quad +$

$+ a^2 b - b^3$

$+ a^2 b - ab^2$

$- \quad +$

$+ ab^2 - b^3$

$+ ab^2 - b^3$

$- \quad +$

$0$

IV. $(6a^2 - x^2 - ax + ab) : (3a + x) = 2a - x + \frac{ab}{3a + x}$

$+ 6a^2 + 2ax$

$- \quad -$

$- 3ax - x^2 + ab$

$- 3ax - x^2$

$+ \quad +$

$+ ab$

## §. 68.

Es ereignet ſich aber bey den algebraiſchen Diviſionen meiſtens, daß der Diviſor im Dividendus nicht genau enthalten iſt, und deßwegen werden auch die algebraiſchen Diviſionen gar ſelten wirklich verrichtet, ſondern meiſtens nur angezeiget. Um aber die Rechnung doch zuweilen etwas abkürzen zu können, pflegt man den Diviſor und Dividendus in ihre Factoren zu zerlegen; das heißt, man betrachtet jedes als ein Product, und ſucht die Factoren auf, durch deren Multiplication ſie entſtanden ſind. Haben nun Diviſor und Dividendus einen oder mehrere gleiche Factoren, ſo kann man ſolche (vermög §. 40) ganz hinweg laſſen, weil dadurch beyde durch eine nähmliche Größe dividirt werden. So iſt z. B.

$(ax + x^2) : (2bx - cx) = x(a + x) : x(2b - c) = \frac{a + x}{2b - c}$; $(ax - a) :$

$(3bx - 3b) = a(x - 1) : 3b(x - 1) = \frac{a}{3b}$; $(6a^2 b + 3ax^2) :$

$(12ax \quad 9a^2 c) = 3a(2ab + x^2) : 3a(4x - 3ac) = \frac{2ab + x^2}{4x - 3ac}$

Wie aber eine Größe sich in Factoren zerlegen läßt, kann am besten durch eine aufmerksame Übung erlernet werden.

Folgende Beyspiele können zum Theil zur Richtschnur dienen:

1. $2abx - 3dgx = x(2ab - 3dg)$.

2. $6ab^2 - 12abc - 3ab = 3ab(2b - 4c - 1)$.

3. $ax \pm x^2 = x(a \pm x)$.

4. $(y \pm by) = y(1 \pm b)$.

5. $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a(a+b) + b(a+b)$
$= (a+b)(a+b)$.

6. $c^2 - 2cy^2 + y^4 = c^2 - cy^2 - cy^2 + y^4 = c(c-y^2) - y^2(c-y^2)$
$= (c-y^2).(c-y^2) = (c-y^2)^2$.

7. $a^2 - x^2 = a^2 + ax - ax - x^2 = a(a+x) - x(a+x)$
$= (a+x)(a-x)$.

8. $a^4 - y^2 = (a^2+y)(a^2-y)$; $(x^2-1) = (x+1)(x-1)$.

9. $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2+3x+2) = x(x^2+x+2x+2)$
$= x[x(x+1) + 2(x+1)] = x(x+1)(x+2)$.

10. $2y^3 + 3y^2 + y = y(2y^2+3y+1) = y(2y^2+2y+y+1)$
$= y[2y(y+1) + (y+1)] = y(y+1)(2y+1)$.

11. $n^3 - 3n^2 + 2n = n(n^2-3n+2) = n(n^2-n-2n+2)$
$= n[n(n-1) - 2(n-1)] = n(n-1)(n-2)$.

12. $2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n = n(2n^2+3mn+3m-2)$
$= n(2n^2-2+3mn+3m) = n[2(n^2-1) + 3m(n+1)]$
$= n[2(n+1).(n-1) + 3m(n+1)]$
$= n(n+1)(2n-2+3m)$.

13. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$
$= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$
$= c^2(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2) - c^4 - (a^2-b^2)^2$
$= c^2[(a+b)^2 + (a-b)^2] - c^4 - (a-b)^2(a+b)^2$
$= c^2(a+b)^2 - c^4 - (a-b)^2(a+b)^2 + c^2(a-b)^2$
$= c^2[(a+b)^2 - c^2] - (a-b)^2[(a+b)^2 - c^2]$
$= [(a+b)^2 - c^2].[c^2 - (a-b)^2]$
$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$.

Eine allgemeine Regel wird weiter hinten in der siebenten Vorlesung bey den höhern Gleichungen gegeben werden, um die

Factoren einer zusammengesetzten algebraischen Größe zu bestimmen. Man thut aber öfters sehr gut; wenn man die in den Rechnungen vorkommenden zusammengesetzten Multiplicationen nicht jederzeit wirklich verrichtet, sondern solche nur andeutet, damit man die Factoren jederzeit vor Augen habe, und solche bey einer vorzunehmenden Abkürzung nicht erst suchen darf.

§. 69.

Es ist auch öfters erforderlich, die Factoren einer gegebenen Zahl zu bestimmen, das ist, diejenigen Zahlen aufzusuchen, durch welche sich eine gegebene Zahl ohne Rest theilen läßt; hierzu können folgende Regeln angemerket werden

1) Jede Zahl, deren letzte Ziffer 0, 2, 4, 6, 8, ist, läßt sich genau durch 2 theilen.

Daß jede der einfachen Zahlen 2, 4, 6, 8, wie auch 10, und jedes Vielfache von 10 durch 2 theilbar sey, ist für sich klar; bey andern größern Zahlen von der angeführten Beschaffenheit z. B. bey 918 erhellet es daher, weil $918 = 910 + 8$ ist, wo nun jeder Theil, 910 und 8, einzeln betrachtet, und daher auch ihre Summe oder das Ganze 918 durch 2 theilbar ist. Man nennt solche Zahlen, die sich durch 2 ohne Rest dividiren lassen, gerade Zahlen; und jene, welche sich durch 2 nicht theilen lassen, werden ungerade Zahlen genannt.

2) Wenn man alle Ziffern einer Zahl, ohne auf ihren Rang zu sehen, zusammen addiret, und die Summe davon läßt sich genau durch 3 theilen, so läßt sich auch die Zahl durch 3 ohne Rest theilen; und wenn diese Summe durch 9 theilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 9 theilbar. Z. B. da bey der Zahl 4281 die Summe der Ziffern $4 + 2 + 8 + 1 = 15$ durch 3 theilbar ist, so ist auch die Zahl 4281 selbst durch 3 theilbar; und da bey der Zahl 45216 die Summe der Ziffern $4 + 5 + 2 + 1 + 6 = 18$ durch 9 theilbar ist; so läßt sich auch diese Zahl 45216 selbst durch 9 genau theilen. Um dieses allgemein einzusehen, benenne man die Ziffern einer Zahl von der Rechten gegen die Linke mit $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ u. s. w., so ist (§. 6) die Zahl selbsten $= a + 10\,b + 100\,c + 1000\,d \ldots$

$= a + (9 + 1)\,b + (99 + 1)\,c + (999 + 1)\,d + \ldots\ldots$
$= a + 9\,b + b + 99\,c + c + 999\,d + d + \ldots$ woraus man sieht, daß sich die Glieder $9\,b$, $99\,c$, $999\,d\ldots$ jedes insbesondere durch 3 und durch 9 theilen lassen; wenn daher die Summe aller Ziffern $a + b + c + d\ldots$ ebenfalls durch 3 oder 9 theilbar ist, so ist auch die ganze Zahl durch 3 oder 9 theilbar; denn wenn jeder Theil eines ganzen durch irgend eine Größe genau theilbar ist, so ist auch das Ganze durch eben diese Größe genau theilbar.

3) Wenn die zwey letzten Ziffern einer Zahl durch 4 theilbar sind, so ist auch die Zahl selbst durch 4 theilbar. Denn es ist z. B. $317572 = 317500 + 72$. Nun aber läßt sich jede Zahl, welche hinten 2 Nullen hat, durch 4 genau dividiren, weil $317500 = 3175 \cdot 100$, und 100 durch 4 theilbar ist: wenn daher die zwey letzten Ziffern 72 sich ebenfalls durch 4 theilen lassen, so ist auch die ganze Zahl durch 4 theilbar.

4) Wenn die letzte Ziffer einer Zahl entweder 0 oder 5 ist, so läßt sich die Zahl durch 5 theilen; denn ist die letzte Ziffer eine 0, so bilde man sich ein, die Zahl sey mit 10 multiplicirt (§. 31), und 10 ist durch 5 theilbar; ist aber die letzte Ziffer 5, z. B. 8735, so ist $8735 = 8730 + 5$, wo sowohl 8730 als auch 5, und folglich auch deren Summe durch 5 theilbar ist.

5) Soll eine Zahl durch 6 theilbar seyn, so muß sie auch durch 2 und durch 3 theilbar seyn, weil sowohl 2 als 3 in 6 genau enthalten ist; wenn daher eine gerade Zahl durch 3 theilbar ist, so ist sie auch durch 6 theilbar.

6) Wenn die drey letzten Ziffern einer Zahl sich durch 8 theilen lassen, so ist auch die Zahl selbst durch 8 theilbar; denn es ist z. B. $4678762 = 4678000 + 762 = 4678 \cdot 1000 + 762$; da nun 1000 durch 8 theilbar ist, so läßt sich das erste Glied jederzeit durch 8 theilen; es kömmt daher nur darauf an, daß die letzten drey Ziffern durch 8 theilbar sind.

7) Hat eine Zahl am Ende eine 0, so ist sie durch 10 theilbar (§ 42, Nr. 5).

8) Will man untersuchen, ob eine Zahl sich

durch 11 dividiren lasse, so addire man die Ziffern, die an der ersten, dritten, fünften, überhaupt die Ziffern, die an den ungeraden Stellen stehen; dann addire man auch die Ziffern zusammen, die an den geraden Stellen stehen, und ziehe eine Summe von der andern ab; ist nun die Differenz = 0, oder 11, 22, 33, 44, .... so läßt sich die Zahl durch 11 theilen.

Denn wenn man eine Zahl z. B. 1432 mit 11 multiplicirt,

| |
|---|
| 1432 |
| 1432 |
| 15752 |

so schreibt man nur die Zahl einmahl unter sich selbst, und zwar so, daß die Einheiten unter die Zehner zu stehen kommen; dadurch kömmt jede Ziffer der Zahl sowohl in einer geraden als auch in einer ungeraden Stelle zu stehen; daher ist die Summe der geraden Stellen der Summe der ungeraden gleich. Ereignet sich aber, daß beym Addiren der Partialproducte die Summe einer Stelle 10, 11, 12, . . . . . 18 ist, (größer kann sie nicht seyn;) so verliert

| |
|---|
| 8356 |
| 8356 |
| 91916 |

dadurch diese Stelle 10 Einheiten, und die künftige Stelle gewinnt eine Einheit; daher ist der Unterschied 11, und so vielmahl sich dieses bey einer Stelle der nähmlichen Benennung, z. B. bey einer geraden Stelle ereignet, so vielmahl eilf wird die Differenz seyn.

9) Soll eine Zahl durch 12 theilbar seyn, so muß sie sich auch durch 3 und durch 4 theilen lassen.

Und so könnte man sich auch von allen übrigen Zahlen, z. B. von 7, 13, 17 gewisse Regeln machen, die aber theils wegen Mangel des Raumes hier nicht Platz finden können; theils auch, weil solche Regeln zu weitläufig sind, und mehrere Zeit zur Untersuchung, als zur Division selbst verwendet werden müßte. Läßt sich aber eine Zahl durch nichts als durch die Einheit, und durch sich selbst theilen, so wird sie eine Primzahl genennt; so sind z. B. 2, 3, 5, 7, 11, 13 . . . Primzahlen.

## §. 70.

Wenn man eine Zahl in lauter solche Factoren zerleget, welche Primzahlen sind, so sagt man: man habe die Zahl in ihre einfache Factoren aufgelöset; die übrigen aber werden

zusammengesetzte Factoren genannt. So z. B. sind 2.2.2.3 die einfachen Factoren von 24; hingegen sind 4 . 6 zusammengesetzte Factoren dieser nähmlichen Zahl 24.

Sollen nun von einer gegebenen Zahl, z. B. von 330, sowohl alle einfachen, als auch alle zusammengesetzten Factoren aufgesucht werden, so verfahre man auf folgende Art. Man dividire diese Zahl durch den kleinsten in ihr enthaltenen Factor, und setze diesen Factor rechts seitwärts hinter einen gezogenen Strich, den Quotienten aber unter die vorgegebene Zahl; dann dividire man wieder den Quotienten durch die möglichst kleinste Zahl, schreibe diesen Factor oder Divisor unter den andern rechts, und den zweyten Quotienten unter den ersten; multiplicire auch die zwey Factoren miteinander, und schreibe das Product darneben hin; den vorigen zweyten Quotienten dividire man abermahl durch den kleinsten möglichen Factor, schreibe diesen Factor hinter den Strich unter die vorigen Factoren, und multiplicire damit alle die vorigen schon gefundenen; und dieses setze man so lang fort, bis man zum Quotienten 1 erhält, so sind die Factoren längs dem Striche herunter alle einfache, und die übrigen alle zusammengesetzte Factoren. Im angeführten Beyspiele sind daher 2. 3. 5. 11. die einfachen, und 6, 10, 15, 30, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330 alle zusammengesetzte Factoren der Zahl 330.

| | |
|---|---|
| 330 | 2 |
| 165 | 3,6 |
| 55 | 5,10,15,30 |
| 11 | 11,22,33,66,55 |
| | 110,165,330. |

# Zweyte Vorlesung.

## Von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

### I. Abschnitt.

### Von den Brüchen überhaupt.

#### §. 71.

Ein Bruch ist eine Größe, welche einen oder mehrere gleiche Theile einer Einheit anzeiget. Z. B. wenn man einen Gulden, eine Klafter u. dgl. in etliche gleiche Theile theilet, und einige solche Theile nimmt, so wird dieses in Rücksicht der ganzen Einheit ein Bruch genannt. Um einen Bruch auszudrücken sind also zwey Zahlen nöthig, wovon eine angibt, in wie viele gleiche Theile man eine ganze Einheit theilen soll, die andere aber, wie viel solche Theile den Bruch ausmachen, oder genommen werden müssen. Jene heißt der Nenner, und diese der Zähler des Bruches. Beyde Zahlen unterscheidet man durch einen liegenden Strich; den Zähler setzt man über, und den Nenner unter den Strich. So sind z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{7}$ Brüche, wovon die Zähler 2, 4, 13, und die Nenner 3, 5, 7 sind; und werden ausgesprochen, zwey Drittel, vier Fünftel, dreyzehn Siebentel.

Die Brüche werden so wie die ganzen Zahlen (§. 9) unbenannte Brüche genennt, wenn die Gattung der Einheit, auf welche sich ein Bruch bezieht, noch unbestimmt ist; wenn im Gegentheile es schon bekannt ist, welche Einheit bey einem Bruche zum Grunde liege, so ist es ein benannter Bruch.

z. B. $\frac{2}{3}$ ist ein unbenannter Bruch, $\frac{2}{3}$ Fl. aber ist ein benannter Bruch, und bedeutet, daß man einen Gulden in drey gleiche Theile theilen, und 2 solche Theile nehmen solle.

§. 72.

Ist nun bey einem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so ist es ein Zeichen, daß man nicht alle Theile der ganzen Einheit nehmen solle, und daher ist der Bruch $< 1$; solche Brüche werden eigentliche oder echte Brüche genannt; so sind z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ echte Brüche, so wie auch alle Reste der Divisionen (§. 41, Nr. 5) echte Brüche sind.

Ist aber der Zähler eines Bruches dem Nenner gleich, wie $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$.... $\frac{a}{a}$, so ist es ein Zeichen, daß alle Theile der Einheit genommen werden müssen; daher sind solche Brüche $= 1$.

Wenn endlich der Zähler eines Bruches größer ist, als der Nenner, und folglich mehrere Theile genommen werden müssen, als eine Einheit deren enthält, so werden solche Brüche Afterbrüche, oder uneigentliche Brüche genannt;

z. B. $\frac{4}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{194}{26}$, $\frac{5a}{3a}$.

§. 73.

Ein Bruch z. B. $\frac{3}{4}$ eines Guldens bedeutet (vermög §. 71) daß 1 fl. in vier gleiche Theile zu theilen, und der Quotient dreymahl zu nehmen sey, nähmlich $\frac{3}{4}$ Fl. $= \frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4}$ $= \frac{1\text{ Fl.}}{4} \times 3$; es ist aber (vermög §. 39, Grundsatz 1) auch $\frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} + \frac{1\text{ Fl.}}{4} = \frac{3\text{ Fl.}}{4}$, weil es einerley ist, ob man das Ganze (1 Fl. + 1 Fl. + 1 Fl. = 3 Fl.), oder jeden Theil (1 Fl.) von eben diesem Ganzen durch 4 dividiret; folglich ist auch $\frac{3}{4}$ Fl. $= \frac{3\text{ Fl.}}{4}$ (vermög §. 12, Grundsatz 3), nähmlich drey Viertel eines Guldens nehmen ist eben so viel als drey Gulden in vier gleiche Theile zertheilen, und diesen Quotienten einmahl nehmen. Eben dieses gilt von jedem andern Bruche. Der Werth eines jeden

Bruches ist daher der Quotient, wenn man den Zähler durch den Nenner dividiret.

Es ist hieraus zu ersehen, daß überhaupt jede (nach §. 37) durch einen liegenden Strich angezeigte Division als ein Bruch zu betrachten sey, wo der Dividendus den Zähler, und der Divisor den Nenner des Bruches vorstellet.

## §. 74.

Wenn man den Zähler eines Afterbruches durch seinen Nenner wirklich dividiret, so erhält man für den Werth des Bruches eine bloße ganze Zahl, wenn der Nenner in dem Zähler genau enthalten ist; im Gegentheile erhält man eine ganze Zahl nebst einem Reste (nach §. 41, Nr. 5), der ein echter Bruch seyn wird (§. 72.).

Um aber auch den Werth eines echten Bruches jederzeit bestimmt angeben zu können, ist es, so wie bey der Rechnung mit ganzen benannten Zahlen, nothwendig zu wissen, was für Einheiten eigentlich zum Grunde liegen; nähmlich wie viel Einheiten der nächst kleineren Gattung, in einer solchen Einheit, worauf sich der Bruch bezieht, enthalten sind. Wenn man nun mit der Anzahl der Einheiten kleinerer Gattung den Zähler des Bruches multipliciret, und dieses Product durch den Nenner dividiret, so erhält man den Werth des Bruches in bekannten Einheiten kleinerer Gattung ausgedrückt; so z. B. ist

$$\frac{7}{15}\text{ Fl.} = \frac{7 \cdot 60}{15}\text{ Kr.} = \frac{420}{15}\text{ Kr.} = 28\text{ Kr.}$$

$$\frac{11}{24}\text{ Fl.} = \frac{11 \cdot 60}{24}\text{ Kr.} = \frac{660}{24}\text{ Kr.} = 27\tfrac{12}{24}\text{ Kr.} = 27\text{ Kr.} + \frac{12}{24}\text{ K.}$$

$$= 27\text{ Kr.} + \frac{12 \cdot 4}{24}\text{ Dr.} = 27\text{ Kr.} + \frac{48}{24}\text{ Dr.} = 27\text{ Kr.} + 2\text{ Dr.}$$

$$\frac{23}{96}\text{ Kl.} = \frac{23 \cdot 6^{1}}{96} = \frac{138^{1}}{96} = 1\tfrac{42}{96}\text{ Schuh} = 1^{1} + \frac{42 \cdot 12^{11}}{96}$$

$$= 1^{1} + \frac{504^{11}}{96} = 1^{1} + 5\tfrac{24}{96}\text{ Zoll} = 1^{1} + 5^{11} + \frac{24 \cdot 12^{111}}{96}$$

$$= 1^{1} + 5^{11} + 3^{111}.$$

$\frac{31}{64}$ Pf. $= \frac{31.32}{64}$ Loth $= 15\frac{32}{64}$ Loth $= 15$ Loth $+ \frac{32.4}{64}$ Quintl.

$= 15$ Loth $+ 2$ Quintl.

$\frac{2}{240}$ Stunden $= \frac{2.60}{240}$ Min. $= \frac{120}{240}$ Min. $= \frac{120.60}{240}$ Sec.

$= 30$ Secunden.

## §. 75.

Eine jede ganze Zahl kann zu einem Afterbruche von einem verlangten Nenner gemacht werden, wenn man die Zahl mit dem gegebenen Nenner multipliciret, und den Nenner unterschreibet; so ist z. B. $5 = \frac{5.3}{3} = \frac{15}{3}$; $a = \frac{ab}{b}$.

Auch kann jede Zahl als ein Bruch vorgestellt werden, dessen Nenner $= 1$ ist; z. B. $4 = \frac{4}{1}$; $a = \frac{a}{1}$; $m + x = \frac{m+x}{1}$.

So kann auch jede ganze benannte Zahl als ein Bruch vorgestellt werden, die sich auf Einheiten der nächst größern Gattung bezieht, wenn man ihr diejenige Zahl als Nenner unterschreibt, welche anzeigt, wie viel Einheiten dieser Gattung in einer Einheit der größern Gattung enthalten sind. So ist z. B.

25 Kr. $= \frac{25}{60}$ Fl.;

5 Schuh $= \frac{5}{6}$ Klafter;

11 Loth $= \frac{11}{32}$ Pf.

## §. 76.

Eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche aber wird zum Afterbruche gemacht, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner multipliciret, zu dem Producte den Zähler des Bruches addiret, und den Nenner unterschreibet. So ist z. B.

$11\frac{3}{5} = 11 + \frac{3}{5} = \frac{11.5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{55}{5} + \frac{3}{5} = \frac{58}{5}$;

$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$.

3 Fl. + 7 Kr. $= 3$ Fl. $+ \frac{7}{60}$ Fl. $= 3\frac{7}{60}$ Fl. $= \frac{187}{60}$ Fl.

4 Pf. + 9 Loth. $= 4$ Pf. $+ \frac{9}{32}$ Pf. $= 4\frac{9}{32}$ Pf. $= \frac{137}{32}$ Pf.

§. 77.

Wenn man bey ungeändertem Nenner den Zähler eines Bruches vermehret, so wird der Werth des Bruches vergrößert; vermindert man aber den Zähler, so wird der Werth des Bruches verkleinert; und zwar der Bruch wird 2, 3, 4... *n* mahl größer, wenn man den Zähler mit 2, 3, 4... *n* multipliciret; und 2, 3, 4... *n* mahl kleiner, wenn man denselben durch 2, 3, 4... *n* dividiret.

Denn der Zähler zeigt (nach §. 71) an, wie viel Theile man für den Werth des Bruches nehmen soll. Vermehret man nun den Zähler, so werden mehr solche Theile genommen als vorhin; daher wird der Bruch größer; und zwar wird er zweymahl so groß, wenn man zweymahl so viel Theile, dreymahl so groß, wenn man dreymahl so viel Theile, und *n* mahl so groß, wenn man *n* mahl so viel Theile nimmt, das ist, wenn man den Zähler mit 2, 3... *n* multipliciret. Und aus dieser nähmlichen Ursache wird der Bruch 2, 3... *n* mahl kleiner, wenn man bey unverändertem Nenner den Zähler durch 2, 3... *n* dividiret, weil man dadurch 2, 3... *n* mahl weniger Theile nimmt.

Es ist darum bey zweyen Brüchen, welche gleiche Nenner haben, jener größer, welcher den größern Zähler hat.

Z. B. $\frac{8}{9} > \frac{7}{9}$; $\frac{22}{4} < \frac{23}{4}$.

§. 78.

Eben so wird auch der Werth eines Bruches 2, 3, 4... *n* mahl größer, wenn man bey unverändertem Zähler den Nenner durch 2, 3, 4... *n* dividiret; hingegen 2, 3, 4... *n* mahl kleiner, wenn man den Nenner mit 2, 3, 4... *n* multipliciret.

Denn der Nenner zeigt an, in wie viel Theile das Ganze soll getheilt werden (§. 71), vermehrt man nun den Nenner, so wird das Ganze in eine größere Anzahl Theile getheilet; daher wird jeder Theil kleiner, und zwar zweymahl kleiner, wenn das Ganze in zweymahl so viel Theile, dreymahl kleiner, wenn das Ganze in dreymahl so viel Theile getheilt wird, u. s. w.; daher wird auch der ganze Bruch 2, 3, 4... *n* mahl kleiner, wenn man

den Nenner mit 2, 3, 4 . . . *n* multipliciret; und so umgekehrt, wenn man den Nenner dividiret.

Bey zweyen Brüchen, die gleiche Zähler und verschiedene Nenner haben, ist deßwegen jener größer, welcher den kleinern Nenner hat; z. B. $\frac{4}{7} > \frac{4}{8} > \frac{4}{9}$.

## §. 79.

**Hingegen bleibt der Werth des Bruches ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit einer nähmlichen Zahl multipliciret, oder dividiret.**

Denn durch die Multiplication des Zählers wird der Bruch größer, und durch die Multiplication des Nenners wird der Bruch kleiner; wird nun Zähler und Nenner mit einer nähmlichen Zahl multipliciret, so wird der Bruch durch die Multiplication des Zählers so vielmahl vergrößert, als er durch die Multiplication des Nenners verkleinert wird; und folglich verbleibt er ungeändert. Eben so wird der Werth des Bruches durch die Division des Zählers eben so vielmahl verkleinert, als er durch die Division des Nenners vergrößert wird; folglich bleibt er ebenfalls ungeändert. So ist

z. B. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$; $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; ingleichen $\frac{25}{10} = \frac{25:5}{10:5} = \frac{5}{2}$.

Die Richtigkeit des angeführten Satzes, so wie die des §. 77 und 78 erhellet auch übrigens aus §. 40, weil ein jeder Bruch als eine angezeigte Division anzusehen ist (§. 73).

## §. 80.

**Einen Bruch abkürzen heißt, ihm ohne Veränderung seines Werthes eine kleinere Gestalt verschaffen; und man erhält solches, wenn man (nach § 69) eine Zahl aufsuchet, welche sowohl im Zähler, als auch im Nenner genau enthalten ist, und sodann beyde dadurch dividiret; z. B.**

$$\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{14:7}{21:7} = \frac{2}{3}; \quad \frac{105}{210} = \frac{105:5}{210:5} = \frac{21}{42} = \frac{21:3}{42:3} = \frac{7}{14}$$
$$= \frac{7:7}{14:7} = \frac{1}{2}; \quad \frac{30\,a^4b^2}{60\,a^2b^3c} = \frac{30\,a^4b^2 : 30\,a^2b^2}{60\,a^2b^3c : 30\,a^2b^2} = \frac{a^2}{2bc};$$
$$\frac{a^2 - y^2}{3a - 3y} = \frac{(a+y)(a-y)}{3(a-y)} = \frac{a+y}{3}.$$

In der Ausübung kömmt man mit der Abkürzung der Brüche am geschwindesten fort, wenn man in der Zerlegung einer vorgelegten Größe in ihre Factoren sich eine Fertigkeit erworben hat. Denn wenn man die im Zähler und Nenner gemeinschaftlich befindlichen Factoren ausstreichet, so ist die Abkürzung schon fertig.

Beyspiele.

$$\frac{210}{1155}=\frac{2.3.5.7}{3.5.7.11}=\frac{2}{11};\quad \frac{45}{180}=\frac{3.3.5}{2.2.3.3.5}=\frac{1}{2.2}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{a^2x^2-x^4}{a^2x+ax^2}=\frac{x.x.(a+x).(a-x)}{ax.\ (a+x)}=\frac{x(a-x)}{a}.$$

Läßt sich aber keine Zahl ausfindig machen, die sowohl im Zähler, als auch im Nenner genau enthalten ist, das ist, haben Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Factor, so läßt sich auch der Bruch nicht abkürzen; und man sagt sodann, Zähler und Nenner sind Primzahlen unter sich. So z. B. sind die Zahlen 20 und 9 unter sich Primzahlen, weil man, außer der Einheit, keine Zahl ausfindig machen kann, die in beyden genau enthalten wäre, obwohl jede für sich keine Primzahl ist.

§. 81.

Eine Zahl, welche in zwey andern Zahlen genau enthalten ist, wird ihr gemeinschaftliches Maß genannt; und zwar das größte gemeinschaftliche Maß, wenn es keine größere Zahl gibt, die in beyden genau enthalten wäre. So z. B. ist 6 ein gemeinschaftliches Maß der Zahlen 24, und 36, aber nicht das größte gemeinschaftliche Maß; weil beyde sich auch durch 12 theilen lassen. Um nun bey Abkürzung der Brüche sowohl des Zählers und Nenners größtes gemeinschaftliches Maß finden zu können, als auch zu erfahren, ob solche unter sich Primzahlen sind, verfahre man auf folgende Art.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; geht die Division genau auf, so ist die kleinere Zahl selbst ein gemeinschaftliches Maß; bleibt aber ein Rest übrig, so dividire man den vorigen Divisor durch diesen Rest; bleibt wieder ein Rest übrig, so dividire man wieder den letzten Divisor durch den letzten Rest, und so fahre

man fort, bis kein Rest mehr übrig bleibt; diejenige Größe nun, durch welche man das letzte Mahl ohne Rest dividiret hat, ist des Zählers und Nenners größtes gemeinschaftliches Maß. Z. B.

Um das größte gemeinschaftliche Maß der Zahlen 65 und 104 zu bestimmen, verfahre man also:

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & 2 \\ 104 & : & 65 & : & 39 & : & 26 & : 13 \\ 65 & & 39 & & 26 & & 26 & \\ \hline 39 & & 26 & & 13 & & 0 & \end{array}$$

nähmlich 104 : 65 gibt 39 zum Reste; 65 : 39 gibt 26 zum Reste; 39 : 26 gibt 13 zum Reste; endlich 26 : 13 geht genau auf; folglich ist 13 das größte gemeinschaftliche Maß von 65 und 104. Es ist demnach $\frac{65}{104} = \frac{65:13}{104:13} = \frac{5}{8}$; und $\frac{104}{65} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$. Sollte aber bey diesem Verfahren die Division nicht eher zu Ende kommen, als bis der letzte Divisor = 1 ist; so ist es ein Zeichen, daß die vorgelegten Zahlen unter sich Primzahlen sind. Z. B. wenn für die zwey Zahlen 361 und 1495 das größte gemeinschaftliche Maß nach der eben gezeigten Art gesucht wird,

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 4 & & 7 & & 12 & & 1 & 3 \\ 1495 & : & 361 & : & 51 & : & 4 & : & 3 & : 1 \\ 1444 & & 357 & & 48 & & 3 & & 3 & \\ \hline 51 & & 4 & & 3 & & 1 & & 0 & \end{array}$$

so zeigt es sich, daß die zwey vorgelegten Zahlen 361 und 1495 außer 1 kein anderes gemeinschaftliches Maß haben, und daß sie daher Primzahlen unter sich sind.

Die Richtigkeit dieser gegebenen Regel läßt sich auf folgende allgemeine Art erweisen.

1) Es sey die größere Zahl $= a$ und die kleinere $= b$,

2) $a$ durch $b$ dividirt gebe $p$ zum Quotienten und $c$ zum Reste; nähmlich $\frac{a}{b} = p + \frac{c}{b}$; so ist (vermög §. 44) $a = bp + c$.

3) Der vorige Divisor $b$ durch den Rest $c$ getheilet, gebe $q$ zum Quotienten und $d$ zum Reste, nähmlich $\frac{b}{c} = q + \frac{d}{c}$; so ist wieder (vermög §. 44) $b = cq + d$.

4) Und nun wieder der vorige Divisor $c$ durch den zugehörigen Rest $d$ getheilet, gebe $r$ zum Quotienten und $e$ zum Reste, nähmlich $\frac{c}{d} = r + \frac{e}{d}$; so ist (vermög §. 44) $c = dr + e$.

5) Endlich der vorige Divisor $d$ durch den zugehörigen Rest $e$ getheilet, gebe den Quotienten $s$ ohne Rest; nähmlich $\frac{d}{e} = s$, so ist (vermög §. 44) $d = es$.

6) Und nun läßt sich leicht zeigen, daß nur der Divisor $e$ allein, womit zuletzt die Division genau aufging, in beyden vorgelegten Zahlen $a$ und $b$ genau enthalten, und ihr größtes gemeinschaftliches Maß sey.

7) Denn, da in Nr. 5. $d = es$ ist, so ist auch (wenn man diesen Werth in Nr. 4 statt $d$ setzet) (vermög §. 12, Grundf. Nr. 2) $c = ers + e$.

8) Aus der nähmlichen Ursache ist (wenn man jetzt den eben gefundenen Werth für $c$ in Nr. 3 setzt) $b = eqrs + eq + d$ und wenn man ferner auch für $d$ den Werth aus Nr. 5 setzt $b = eqrs + eq + es$.

9) Und endlich ist, wenn man den eben bestimmten Werth für $b$ in Nr. 2 setzt, $a = epqrs = + epq + eps + c$; und ferner: wenn man hier statt $c$ den Werth aus Nr. 7 setzt $a = epqrs + epq + eps + ers + e$.

10) Zerlegt man nun die in Nr. 8 und 9 gefundenen Werthe für $a$ und $b$ in Factoren, so ist

$$a = e\,(pqrs + pq + ps + rs + 1) \text{ und}$$
$$b = e\,(qrs + q + s)$$

woraus zu ersehen ist, daß die zwey vorgelegten Zahlen $a$ und $b$ außer dem letzten Divisor $e$ keinen andern gemeinschaftlichen Factor haben; einen kleinern z. B. $\frac{e}{2}$, $\frac{e}{3}$ können sie wohl haben, keineswegs aber einen größern, etwa $2e$, $3e$ u. s. w. Es ist nähmlich wohl begreiflich, daß zwey Zahlen, z. B. 72 und 48, wenn solche durch 24 theilbar sind, auch beyde durch 12, 8, 6 als die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel von 24, keineswegs aber auch durch 48, 72, 96 als das Doppelte, Dreyfache, Vierfache, vom nähmlichen Divisor 24 theilbar seyn müs-

sen. Wenn nun $e = 1$ wäre, so sind $a$ und $b$ Primzahlen unter sich. Es ist hier angenommen worden, daß bey der vierten Division der Divisor in dem zugehörigen Dividendus genau enthalten sey; die Schlußfolge bleibt immer die nähmliche, wenn sich solches entweder früher oder auch später zuträgt.

Scharfsinnige Anfänger können es versuchen, die nähmliche Schlußfolge zu machen, wenn erst bey der fünften, oder sechsten Division, der Divisor in dem Dividendus genau enthalten ist; diejenigen Anfänger aber, deren Verstandeskräfte durch die bisher gegebenen Gründe, noch nicht hinlänglich entwickelt sind, um bey dergleichen algebraischen Arbeiten die Schlußfolgen deutlich einzusehen, können den gegebenen Beweis indessen übergehen; und solchen in der Folge nach abgehandelter Lehre von den Gleichungen nachhohlen.

Anmerkung. Daß durch den Divisor $e$, womit zuletzt die Division genau aufging, beyde vorgelegten Größen $a$ und $b$ genau theilbar seyn, läßt sich auch mittelst nachstehender zwey bekannten, zum Theil schon oben (im §. 69) gebrauchten Sätze erweisen.

I. Wenn jeder Theil einer Summe durch irgend eine nähmliche Größe theilbar ist, so ist auch die ganze Summe durch die nähmliche Größe theilbar. Eben so wenn sowohl die ganze Summe als auch ein Theil dieser Summe durch irgend eine nähmliche Größe theilbar ist, so ist auch der andere Theil dieser nähmlichen Summe durch eben dieselbe Größe theilbar. Z. B. weil bey $18 + 12 = 30$ sowohl 18 als 12 durch 6 theilbar ist; so ist auch 30 durch 6 theilbar; und weil bey $14 + 21 = 35$ sowohl 35 als auch 14 durch 7 theilbar ist, so ist auch 21 durch 7 theilbar.

II. Wenn ein Factor eines Productes durch irgend eine Größe theilbar ist, so ist auch das Product durch die nähmliche Größe theilbar. Z. B. weil bey $37 . 14 . 3 = 1554$ der Factor 14 durch 7 theilbar ist, so ist auch das Product 1554 durch 7 theilbar.

Da nun (im §. 81, Nr. 5) $d$ durch $e$ theilbar ist, so ist wegen II. auch $dr$, und wegen I. auch $dr + e$ nähmlich $c$ in Nr. 4 durch $e$ theilbar; daher ist wegen II. auch $cq$, und wegen I. auch $cq + d$ nähmlich $b$ in Nr. 3 durch $e$ theilbar; weil nun $b$ durch $e$ theilbar ist, so ist wegen II. auch $bp$ durch $e$ theilbar; $c$ war auch durch $e$ theilbar; folglich ist wegen I. auch $bp + c$ nähmlich $a$ in Nr. 2 ebenfalls durch $e$ theilbar. Es sind daher beyde Größen $a$ und $b$ durch $e$ theilbar, wenn zuletzt mit $e$ die Division genau aufgeht.

Um nun auch zu erweisen, daß $e$ das größte gemeinschaftliche Maß von $a$ und $b$ sey, muß man noch darthun, daß die zwey Größen $a$ und $b$ durch eine andere Größe $f$, wenn $f > e$ ist, gar nicht theilbar seyn können; dieses kann auf folgende Art geschehen.

Es sey $f > e$, und wenn es möglich ist, so sey sowohl $a$ als auch $b$ durch $f$ theilbar; so ist $bp + c$ in Nr. 2 und $cq + d$ in Nr. 3 durch $f$ theilbar; es ist aber wegen II. auch $bp$ durch $f$ theilbar; folglich ist wegen I. auch $c$ in Nr. 2, und wegen II. auch $cq$ in Nr. 3 durch $f$ theilbar; da nun in Nr. 3 sowohl $b$ als auch $cq$ durch $f$ theilbar ist, so ist eben daselbst wegen I. auch $d$, und ferner wegen II. auch $dr$ in Nr. 4 durch $f$ theilbar; da endlich in Nr. 4 sowohl $c$ als auch $dr$ durch $f$ theilbar ist, so ist wegen I. auch $e$ in Nr. 4 durch $f$ theilbar, welches unmöglich ist, weil $f > e$ angenommen wurde; folglich ist auch unmöglich, daß sowohl $a$ als auch $b$ beyde zugleich durch $f$ theilbar seyn können, wenn $f > e$ ist; $e$ ist daher das größte gemeinschaftliche Maß der zwey Größen $a$ und $b$, wenn mit $e$ die letzte Division genau aufgeht.

## §. 82.

Wenn zwey oder mehrere Brüche einen nähmlichen Nenner haben, so werden sie Brüche von gleicher Benennung genannt; im Gegentheile heißen sie Brüche von verschiedener Benennung.

Es können aber Brüche von verschiedener Benennung auf gleiche Benennung gebracht werden, und zwar auf folgende Art:

1) Man multiplicire jeden Zähler mit allen Nennern, nur

mit seinem eigenen nicht, so erhält man dadurch bey jedem Bruche den neuen Zähler.

2) Sodann multiplicire man alle Nenner mit einander, so wird dieses Product der gemeinschaftliche Nenner der verwandelten Brüche seyn.

Z. B. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} = \frac{1.3.5}{2.3.5}, \frac{2.2.5}{2.3.5}, \frac{4.2.3}{2.3.5} = \frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{24}{30}$,

eben so ist $\frac{3}{4}, \frac{a}{b}, \frac{4c}{3a}, \frac{3b}{2}, = \frac{18ab}{24ab}, \frac{24a^2}{24ab}, \frac{32bc}{24ab}, \frac{36ab^2}{24ab}$.

Daß auf diese Art die Werthe der Brüche ungeändert bleiben, erhellet aus §. 79; weil der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einer nähmlichen Größe multipliciret wird.

Man kann demnach auch untersuchen, welcher von zweyen Brüchen, die verschiedene Zähler und Nenner haben, der größte sey, wenn man sie vorher auf gleiche Benennung bringt. So ist z. B. $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$; weil $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ und $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ ist.

## §. 83.

Wären viele Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, wo sodann nach dieser vorgeschriebenen Art der allgemeine Nenner zu groß ausfällt, so suche man ein solches Vielfaches vom größten Nenner auf, in welchem alle übrige Nenner ebenfalls genau enthalten sind. Hat man ein solches Vielfaches gefunden, so gibt dieses den allgemeinen Nenner; und um den neuen Zähler bey jedem Bruche zu erhalten, dividire man den allgemeinen Nenner durch den alten Nenner, und multiplicire den Quotienten mit dem alten Zähler, so hat man den neuen Zähler. Z. B. Es wären die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, auf gleiche Benennung zu bringen; so ist das Dreyfache von dem größten Nenner 8, nähmlich 24, schon so beschaffen, daß alle Nenner darin enthalten sind; darum nehme man 24 für den allgemeinen Nenner an, und die Brüche sind $\frac{12}{24}, \frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}$ anstatt $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$.

Daß auch hier die Werthe der Brüche ungeändert bleiben,

erhellet ebenfalls daraus, weil der Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit einer nähmlichen Zahl multipliciret wird.

§. 84.

Um aber das kleinste Vielfache vom größten Nenner, in welchem alle übrige Nenner genau enthalten sind, finden zu können, so suche man zu den zwey ersten Nennern die möglichst kleinste Zahl auf, in welcher beyde genau enthalten sind, wo man den einen Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Maß dividiren, und den Quotienten mit dem andern Nenner multipliciren muß; zu dieser gefundenen Zahl und zum nächstfolgenden Nenner suche man wieder auf eben diese Art die kleinste Zahl auf, in welcher beyde enthalten sind; und so fahre man fort, bis kein Nenner mehr übrig ist, so hat man die verlangte Zahl. Z. B. es soll die kleinste Zahl aufgesucht werden, worin die Nenner 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, genau enthalten sind, so ist

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2
56 168 840 840 840 840

nähmlich 8 und 7 haben keinen gemeinschaftlichen Factor; daher ist $8 \cdot 7 = 56$ die kleinste Zahl, in welcher beyde genau enthalten sind. Ferner 56 und 6 haben zum größten gemeinschaftlichen Factor 2; 2 in 6 geht 3 mahl; 56 mahl 3 sind 168; 5 und 168 haben keinen gemeinschaftlichen Factor; daher ist $5 \cdot 168 = 840$ die kleinste Zahl, in welcher beyde genau enthalten sind; übrigens ist 4, 3, 2 auch schon in 840 enthalten; daher ist 840 die gesuchte Zahl.

§. 85.

Wenn ein Bruch in einen andern verwandelt werden soll, dessen Nenner gegeben ist, so multiplicire man den Zähler mit dem gegebenen Nenner, und dividire das Product durch den alten Nenner, so hat man den neuen Zähler. Z. B. es sey $\frac{86}{125}$ in einen andern Bruch zu verwandeln, dessen Nenner $= 1000$ seyn soll; so ist der neue Zähler $= 86 \cdot 1000 : 125 = 688$; nähmlich $\frac{86}{125} = \frac{688}{1000}$. Eben so, wenn der Bruch $\frac{5}{6}$ in einen andern

verwandelt werden soll, dessen Nenner 32 ist, so ist der neue Zähler $= 5 \cdot 32 : 6 = 26\frac{2}{3}$; daher $\frac{5}{6} = \frac{26\frac{2}{3}}{32}$. Sollte hingegen ein gegebener Bruch in einen andern verwandelt werden, dessen Zähler gegeben ist, so multiplicire man den Nenner des Bruches mit dem gegebenen Zähler, und dividire das Product durch den alten Zähler, so hat man den neuen Nenner. Z. B. der Bruch $\frac{3}{4}$ soll in einen andern verwandelt werden, dessen Zähler 12 ist, so ist der Nenner gleich $\frac{12 \cdot 4}{3} = 16$, und der Bruch ist $\frac{12}{16}$.

Daß auf diese Art der Werth des Bruches ungeändert bleibe, erhellet aus §. 79.

## §. 86.

Wenn man zum Zähler und Nenner eines Bruches Gleiches addiret, so wird der Werth des Bruches geändert, und zwar vermehrt, wenn es ein echter Bruch, hingegen vermindert, wenn es ein Afterbruch ist; nähmlich es ist $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, wenn $a < b$ ist; und $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, wenn $a > b$ ist. Denn man bringe die Brüche auf gleiche Benennung, so hat man $\frac{ab+ac}{b(b+c)}$ statt $\frac{a}{b}$, und $\frac{ab+bc}{b(b+c)}$ statt $\frac{a+c}{b+c}$; wo $ac < bc$, wenn $a < b$; und $ac > bc$, wenn $a > b$ ist. Und umgekehrt ist es, wenn man von eines Bruches Zähler und Nenner Gleiches abzieht; es ist nähmlich $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b-c}$, wenn $a < b$; hingegen $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-c}$, wenn $a > b$ ist.

# II. Abschnitt.

## Von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Brüche.

### §. 87.

Bey der Addition der Brüche beobachte man folgende Regeln:

1) Haben die Brüche gleiche Nenner, so addire man die Zähler, und unterschreibe den gemeinschaftlichen Nenner, z. B.

$$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{17}{7} = 2\tfrac{3}{7};$$

$$\frac{2a^2}{5b} - \frac{3a^2}{5b} + \frac{x^2}{5b} = \frac{x^2 - a^2}{5b}$$

2) Haben die zu addirenden Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie (nach §. 82, 83) auf gleiche Benennung, addire sodann die Zähler, und unterschreibe den gemeinschaftlichen Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70 + 84 + 90}{105} = \frac{244}{105} = 2\tfrac{34}{105};$$

$$\frac{7}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{19}{24}$$

$$= \frac{21 + 16 + 12 + 14 + 20 + 18 + 19}{24} = \frac{140}{24} = 5.$$

$$\frac{2c}{3ab} + \frac{1}{2} + \frac{5a}{4b} = \frac{8c + 6ab + 15a^2}{12ab}.$$

3) Sind nebst Brüchen auch Ganze zu addiren, so kann man sie entweder besonders addiren, oder in Afterbrüche verwandeln (§. 76), und zu den übrigen Brüchen addiren; so ist z. B.

$$3\tfrac{2}{3} + 7\tfrac{1}{2} + \frac{2}{3} = 3 + 7 + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

$$= 10 + \frac{12 + 15 + 20}{30} = 10 + \frac{47}{30} = 11 + \frac{17}{30}.$$

$$5\tfrac{2}{3} + 6\tfrac{5}{6} + 7\tfrac{3}{4} + 8\tfrac{1}{2} = 26 + \frac{8 + 10 + 9 + 6}{12}$$

$$= 26 + \frac{33}{12} = 28\tfrac{3}{4}.$$

$$a + \frac{b}{3} - \frac{2b}{5} + \frac{c}{x} = \frac{15ax + 5bx - 6bx + 15c}{15x}$$

$$= \frac{15ax - bx + 15c}{15x}.$$

## §. 88.

Bey der Subtraction der Brüche beobachte man folgendes:

1) Man bringe die Brüche auf gleiche Benennung, wenn sie noch verschiedene Nenner haben sollten, ziehe sodann die Zähler von einander ab, und unterschreibe der Differenz den gemeinschaftlichen Nenner; so ist z. B.

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{5}{12} - \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14-12}{21} = \frac{2}{21};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{2a}{3b} = \frac{3a-2a}{3b} = \frac{a}{3b}.$$

2) Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl eine Einheit, verwandle selbe in einen Bruch, der mit dem abzuziehenden einerley Nenner hat, ziehe sodann den Zähler des abzuziehenden Bruches von dem Zähler dieses Bruches ab; z. B.

$$5 - \frac{2}{3} = 4\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3};$$

$$1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8};$$

$$8 - 4\frac{3}{5} = 7\frac{5}{5} - 4\frac{3}{5} = 3\frac{2}{5};$$

$$3a - \frac{2a}{5} = \frac{15a - 2a}{5} = \frac{13a}{5};$$

$$8\frac{3}{4} - 5 = 3\frac{3}{4}.$$

3) Sind ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen von einander abzuziehen, so ziehe man die Brüche von einander, und auch die Ganzen von einander ab; z. B.

$$4\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 4 - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2};$$

$$5\frac{3}{4} - 3\frac{2}{3} = 5 - 3 + \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = 2\frac{1}{12};$$

$$\left(6+\frac{b}{c}\right)-\left(5a+\frac{3b}{4c}\right)=6a-5a+\frac{b}{c}-\frac{3b}{4c}$$
$$=a+\frac{4b-3b}{4c}=a+\frac{b}{4c}.$$

4) Wäre aber der Bruch, von welchem abgezogen werden soll, kleiner als jener, welcher abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl eine Einheit, mache sie zum Bruche von gleichem Nenner, addire die Zähler zusammen, und verrichte die Subtraction; z. B.

$8\frac{1}{4}-5\frac{3}{4}=7\frac{5}{4}-5\frac{3}{4}=2\frac{2}{4}=2\frac{1}{2}$;
$12\frac{2}{3}-3\frac{4}{5}=12\frac{10}{15}-3\frac{12}{15}=11\frac{25}{15}-3\frac{12}{15}=8\frac{13}{15}$.

## §. 89.

Bey der Multiplication der Brüche ist folgendes zu bemerken:

1) Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicire man nur den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl, und lasse den Nenner ungeändert; denn dadurch wird der Bruch so vielmahl vergrößert, als die ganze Zahl Einheiten enthält (§. 77); so ist z. B.

$$5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\tfrac{1}{3}.$$
$$\frac{5}{6}\times 12=\frac{60}{6}=10.$$
$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}.$$

Auch kann zwar ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, wenn man den Nenner durch die ganze Zahl dividiret, weil der Bruch dadurch ebenfalls so vielmahl vergrößert wird, als die Zahl Einheiten enthält (§. 78); allein da der Nenner gar selten sich durch die ganze Zahl genau theilen läßt, so ist es besser, sich der ersten Regel zu bedienen.

2) Ist eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche, mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so multiplicire man mit der ganzen Zahl zuerst den Bruch, und hernach die Ganzen, ziehe aber die im ersten Producte befindlichen Ganzen heraus, und addire selbe zum zweyten Producte; z. B.

$$5\tfrac{3}{4} \cdot 6 = \frac{3}{4} \cdot 6 + 5 \cdot 6 = \frac{18}{4} + 5 \cdot 6$$

$$= 4 + \frac{2}{4} + 30 = 34\tfrac{1}{2}.$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \cdot d = ad + \frac{bd}{c}.$$

3) Wäre aber ein Bruch mit einem andern Bruche zu multipliciren, so multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner, so ist dieser neue Bruch das verlangte Product; nähmlich $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, welches sich folgender Maßen erweisen läßt.

| | | |
|---|---|---|
| Man setze $\frac{a}{b} = m$ | $\frac{a}{b} \cdot b = m \cdot b$ | $a = mb$ |
| | so ist auch | nähmlich |
| und $\frac{c}{d} = n$ | $\frac{c}{d} \cdot d = n \cdot d$ | $c = nd$ |

Es ist also (§. 29, Grundsatz 1) . . . $ac = mnbd$ und (§. 39, Grundsatz 1) $\frac{ac}{bd} = \frac{mnbd}{bd}$, nähmlich $m \cdot n = \frac{ac}{bd}$.

Setzet man nun wieder $\frac{a}{b}$ statt $m$, und $\frac{c}{d}$ statt $n$, so ist $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Da nun jede zwey zu multiplicirende Brüche durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ vorgestellet werden können, so ist ihr Product auch gleich dem Producte der Zähler dividirt durch das Product der Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}; \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}; \quad \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{56}{135}.$$

4) Sind beyde Factoren ganze Zahlen, nebst angehängten Brüchen, so mache man selbe zu Afterbrüchen (§. 76) und verrichte die Multiplication; z. B.

$$5\tfrac{2}{3} \cdot 3\tfrac{4}{5} = \frac{17}{3} \cdot \frac{19}{5} = \frac{323}{15} = 21\tfrac{8}{15};$$

oder man multiplicire mit dem Bruche und mit den Ganzen des einen Factors, den Bruch und auch die ganze Zahl des andern Factors; z. B.

$$2\tfrac{3}{4} \cdot 5\tfrac{3}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot 2 + 5 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot 2$$

$$= \frac{6}{28} + \frac{4}{7} + \frac{15}{4} + 10 = \frac{6 + 16 + 105}{28} + 10$$

$$= 10 + \frac{127}{28} = 14\tfrac{15}{28}.$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right)\left(d + \frac{c}{a}\right) = ad + \frac{bd}{c} + \frac{ac}{a} + \frac{bc}{ac}$$

$$= ad + \frac{bd}{c} + c + \frac{b}{a}.$$

## §. 90.

Bey der Division der Brüche ist folgendes zu merken:

1) Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll, so multiplicire man den Nenner mit der ganzen Zahl, und lasse den Zähler ungeändert; denn dadurch wird der Bruch (vermög §. 78) so vielmahl kleiner, als die ganze Zahl Einheiten enthält. So ist z. B.

$$\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}; \quad \frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{15}; \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

2) Soll aber ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so kehre man den Divisor um, und multiplicire den Dividendus mit demselben (nach §. 89, Nr. 3); z. B.

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{5} = 1\tfrac{1}{5};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

| | | |
|---|---|---|
| | $\frac{a}{b} = m$ | $\frac{ab}{b} = mb$ | $a = mb$ |
| Denn man setze wieder | | so ist auch | nähmlich |
| | $\frac{c}{d} = n$ | $\frac{cd}{d} = nd$ | $c = nd$ |

Es ist also auch (§. 39, Grundsatz 1) . . $\frac{a}{c} = \frac{mb}{nd}$ und (§. 29,

Grundsatz 1) $\frac{a}{c} \times \frac{d}{b} = \frac{mb}{nd} \times \frac{d}{b}$ nähmlich $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$; es ist aber $\frac{m}{n} = m:n = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$; also auch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

3) Ist eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren; so kehre man ebenfalls den Divisor um, und verrichte die Multiplication; denn es ist:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b};$$

$$5 : \frac{2}{3} = 5 : \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2}.$$

4) Kommen ganze Zahlen nebst angehängten Brüchen zu dividiren vor, so verwandle man selbe in Afterbrüche und verrichte nach obigen Regeln die Division; z. B.

$$3\tfrac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{3}{4} = \frac{17}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{68}{15} = 4\tfrac{8}{15};$$

$$3 : 4\tfrac{1}{2} = 3 : \frac{9}{2} = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3};$$

$$2\tfrac{1}{3} : 1\tfrac{3}{4} = \frac{7}{3} : \frac{7}{4} = \frac{7}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3};$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(b - \frac{a}{d}\right) = \frac{ac+b}{c} : \frac{bd-a}{d}$$

$$= \frac{ac+b}{c} \cdot \frac{d}{bd-a} = \frac{acd+bd}{bcd-ac}.$$

Anmerkung. Der Anfänger, der die Regeln von der Multiplication und Division der Brüche nicht leicht im Gedächtnisse behalten kann, kann sich nur die zwey Regeln (im §. 89, Nr. 3, und hier im §. 90, Nr. 2) merken; nähmlich wie ein Bruch mit einem Bruche multiplicirt, und wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividiret wird; kommen nun auch ganze Zahlen mit vor, so kann die ganze Zahl als ein Bruch, dessen Nenner = 1 ist, vorgestellet werden; so ist z. B.

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c};$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc};$$

$$c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{bc}{a} \text{ u. s. w.}$$

## §. 91.

Ein gebrochener Bruch, oder ein Bruch eines Bruches wird genommen, wenn man die Zähler und Nenner der Brüche miteinander multipliciret; z. B. $\frac{3}{10}$ des Bruches $\frac{5}{6}$ ist $= \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 10} = \frac{15}{60}$; denn $\frac{3}{10}$ des Bruches $\frac{5}{6}$ heißt nichts anders, als daß man den Bruch $\frac{5}{6}$ in 10 gleiche Theile theilen, und 3 solche Theile davon nehmen soll; nun ist $\frac{5}{6} : 10 = \frac{5}{6 \cdot 10}$, und dieses dreymahl genommen gibt $\frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 10}$.

## §. 92.

Durch die Rechnungsarten mit Brüchen können nun auch benannte Zahlen einer kleinen Gattung als Brüche von jeder größern Gattung vorgestellet werden, welches bey der Multiplication und Division der benannten Zahlen oft gute Dienste leisten kann; so ist z. B.

$$5 \text{ Fl.} + 17 \text{ Kr.} = 5\tfrac{17}{60} \text{ Fl.} = \frac{317}{60} \text{ Fl.}$$

$$4 \text{ Sch.} + 8 \text{ Zoll} = 4\tfrac{8}{12} \text{ Sch.} = 4\tfrac{2}{3} \text{ Sch.} = \frac{14}{3} \text{ Sch.}$$

$$2 \text{ Kl.} + 0 \text{ Sch.} + 9 \text{ Z.} = 2 \text{ Kl.} + \frac{9}{12} \text{ Sch.} = 2 \text{ Kl.} + \frac{3}{4} \text{ Sch.}$$

$$= 2\tfrac{3}{24} \text{ Kl.} = 2\tfrac{1}{8} \text{ Kl.} = \frac{17}{8} \text{ Kl.}$$

$$8 \text{ Pf.} + 20 \text{ L.} + 3 \text{ D.} = 8 \text{ Pf.} + 20\tfrac{3}{4} \text{ L.} = 8 \text{ Pf.} + \frac{83}{4} \text{ L.}$$

$$= 8\tfrac{83}{128} \text{ Pf.} = \frac{1107}{128} \text{ Pf.};$$

$$3 \text{ St.} + 15 \text{ Minut.} + 45 \text{ Sec.} = 3 \text{ St.} + 15\tfrac{45}{60} \text{ Minut.}$$

$$= 3 \text{ St.} + 15\tfrac{3}{4} \text{ Min.} = 3 \text{ St.} + \tfrac{63}{4} \text{ Min.} = 3\tfrac{63}{240} \text{ St.}$$

$$= 3\tfrac{21}{80} \text{ St.} = \frac{261}{80} \text{ St.}$$

## §. 93.

Wenn in einer Rechnung benannte Brüche vorkommen, die sich auf verschiedene Einheiten beziehen, so müssen selbe vorher auf gleiche Nahmen gebracht werden, und sodann können erst die bisher gegebenen Rechnungsarten angewendet werden: so ist z. B.

$$\frac{3}{4}\,\text{St.} + \frac{2}{5}\,\text{M.} = \frac{3}{4}\,\text{St.} + \frac{2}{5.60}\,\text{St.} = \frac{3.5.15}{4.5.15}\,\text{St.}$$

$$+\frac{2}{5.60}\,\text{St.} = \frac{227}{300}\,\text{St.}$$

$$\text{oder } \frac{3}{5}\,\text{St.} + \frac{2}{3}\,\text{M.} = \frac{3.60}{5}\,\text{M.} + \frac{2}{3}\,\text{M.} = 36\tfrac{2}{3}\,\text{M.}$$

$$\frac{4}{5}\,\text{Pf.} : \frac{3}{2}\,\text{L.} = \frac{4}{5}\,\text{Pf.} : \frac{3}{64}\,\text{Pf.} = \frac{4}{5} \cdot \frac{64}{3}$$

$$= \frac{256}{15} = 17\tfrac{1}{15}\text{mahl};$$

$$\text{oder } \frac{4}{5}\,\text{Pf.} : \frac{3}{2}\,\text{L.} = \frac{4.32}{5}\,\text{L.} : \frac{3}{2}\,\text{L.} = \frac{4.32.2}{5.3}$$

$$= 17\tfrac{1}{15}\text{mahl.}$$

## §. 94.

Einige Fragen zur Anwendung der Rechnungsarten mit Brüchen.

1. Frage. Zu einer gewissen Montur wird erfordert, zum Rocke $2\frac{1}{6}$ Ellen, zur Weste $\frac{3}{4}$ Ellen, und zu den Hosen $\frac{7}{8}$ Ellen Tuch; wie viel beträgt dieß zusammen?

Antwort. $2\frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} = 2\frac{4}{24} + \frac{18}{24} + \frac{21}{24}$
$= 2\frac{43}{24} = 3\frac{19}{24}$ Ellen.

2. Frage. Ein massiv gegossenes Kanonenrohr wiegt $56\frac{2}{3}$ Centner, und nach der Bohrung hatte dasselbe nur $51\frac{3}{4}$ Centner; wie viel Metall ist herausgebohret worden?

Antwort. $56\frac{2}{3} - 51\frac{3}{4} = 56\frac{8}{12} - 51\frac{9}{12} = 55\frac{20}{12} - 51\frac{9}{12}$
$= 4\frac{11}{12}$ Centner.

3. Frage. Wie viel muß man für einen Balken; welcher $11^0 + 4^1 + 8^{11}$ lang ist, bezahlen, wenn jede Klafter davon 5 Fl. 17 Kr. kostet.

Antwort. Da $11^0 + 4^1 + 8^{11} = \frac{106^0}{9}$, und 5 Fl. 17 Kr. $= \frac{317}{60}$ Fl. ist, so kostet der ganze Balken $\frac{106}{9} \cdot \frac{317}{60}$ F. $= \frac{33602}{540}$ Fl. $= 62\frac{61}{270}$ Fl. $= 62$ Fl. $13\frac{5}{9}$ Kr.

4. Frage. Wie viel Patronen können von $3\frac{1}{2}$ Centner Pulver erzeugt werden, wenn jede Patrone mit $1\frac{3}{4}$ Pf. Pulver gefüllet wird?

Antwort. Da $3\frac{1}{2}$ Cent. $= 350$ Pf., und $1\frac{3}{4}$ Pf. $= \frac{7}{4}$ Pf., so ist die gesuchte Anzahl der Patronen $= 350 : \frac{7}{4} = 200$.

5. Frage. Es ist aus der Erfahrung bekannt, daß das Gold, wenn es ganz ins Wasser getaucht wird, darin beyläufig $\frac{2}{37}$ seines Gewichtes verliere; das Silber aber verliert $\frac{2}{21}$, und das Kupfer $\frac{5}{43}$ seines Gewichtes; wie viel wird nun ein Körper, wobey sich $1\frac{1}{2}$ Pf. Gold, $3\frac{2}{3}$ Pf. Silber, und $2\frac{3}{4}$ Pf. Kupfer befinden, an seinem Gewichte im Wasser verlieren?

Antwort. $\frac{2}{37}$ von $1\frac{1}{2} = \frac{2}{37} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{37}$; $\frac{2}{21}$ von $3\frac{2}{3} = \frac{2}{21} \cdot \frac{11}{3} = \frac{22}{63}$; und $\frac{5}{43}$ von $2\frac{3}{4} = \frac{5}{43} \cdot \frac{11}{4} = \frac{55}{172}$ folglich ist der Verlust des Körpers im Wasser $= \frac{3}{37} + \frac{22}{63} + \frac{55}{172} = \frac{300721}{400932}$ Pfund $= 24$ Loth beynahe.

---

# III. Abschnitt.

## Von den Decimalbrüchen.

### §. 95.

Wenn man bey einer ganzen Zahl rechts hinter den Einheiten noch mehrere Ziffer anhängt, deren Werth nach eben dem dekadischen Gesetze, so wie die übrigen Ziffern (§. 6) von der

Linken gegen die Rechte zehnfach abnehmen soll, so werden solche keine ganzen Einheiten, sondern Brüche vorstellen müssen; und zwar wird die erste neben den Einheiten Zehntel einer Einheit, die zweyte Hunderttel einer Einheit, die dritte Tausendtel einer Einheit, u. s. w. bedeuten. Solche Brüche werden Decimalbrüche oder zehntheilige Brüche genannt. Und damit solche von den dabey befindlichen Ganzen unterschieden werden können, so werden sie von den ganzen Einheiten durch ein Comma (,) abgesondert, wo sodann die Ziffern links vor dem Comma ganze Einheiten bedeuten, und jene rechts werden Decimalstellen oder Decimalziffern genannt. So z. B. ist 35,7859 ein Decimalbruch mit vier Decimalstellen und bedeutet 35 ganze Einheiten, 7 Zehntel, 8 Hunderttel, 5 Tausendtel, und 9 Zehntausendtel einer Einheit; nähmlich es

$$\text{ist } 35{,}7859 = 35 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{9}{10000} = 35$$

$$+ \frac{7000}{10000} + \frac{800}{10000} + \frac{50}{10000} + \frac{9}{10000} = 35 + \frac{7859}{10000}$$

$$= \frac{357859}{10000}\text{; ingleichen ist } 4{,}09 = 4 + \frac{9}{100} = \frac{409}{100}\text{. Eben}$$

so heißt 0,43 kein Ganzes, 4 Zehntel, und 3 Hunderttel $= \frac{43}{100}$; ingleichen $0{,}005 = \frac{5}{1000}$.

## §. 96.

Aus diesem ist zu ersehen, daß man im erforderlichen Falle einem Decimalbruche leicht seinen Nenner unterschreiben kann, indem derselbe jederzeit aus einer Einheit nebst so vielen angehängten Nullen besteht, als der Bruch Decimalstellen hat; und man kann daher auch sagen: ein Decimalbruch ist ein solcher Bruch, der eine bloße Einheit nebst einigen angehängten Nullen (eine dekadische Zahl) zu seinem Nenner hat.

Und umgekehrt, wenn ein mit seinem Nenner versehener Decimalbruch in seiner echten Gestalt, das ist, ohne Nenner geschrieben werden soll, so darf man nur in dem Zähler von der Rechten gegen die Linke so viele Zif-

fern für Decimalstellen abschneiden; als der Nenner Nullen hat, wo der Abgang, wenn der Zähler nicht genug Ziffern enthalten sollte, links mit Nullen ergänzt werden muß. Z. B.

$\frac{86504}{10001} = 86{,}504$; $\frac{56}{100} = 0{,}56$; $\frac{4}{10000} = 0{,}0004$.

§. 97.

Auch ist hieraus zu ersehen, daß man an einen Decimalbruch rechts so viele Nullen anhängen kann, als man will, ohne daß dadurch der Werth des Bruches geändert wird. Denn es ist z. B. $7{,}58 = 7{,}5800$. Eben so kann auch eine bloße ganze Zahl als ein Decimalbruch vorgestellet werden, indem man nur eine beliebige Anzahl Nullen anhängt, und dieselbe durch ein Comma absondert; z. B. $12 = 12{,}000$.

Es ist daher sehr leicht, Decimalbrüche auf gleiche Benennung zu bringen, indem man an jene, welche weniger Decimalstellen haben, so viele Nullen hinten anhängt, damit sodann jeder aus gleich viel Decimalstellen bestehe.

§. 98.

Es ist öfters erforderlich, einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, welcher demselben entweder vollkommen, oder auch nur bis auf eine bestimmte Decimalstelle am Werthe gleich ist; dieses geschieht auf folgende Art:

1) Ist es ein Afterbruch, so dividire man den Zähler durch den Nenner, und man bekommt die ganzen Einheiten; wäre es aber ein echter Bruch, so muß an die Stelle der ganzen Einheiten eine Null gesetzt werden.

2) An den Rest hänge man eine Nulle, dividire dieses wieder durch den Nenner, so wird der Quotient Zehntel bedeuten; dieser wird mit dem Divisor multipliciret, und gehörig abgezogen. An den Rest hänge man wieder eine Nulle, dividire dieß wieder durch den Nenner, so hat man die Hunderttel u. s. w.

3) Fährt man nun auf diese Art fort, und die Division geht einmahl ohne Rest genau auf, so ist der gegebene Bruch dem gefundenen Decimalbruch vollkommen gleich, welches bey allen den-

jenigen Brüchen Satt findet, deren Nenner 2, 4, 8, 16, 32.... 5, 25, 125..... oder ein Product von diesen Zahlen ist.

Beyspiele.

$\frac{23}{4} = 23:4 = 5{,}75$

20
30
28
20
20
0

$\frac{76}{125} = 76:125 = 0{,}608$

760
750
100
1000
1000
0

$\frac{694}{32} = 694:32 = 21{,}6875.$

4) Bey den übrigen Brüchen aber geht die Division zwar niemahls zu Ende; doch aber darf man, auf die eben vorgeschriebene Art, die Division nur so lang fortsetzen, bis man zum zweyten Mahle einen nähmlichen Rest erhält, wo sodann die Decimalstellen in der schon bekannten Ordnung wiederhohlt ohne Ende fortgehen.

Beyspiele.

$\frac{5}{3} = 5:3 = 1{,}6666\ldots;$

3
20
18
20

$\frac{7}{11} = 7:11 = 0{,}636363\ldots.$

70
66
40
33
70

$\frac{6}{7} = 6:7 = 0{,}857142857142\ldots.$

5) Von diesen Decimalstellen können nun so viele beybehalten werden, als es nur immer die Richtigkeit einer Rechnung erfordern kann, so daß die übrigen ohne merklichen Fehler gänzlich hinweg gelassen werden können; nur kann man, um den Fehler noch kleiner zu machen, die letzte Decimalstelle um eins vermehren, wenn die nachfolgende Ziffer größer ist als 5; z. B. $\frac{6}{7} = 0{,}85714286$ anstatt 0,85714285, weil die folgende 9te Decimalziffer ein 7 ist.

§. 99.

Bey der Addition der Decimalbrüche schreibe man dieselben, so wie auch die ganzen Zahlen, wenn sie dazu addirt werden sollen, dergestalt untereinander, daß die Stricheln, welche die Decimalstellen von den ganzen Einheiten absondern, gerade untereinander zu stehen kommen, und addire übrigens wie bey den ganzen Zahlen; nur muß in der Summe das Comma ebenfalls an die vorige Stelle gesetzt werden.

Beyspiele.

| | | |
|---|---|---|
| 3,04 | 23,07543 | 312 |
| 26,1735 | 0,923 | 25,73 |
| 7,5 | 6,0024 | 0,364 |
| 36,7135 | 30,00083 | 338,094 |

§. 100.

Bey der Subtraction der Decimalbrüche ordne man dieselben so, wie bey der Addition, und subtrahire wie gewöhnlich; nur muß man dem Decimalbruche, von welchem ein anderer Decimalbruch mit mehr Decimalstellen abgezogen werden soll, so viele Nullen in Gedanken hinzufügen, damit beyde gleichviel Decimalstellen haben.

Beyspiele.

| | | |
|---|---|---|
| 12,3257 | 60,57 | 13 |
| 4,56 | 0,9856 | 2,346 |
| 7,7657 | 59,5844 | 10,654 |

Wenn ein gemeiner Bruch zu einem Decimalbruche zu addiren, oder davon zu subtrahiren ist, so verwandle man selben in einen Decimalbruch (nach §. 98); z. B.

$$3{,}465 + \frac{3}{4} = 3{,}465 + 0{,}75 = 4{,}215;$$

$$\frac{17}{6} - 1{,}34 = 2{,}8333.. - 1{,}34 = 1{,}4933...$$

§. 101.

Hat man Decimalbrüche untereinander, oder Decimalbrüche mit ganzen Zahlen zu multipliciren, so verrichte man die Multiplication, als wenn es lauter ganze Zahlen wären, und schneide im Producte von der Rechten gegen die Linke so viele Decimal-

stellen ab, als beyde Factoren deren haben; wo der Abgang, wenn nicht genug Ziffern vorhanden seyn sollten, links mit Nullen besetzt werden muß.

Beyspiele.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,44 | 3,046 | 0,337 | 0,26 |
| 1,2 | 0,32 | 0,023 | 17 |
| 288 | 6092 | 1011 | 182 |
| 144 | 9138 | 674 | 26 |
| 1,728 | 0,97472 | 0,007751 | 4,42. |

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich leicht überzeugen, wenn man den zu multiplicirenden Decimalbrüchen ihre Nenner unterschreibt, und selbe (nach §. 89, Nr. 3) multipliciret.

§. 102.

Ist ein Decimalbruch mit 10 zu multipliciren, so rücke man nur das Comma um eine Stelle weiter gegen die Rechte; denn dadurch erhält jede Ziffer einen zehnfachen Werth. (§. 6.)

Ist er mit 100 zu multipliciren, so rücke man das Comma um zwey Stellen, mit 1000 um drey Stellen u. s. w.

Beyspiele.

$4{,}587 \times 10 = 45{,}87$; $9{,}307 \times 100 = 930{,}7$;
$0{,}5386 \times 1000 = 538{,}6$.

Läßt man daher bey einem Decimalbruche das Comma, welches die Decimalstellen absondert, gänzlich hinweg, und betrachtet ihn als eine bloße ganze Zahl, so wird dadurch der Decimalbruch mit 1 nebst so vielen angehängten Nullen multipliciret, als Decimalstellen vorhanden waren.

§. 103.

Bey der Division der Decimalbrüche, es möge ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl, oder durch einen Decimalbruch, oder auch eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch zu dividiren seyn, beobachte man folgende Regel.

Man unterschreibe den Divisor unter den Dividendus in Gestalt eines gewöhnlichen Bruches, hänge dem Zähler oder dem Nenner, je nachdem einer oder der andere weniger Deci-

malstellen hat, so viele Nullen an, daß beyde gleichviel Decimalstellen haben, lasse sodann das Comma, welches die Decimalstellen absondert, gänzlich hinweg, (indem man sich einbildet, daß Zähler und Nenner mit einer nähmlichen Zahl multiplicirt wird) und verwandle sodann diesen Bruch (nach §. 98) in einen Decimalbruch, so hat man den richtigen Quotienten.

### Beyspiele.

$$3{,}045 : 15 = \frac{3{,}045}{15{,}000} = \frac{3045}{15000} = 0{,}203;$$

$$2{,}134 : 0{,}12 = \frac{2{,}134}{0{,}120} = \frac{2134}{120} = 17{,}7833;$$

$$0{,}0036 : 4{,}8 = \frac{0{,}0036}{4{,}8000} = \frac{36}{48000} = 0{,}00075;$$

$$24 : 0{,}006 = \frac{24{,}000}{0{,}006} = \frac{24000}{6} = 4000.$$

Wenn ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl, die auch einige Decimalstellen haben kann, zu dividiren ist; so kann die Division auch kürzer, ohne daß man selbe Bruchweise ansetzt, verrichtet werden, wie es in folgenden Beyspielen zu ersehen ist. Im Beyspiele Nr. 1 sagt man nähmlich: 6 in 7 Ganzen geht 1 mahl, und bleibt 1; 6 in 13 Zehnteln geht 2 mahl, und bleibt 1; 6 in 15 Hundertteln geht 2 mahl, bleiben 3; 6 in 36 Tausendteln geht 6 mahl. Eben so sagt man im Beyspiele Nr. 2: 4 in 0 Ganzen geht 0 mahl; 4 in 0 Zehnteln geht 0 mahl; 4 in 6 Hundertteln geht 1 mahl, 43 von 65 bleiben 22 u. s. w.

### Beyspiele.

Nr. 1.

$7{,}356 : 6 = 1{,}226$

Nr. 2.

$0{,}06537 : 4{,}3 = 0{,}0152.$

43

223

215

87

Soll endlich ein Decimalbruch durch 10, 100, 1000 ꝛc. dividiret werden, so darf man nur das Comma, um 1, 2, 3 ... Stellen weiter zur Linken rücken; dadurch erhält jede Ziffer

einen zehn=, hundert=, tausendmahl kleinern Werth (§. 6 und 95); z. B.

$$53{,}436 : 10 = 5{,}3436;$$
$$32{,}43 : 100 = 0{,}3243;$$
$$5{,}38 : 1000 = 0{,}00538.$$

## §. 104.

Wäre ein Decimalbruch mit einem gemeinen Bruche zu multipliciren, oder zu dividiren, so verwandle man entweder den Bruch in einen Decimalbruch; oder man sehe den Decimalbruch für eine ganze Zahl an, und verrichte die Multiplication oder die Division (nach §. 89, Nr. 1, und §. 90, Nr. 1—3); nur muß das Comma jederzeit an die gehörige Stelle gesetzt werden; z. B.

$$2{,}04 \times \frac{3}{4} = \frac{2{,}04 \times 3}{4} = \frac{6{,}12}{4} = 1{,}53.$$

$$\frac{5}{6} : 0{,}342 = \frac{5}{6 \times 0{,}342} = \frac{5}{2{,}052} = \frac{5000}{2052} = 2{,}436.$$

## §. 105.

Der Werth eines benannten Decimalbruches wird in Einheiten kleinerer Gattung gefunden, wenn man ihn mit der Zahl multipliciret, welche anzeiget, wie viel Einheiten kleinerer Gattung in einer Einheit, worauf sich der Decimalbruch bezieht, enthalten sind; so z. B. findet man

4,3 Tag = 4 T. 7 St. 12 M.

24

7,2 Stunden

60

12,0 Minuten

3,41 Kl. = 3 Kl. 2 Sch. 5 Zoll

6

2,46 Schuhe

12

92

46

5,52 Zoll u. s. w.

## §. 106.

Zuweilen sind Decimalbrüche miteinander zu multipliciren, deren Product man nur mit etlichen Decimalstellen richtig verlangt, und öfters auch nicht mehrere richtig erhalten kann. In solchen Fällen kann die Multiplication sehr geschwind auf folgende Art verrichtet werden. Man multiplicire mit der ersten links

stehenden bedeutlichen Ziffer des Multiplicators den ganzen Multiplicandus von der Rechten gegen die Linke, und schneide in diesem Partialproducte die ganzen Einheiten von den Decimalstellen gehörig ab; mit der zweyten links stehenden Ziffer des Multiplicators multiplicire man den ganzen Multiplicandus von der zweyten rechtsstehenden Ziffer des Multiplicandus angefangen, und addire die von dem Producte der vorhergehenden Ziffer gebliebenen Einheiten in Gedanken hinzu; eben so multiplicire man mit der dritten links stehenden Ziffer des Multiplicators den ganzen Multiplicandus von der dritten rechts stehenden Ziffer des Multiplicandus angefangen; mit der vierten links in die vierte rechts u. s. w., und schreibe diese Partialproducte untereinander, so wird ihre Summe das gesuchte Hauptproduct zum Vorschein bringen.

## Beyspiele.

| | | |
|---|---|---|
| 8,99875477 | Multiplicandus | 2,30258509 |
| 0,43429448 | Multiplicator | 3,9600901 |
| 3,599501908 | | 6,90775527 |
| 269962643 | | 2,07232658 |
| 35995019 | | 13815510 |
| 1799751 | | 20723 |
| 809887 | | 23 |
| 35995 | | 9,11844441 |
| 3599 | | |
| 719 | | |
| 3,908109521 | | |

Die angeführte abgekürzte Multiplication der Decimalbrüche wird hauptsächlich in solchen Fällen gebraucht, wo die folgenden Decimalziffern des einen oder des andern Factors, oder auch in beyden nicht bekannt sind.

Eben so kann in dergleichen Fällen auch eine abgekürzte Division bey den Decimalbrüchen mit Vortheil angewendet werden. Man fängt nähmlich an, mit dem Divisor in den Dividendus, wie sonst, hinein zu dividiren; es wird aber nach jedesmahliger Multiplication des Divisors mit der gefundenen Ziffer des Quotienten immer eine Ziffer im Divisor rechts ausgestrichen, wie es in nachstehenden Beyspielen zu ersehen ist.

| Divisor | Dividend. | Quot. | Divis. | Divid. | Quot. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,58432 | 0,439865 | 0,75278 | 0,6437 | 3,07564 | 4,778 |
| | 409024 | | | 2,5748 | |
| | 30841 | | | 5008 | |
| | 29216 | | | 4505 | |
| | 1625 | | | 503 | |
| | 1168 | | | 450 | |
| | 457 | | | 53 | |
| | 408 | | | 51 | |
| | 49 | | | 2 | |
| | 46 | | | | |
| | 3 | | | | |

Anmerkung. Verschiedene andere nützliche Vortheile und Abkürzungen bey den Rechnungsarten, sowohl mit ganzen als auch mit gebrochenen Zahlen, können beym mündlichen Vortrage beygebracht werden. So z. B. kann die Multiplication, wenn die erste oder die letzte Ziffer des kleinern Factors ein 1 ist, auf folgende Art abgekürzet werden.

Anstatt

5,738;
61
5,738
344,28
350,018

abgekürzet

5,738 | 61
344,28
350,018

Anstatt

573,8;
16
3442,8
5738
9180,8

abgekürzet

573,8 | 16
3442,8
9180,8

Weil im letzten Beyspiele der Multiplicator 16 in die Factoren 4 . 4 sich zerlegen läßt, so kann die Multiplication auch auf nebenstehende Art verrichtet werden. Eine solche Abkürzung findet auch bey der Division Statt, wenn der Divisor in schickliche Factoren sich zerlegen läßt.

573,8|4
2295,2|4
9180,8|

Wäre eine Zahl z. B. 53897 mit 998 zu multipliciren, so findet man das Product 53789206 wegen 998 = 1000 — 2 auf nebenstehende Art.

53897000|2
107794
53789206

# IV. Abschnitt.

## Von zusammenhängenden Brüchen.

### §. 107.

Wenn man bey einem echten Bruche, wo der Zähler im Nenner nicht genau enthalten ist, sowohl den Zähler als den Nenner durch den Zähler dividiret, so erhält man einen Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche ist. Verfährt man nun mit dem letzt angehängten Bruche eben so, so wird dadurch der vorgelegte Bruch in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt, nähmlich in einen Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem Bruche ist, wovon wieder der Zähler 1 und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem eben solchen angehängten Bruche ist, und so nach diesem Gesetze weiter fort.

### §. 108.

Man kann jeden echten Bruch $\frac{m}{n}$ in einen zusammenhängenden Bruch verwandeln, wenn man beym vorgelegten Bruche $\frac{m}{n}$ (nach §. 81) des Zählers und Nenners größtes gemeinschaftliches Maß suchet, und die erhaltenen Quotienten $a$, $b$, $c$, $d$ anmerket; denn eben diese Quotienten sind in der Ordnung, wie sie erhalten werden, vermög der Erklärung die aufeinander folgenden Nenner des zusammenhängenden Bruches, nähmlich:

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{\text{&c.}}}}}}$$

Es sey z. B. $\frac{361}{1495}$ in einen zusammenhängenden Bruch zu verwandeln,

$$\text{so ist } \overset{4}{1495} : \overset{7}{361} : \overset{12}{51} : \overset{1}{4} : \overset{3}{3} : 1$$
$$\underline{1444} \quad \underline{357} \quad \underline{48} \quad \underline{3}$$
$$51 \quad 4 \quad 3 \quad 1$$

$$\text{daher ist } \frac{361}{1495} = \frac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

## §. 109.

Wenn man von einem zusammenhängenden Bruche nur ein einziges Glied beybehält, und die übrigen Glieder völlig hinweg läßt, im letzten Beyspiele $\frac{1}{4}$; so ist der Bruch $\frac{1}{4}$ etwas größer als der wahre Werth des ganzen zusammenhängenden Bruches; denn weil man dadurch den Nenner vermindert, so ist der Bruch größer (vermög §. 78); nimmt man zwey Glieder $\frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 1 : \frac{29}{7} = \frac{7}{29}$, so ist dieser Bruch etwas kleiner; der aus drey Gliedern abgeleitete Bruch $\frac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{12}}} = \frac{1}{4 + 1 : \frac{85}{12}} = \frac{1}{4 + \frac{12}{85}} = 1 : \frac{352}{85} = \frac{85}{352}$ ist wieder etwas größer; der aus vier Gliedern aber $\frac{92}{381}$ ist etwas kleiner als der wahre Werth des ganzen zusammenhängenden Bruches; und so wechselweise weiter fort, dergestalt zwar, daß der Unterschied, oder die Abweichung von dem wahren Werthe immer kleiner wird, je mehrere Glieder des zusammenhängenden Bruches genommen werden, bis endlich der wahre Werth des zusammenhängenden Bruches völlig genau erhalten wird, wenn man alle Glieder desselben beybehält. In dem angeführten Beyspiele ist der aus 3 Gliedern des zusammenhängenden Bruches abgeleitete Bruch $\frac{85}{352}$ bis auf die Hundert-tausendtel mit dem wahren Werthe $\frac{361}{1495}$ übereinstimmend, wo-

von man sich leicht überzeugen kann, wenn man beyde diese Brüche in Decimalbrüche verwandelt; es ist nähmlich:

$$\frac{361}{1495} = 0{,}241471\ldots.$$

$$\text{und } \frac{85}{352} = 0{,}241477\ldots.$$

$$\text{Differenz} = 0{,}000006.$$

## §. 110.

Der Nutzen der zusammenhängenden Brüche ergibt sich hauptsächlich bey der Abkürzung der Brüche in solchen Fällen, wo der Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind. Es ist nähmlich öfters erforderlich, einen Bruch, dessen Zähler und Nenner sehr große Primzahlen unter sich sind, in einen andern, durch kleinere Zahlen ausgedrückten Bruch, ohne merkliche Veränderung des Werthes zu verwandeln.

Dieses geschieht, wenn man den vorgelegten Bruch (nach §. 108) in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt, und sodann die nach der Ordnung aus 1, 2, 3, 4, 5 .... Gliedern desselben entspringenden Brüche entwickelt. Diese abgeleiteten Brüche sind die gesuchten abgekürzten Brüche, wo jeder darauf folgende abgeleitete Bruch dem wahren Werthe des vorgelegten Bruches immer näher kömmt. Und außer solchen abgeleiteten Brüchen sind gar keine andern möglich, welche einfacher ausgedrückt wären, und doch dem vorgelegten Bruche am Werthe näher kämen. Sehr oft ist der nur aus einigen wenigen Gliedern des zusammenhängenden Bruches abgeleitete Bruch dem vorgelegten äußerst nahe gleich; und zwar damahls, wenn der nächst darauffolgende Nenner eine beträchtlich große Zahl ist.

Es sey z. B. $\frac{100000}{102764}$ ohne merkliche Veränderung des Werthes abzukürzen, so ist:

| 1 | 36 | 5 | 1 | 1 | 2 | 1 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 102764 : | 100000 : | 2764 : | 496 : | 284 : | 212 : | 72 : | 68 : 4 |
| 100000 | 8292 | 2480 | 284 | 212 | 144 | 68 | 68 |
| 2764 | 17080 | 284 | 212 | 72 | 68 | 4 | 0 |
| | 16584 | | | | | | |
| | 496 | | | | | | |

daher ist $\frac{100000}{102764} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{36+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}}}}}$

und die fünf ersten abgekürzten Brüche sind

$\frac{1}{1}, \frac{36}{37}, \frac{181}{186}, \frac{217}{223}, \frac{398}{409}$

wo man, wenn keine gar zu große Genauigkeit erforderlich ist, $\frac{36}{37}$ statt des vorgelegten Bruches $\frac{100000}{102764}$ nehmen kann.

## §. 111.

Bey solchen Abkürzungen der Brüche können aus den einmahl gefundenen Quotienten, nähmlich in dem letzt angeführten Beyspiele aus 1, 36, 5, 1, 1, 2, 1, 17 die abgekürzten Brüche auf folgende Art unmittelbar abgeleitet werden, ohne daß es nothwendig sey, den zusammenhängenden Bruch ausdrücklich anzusetzen; als:

| | 1, | 36, | 5, | 1, | 1, | 2, | 1, | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 36 | 181 | 217 | 398 | 1013 | 1411 | 25000 |
| 1 | 1 | 37 | 186 | 223 | 409 | 1041 | 1450 | 25691 |

Man schreibt nähmlich die Quotienten in einer Linie hintereinander, zieht darunter einen Querstrich, setzt vorwärts außerhalb eines Striches $\frac{0}{1}$ als einen Bruch an, und schreibt unter den ersten Quotienten für den ersten Bruch eine Einheit, getheilt durch eben diesen ersten Quotienten. Sodann wird bey jedem folgenden Quotienten der zugehörige Bruch bestimmet, wenn man mit jedem solchen Quotienten den Zähler und Nenner des ersten vorhergehenden Bruches multipliciret, und

| | | |
|---|---|---|
| 1 . 36 + 0 | = | 36 |
| 1 . 36 + 1 | | 37 |
| 36 . 5 + 1 | = | 181 |
| 37 . 5 + 1 | | 186 |
| 181 . 1 + 36 | = | 217 |
| 186 . 1 + 37 | | 223 |
| 217 . 1 + 181 | = | 398 |
| 223 . 1 + 186 | | 409 |
| 398 . 2 + 217 | = | 1013 |
| 409 . 2 + 223 | | 1041 |

noch dazu den Zähler und Nenner des zweyten vorhergehenden Bruches addiret, nähmlich den Zähler zum Producte des Zählers, und den Nenner zum Producte des Nenners in den gehörigen Quotienten.

Es sey der Bruch $\frac{10000000000}{31415926536}$ abzukürzen, so ist

3 7 15 1 292

31415926536 : 10000000000 : 1415926536 : 88514248 : 88 : 212816 : 301432 u. s. w.

30000000000 9911485752 530784056 88212816

1415926536 88514248 442571240 301432

88212816

folglich

| | 3, | 7, | 15, | 1, | 292 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 \| | 1 | 7 | 106 | 113 | 33102 |
| 1 \| | 3 | 22 | 333 | 355 | 103993 |

nähmlich

$$\frac{1 \cdot 7 + 0}{3 \cdot 7 + 1} = \frac{7}{22}$$

$$\frac{7 \cdot 15 + 1}{22 \cdot 15 + 3} = \frac{106}{333}$$

$$\frac{106 \cdot 1 + 7}{333 \cdot 1 + 22} = \frac{113}{355}$$ u. s. w.

wo der aus vier Quotienten abgeleitete Bruch $\frac{113}{355}$, weil der folgende Quotient 292 sehr groß ist, von dem vorgelegten Bruche $\frac{10000000000}{31415926536}$ kaum um 0,00000003 verschieden ist. Denn der

gegebene Bruch $\frac{10000000000}{31415926536} = 0{,}318309886\ldots$

und der abgekürzte $\frac{113}{355} \ldots\ldots = 0{,}318309859\ldots$

folglich ist ihr Differenz $= 0{,}000000027\ldots$

Die angeführte Regel, aus den einmahl bestimmten Quotienten die abgekürzten Brüche abzuleiten, läßt sich auf folgende Art allgemein erweisen:

Wenn man bey dem zusam= menhängenden Bruche die aus 1, 2, 3, 4, 5 Gliedern abge= leiteten Brüche mit $f^{I}$, $f^{II}$, $f^{III}$, $f^{IV}$, $f^{V}$ bezeichnet, und diese Brüche durch die gehörige Reduc= tion, (wie im §. 109) auf einfa= che Nenner bringet, so ist

$$\frac{m}{n} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{\text{&c.}}}}}}}$$

$$f^{I} = \frac{1}{a}$$

$$f^{II} = \frac{b}{ab+1}$$

$$f^{III} = \frac{bc+1}{abc+c+a}$$

$$f^{IV} = \frac{bcd+d+b}{abcd+cd+ad+ab+1}$$

$$f^{V} = \frac{bcde+de+be+bc+1}{abcde+cde+ade+abe+e+abc+c+a};$$

zerlegt man nun den Zähler und Nenner des Bruches $f^{V}$ in Factoren, so daß der zugehörige Quotient $e$ für einen Factor angenommen wird, so ist

$$f^{V} = \frac{e(bcd+d+b)+bc+1}{e(abcd+cd+ad+ab+1)+abc+c+a};$$

woraus es zu ersehen ist, wie dieser Bruch $f^{V}$ aus dem zuge= hörigen Quotienten $e$, und aus den zwey nächst vorhergehenden Brüchen $f^{IV}$ und $f^{III}$ entsteht; welches Gesetz auch bey jedem an= dern abzuleitenden Bruche gilt. Damit nun dieses Gesetz auch schon bey dem zweyten Bruche könne angewendet werden, so wird zuerst $\frac{0}{1}$ angesetzet.

## §. 112.

Wäre ein Afterbruch nach der angeführten Art abzukürzen, so kann man solchen zuerst umkehren; sodann werden die abge= kürzten Brüche (nach §. 111) bestimmet, welche man zuletzt alle wieder umkehret, nähmlich die Nenner für die Zähler, und die Zähler für die Nenner nimmt.

Es sey z. B. $\frac{2}{1,9129312} = \frac{20000000}{19129312}$ abzukürzen,

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | 21 | | 1 | | 32 | |
| so ist | 20000000 | : | 19129312 | : | 870688 | : | 844864 | : | 25824 |
| | 19129312 | | 1741376 | | 844864 | | 77472 | | |
| | 870688 | | 1715552 | | 25824 | | 70144 | | |
| | | | 870688 | | | | 51648 | | |
| | | | 844864 | | | | 18496 | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | | 21 | | 1 | | 32 |
| und nun | | | | | | | | | |
| | 0 | \| | 1 | | 21 | | 22 | | 725 |
| | 1 | \| | 1 | | 22 | | 23 | | 758 |

daher sind die abgekürzten $\frac{1}{1}, \frac{22}{21}, \frac{23}{22}, \frac{758}{725}$.

Eine ausführliche und gründliche Abhandlung der Lehre von zusammenhängenden Brüchen findet man in Hr. J. Pasquich mathemat. Analysis, I. Band, Leipzig bey Weidmann 1790.

# Dritte Vorlesung.

## Von den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

### I. Abschnitt.

### Von den Potenzen und Wurzeln überhaupt.

§. 113.

Das Product, welches entsteht, wenn man eine nähmliche Größe mehrmahl mit sich selbst multipliciret, heißt eine Potenz oder Dignität dieser Größe; wo die mit sich selbst zu multiplicirende Größe als eine unbenannte Zahl betrachtet wird. Die Größe aber, welche mehrmahl als Factor in der Multiplication angesetzt wird, um eine Potenz hervorzubringen, heißt die Wurzel der hervorgebrachten Potenz. Und die Zahl, welche mit ihren Einheiten anzeigt, wie oft die nähmliche Größe als Factor in der Multiplication anzusetzen sey, um eine Potenz hervor zu bringen, heißt der Exponent dieser Potenz.

Insbesondere wird das Product, wo eine nähmliche Größe zweymahl als Factor in der Multiplication angesetzt wird, die zweyte Potenz, oder das Quadrat dieser Größe genannt; so ist z. B. 9 das Quadrat von 3; weil $3.3 = 9$ ist; 36 ist das Quadrat von 6, und allgemein $a^2$ ist das Quadrat von $a$.

Die Größe aber, welche mit sich selbst multiplicirt werden muß, um ein gegebenes Quadrat hervorzubringen, wird die Quadratwurzel desselben genannt; so ist z. B. 6 die Quadratwurzel von 36; 7 die Quadratwurzel von 49, und $a$ die Quadratwurzel von $a^2$. Das Quadrat einer jeden Größe

wird demnach gefunden, wenn man die Größe mit sich selbst multipliciret.

§. 114.

Wenn man das Quadrat einer Größe noch einmahl mit der Wurzel multipliciret, so wird das Product die dritte Potenz, oder der Cubus (Würfel) dieser Größe genannt. So ist z. B. 8 die dritte Potenz, oder der Cubus von 2; weil $2 . 2 . 2 = 4 . 2 = 8$ ist; 27 ist der Cubus von 3; weil $3 . 3 . 3 = 9 . 3 = 27$; und $a^3$ ist der Cubus von $a$; weil $a . a . a = a^2 . a = a^3$ ist. Und eben so heißt auch wieder 2 die Cubikwurzel von 8; 3 die Cubikwurzel von 27, und $a$ die Cubikwurzel von $a^3$. Der Cubus einer jeden Größe wird demnach gefunden, wenn man das Quadrat der Größe noch einmahl mit der Wurzel multipliciret.

§. 115.

Multiplicirt man ferner den Cubus einer Größe noch einmah mit der Wurzel, so erhält man die vierte Potenz, oder das Biquadrat dieser Größe; dieses wieder mit der Wurzel multipliciret, gibt die fünfte Potenz u. s. w., so heißt $a^4 = a^3 . a$ die vierte; $a^5 = a^4 . a$ die fünfte; $a^6 = a^5 . a$ die sechste, $a^m$ die $m$te Potenz von $a$; so wie $a$ die vierte Wurzel von $a^4$, die fünfte Wurzel von $a^5$, und die $m$te Wurzel von $a^m$ genannt wird.

§. 116.

Eine gegebene Größe auf die $m$te Potenz erheben, heißt demnach nichts anders, als die Größe $m$ mahl durch die Multiplication ansetzen, wo das Product die $m$te Potenz dieser Größe ist; und die Zahl $m$, welche anzeigt, wie vielmahl die gegebene Größe in der Multiplication als Factor anzusetzen sey, ist der Exponent der Potenz.

Und eben so heißt auch die $m$te Wurzel aus einer gegebenen Größe ziehen nichts anders, als die vorgegebene Größe in $m$ gleiche Factoren zerlegen, oder welches einerley ist, eine Größe finden, die $m$ mahl durch die Multiplication angesetzt, die gegebene Größe zum Vorschein bringet.

§. 117.

Damit man aber alsogleich wisse, welche Wurzel aus einer

vorgegebenen Größe zu ziehen verlangt wird, bedient man sich des Zeichens $\surd$, ober welchem die Zahl gesetzt wird, welche anzeiget, in wie viel gleiche Factoren die hinter diesem Zeichen befindliche Größe zerlegt werden soll; und diese Zahl wird hier der Exponent des Wurzelzeichens, oder der Wurzelexponent genannt. So schreibt man z. B.

$\sqrt[2]{64} = 8$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[4]{81} = 3$; und wird gelesen, die Quadratwurzel aus 64 ist gleich 8; die Cubikwurzel aus 64 ist gleich 4; die vierte Wurzel aus 81 ist gleich 3.

Bey der Quadratwurzel pflegt man zwar selten den Exponenten des Wurzelzeichens ausdrücklich anzusetzen, sondern es wird jederzeit, wenn kein Exponent ober dem Wurzelzeichen angesetzt ist, die Quadratwurzel darunter verstanden; so schreibt man z. B. $\surd a^2 = a$.

Die gezogene Wurzel aus einer Größe muß demnach also beschaffen seyn, daß, wenn man sie auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, die Größe unter dem Wurzelzeichen wieder zum Vorschein komme.

Anmerkung. Wie Potenzen zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren, und zu dividiren sind, ist bereits bekannt, da für die Rechnungsarten der algebraischen Größen mit Exponenten allgemeine Regeln festgesetzet worden (§. 63 bis 67) und die Potenzen nichts anders sind, als solche mit Exponenten behaftete algebraische Größen.

## §. 118.

Jede Potenz einer positiven Wurzel ist positiv; denn, wie könnte wohl aus der Multiplication einiger positiven Factoren ein negatives Product entstehen? Erhebt man aber eine negative Größe z. B. $(-a)$ auf die nacheinander folgenden Potenzen, so ist $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$; $(-a)^3 = (-a)^2 \times -a = +a^2 \times -a = -a^3$; $(-a)^4 = (-a)^3 \times -a = -a^3 \times -a = +a^4$ u. s. w.; nähmlich alle geraden Potenzen einer negativen Wurzel sind positiv, und alle ungeraden sind negativ. Man hat deßwegen $(-a)^2$

von $-a^2$ forgfältig zu unterſcheiden; denn $(-a)^2 = -a \times -a = +a^2$, und $-a^2 = -a \times +a$.

§. 119.

Es folgt hieraus. I. Jede ungerade Wurzel aus einer poſitiven Größe iſt poſitiv, und aus einer negativen Größe negativ; z. B.

$\sqrt[3]{+a^3} = +a$, und $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

II. Hingegen kann jede gerade Wurzel aus einer poſitiven Größe ſowohl poſitiv, als auch negativ ſeyn; z. B. $\sqrt{+a^2}$ iſt ſowohl $+a$, als auch $-a$, weil jedes mit ſich ſelbſt multipliciret $+a^2$ gibt. Man pflegt daher auch bey Ausziehung der geraden Wurzeln jederzeit beyde Zeichen vor der Wurzel anzuſetzen, wo ſodann andere Umſtände der Rechnungen, worin ſolche vorkommen, entſcheiden müſſen, welches von beyden Zeichen zu nehmen ſey; ſo ſchreibt man z. B. $\sqrt{a^2} = \pm a$; und zwar $\sqrt{a^2} = +a$, wenn es aus andern Umſtänden bekannt iſt, es ſey $+a$ ins Quadrat erhoben worden; hingegen iſt $\sqrt{a^2} = -a$, wenn es ſonſt ausgemacht iſt, daß eine negative Größe ins Quadrat erhoben worden ſey.

III. Sollte aber aus einer negativen Größe eine gerade Wurzel gezogen werden; ſo läßt ſich gar nicht gedenken, wie aus der Multiplication einer geraden Anzahl negativer Factoren ein negatives Product entſtehen könnte, und folglich iſt es unmöglich, eine ſolche Wurzel anzugeben. Solche gerade Wurzeln aus negativen Größen werden daher unmögliche, oder eingebildete Größen genannt; ſo ſind z. B.

$\sqrt{-a}$, $\sqrt[a]{-a^a}$ unmögliche Größen.

§. 120.

Ein Product wird auf eine Potenz erhoben, wenn man jeden Factor insbeſondere auf die verlangte Potenz erhebt, und dieſe Potenzen miteinander multipliciret. Denn es iſt z. B.
$(abc)^3 = abc.\ abc.\ abc = a^3 b^3 c^3$ (vermög §. 116); eben ſo iſt $(abc)^m = a^m b^m c^m$; $(72)^3 = (6.\ 3.\ 4.)^3 = 6^3 . 3^3 . 4^3 = 216 . 27 . 64 = 373248$.

Und eben so kann auch umgekehrt aus einem Producte eine beliebige Wurzel gezogen werden, wenn man aus jedem Factor die Wurzel insbesondere zieht, und solche miteinander multipliciret. So ist z. B.

$\sqrt[m]{a^m b^m} = \sqrt[m]{a^m} . \sqrt[m]{b^m} = ab$; $\sqrt[3]{27\,a^3} = \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{a^3} = 3\,a$;
$\sqrt{576} = \sqrt{4 . 9 . 16} = \sqrt{4} . \sqrt{9} . \sqrt{16} = 2 . 3 . 4 . = 24.$

§. 121.

Eine Zahl, welche am Ende Nullen hat, kann daher zum Quadrat erhoben werden, wenn man nur die bedeutlichen Ziffern ins Quadrat erhebt, und hinten doppelt so viele Nullen anhängt, als die Wurzel deren hat. So ist z. B. $(90)^2 = (9 . 10)^2 = 9^2 . 10^2 = 81 . 100 = 8100.$

Eben so wird auch eine Zahl, die hinten Nullen hat, zum Cubus erhoben, wenn man nur die bedeutlichen Ziffern erhebt, und hinten dreymahl so viele Nullen anhängt, als die Wurzel deren hat. So ist z. B. $(300)^3 = (3 . 100)^3 = 27 . 1000000 = 27000000.$

Und so ist auch wieder umgekehrt $\sqrt{640000} = \sqrt{64} \times \sqrt{10000} = 8 . 100 = 800$; $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27} . \sqrt[3]{1000} = 3 . 10 = 30.$

Hieraus folgt, daß so oft man ein Quadrat mit 100 multipliciret, so oft wird dadurch die Wurzel mit 10 multipliciret, und so oft man den Cubus einer Größe mit 1000 multipliciret; so oft wird die dazu gehörige Wurzel mit 10 multipliciret.

§. 122.

Soll ein Bruch auf eine Potenz erhoben werden, so erhebe man den Zähler und Nenner auf die verlangte Potenz. So ist z. B.

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$ (vermög §. 116);
$\left(\frac{a}{x}\right)^m = \frac{a^m}{x^m}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Es wird daher auch umgekehrt aus einem Bruche eine Wurzel gezogen, wenn man aus dem Zähler und aus dem Nenner die verlangte Wurzel ziehet. So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{a}{b}.$$

## §. 123.

Es folgt aus diesem I. daß die Potenzen eines echten Bruches immer kleiner werden, in je höhere Potenzen man den Bruch erhebt; denn wenn $b > a$ ist, so ist auch $\frac{a}{b} > \frac{a^2}{b^2} > \frac{a^3}{b^3}$ u. s. w.

II. Hingegen werden die Potenzen eines Bruches, der $> 1$ ist, immer größer, in je höhere Potenzen man den Bruch erhebt; denn, wenn $b < a$, so ist auch $\frac{a}{b} < \frac{a^2}{b^2} < \frac{a^3}{b^3}$ u. s. w.

III. Wäre aber $a = b$, so ist jede Potenz, so wie auch jede Wurzel von $\frac{a}{b}$ immer $= 1$; weil ein solcher Bruch $=$ der Einheit, und sowohl jede Potenz, als auch jede Wurzel von 1 immer gleich 1 ist.

IV. Ist auch hieraus zu ersehen, daß keine Potenz weder eines eigentlichen noch uneigentlichen Bruches eine ganze Zahl werden kann; z. B. wenn $\frac{a}{b}$ ein Bruch ist, wo $b$ in $a$ nicht genau enthalten ist, so kann $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$ . . . . . $\frac{a^m}{b^m}$ keine ganze Zahl seyn; denn wäre z. B. $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, so müßte $a$ durch $b$ genau theilbar seyn, welches wider die Voraussetzung ist.

## §. 124.

Sollte daher aus einer ganzen Zahl was immer für eine Wurzel gezogen werden, und es ist letztere keine ganze Zahl, so kann eben diese Wurzel auch kein Bruch seyn. Z. B. obschon $\sqrt{6} >$ seyn muß als 2, und $< 3$, so kann doch kein Bruch gefunden werden, welcher zu 2 addirt vollkommen genau die Qua-

dratwurzel aus 6 gibt; denn gäbe es einen solchen Bruch, so müßte die Potenz eines uneigentlichen Bruches eine ganze Zahl seyn, welches doch (vermög §. 123, IV.) nicht seyn kann. Daß man sich aber doch dem Werthe einer solchen Wurzel durch Decimalstellen so weit nähern könne, als es nur immer die Richtigkeit einer Rechnung erfordert, wird in der Folge gezeigt werden.

## §. 125.

Alle solche mit Wurzelzeichen behaftete Größen, deren Wurzeln sich nicht vollkommen genau ausziehen lassen, nähmlich die Wurzeln aus unvollkommenen Potenzen, werden irrationale Größen genannt; so sind z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ irrationale Größen; im Gegentheile heißen jene rationale Größen, wo sich die Wurzel genau ausziehen läßt; so sind $\sqrt{9}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt[3]{64}$ rationale Größen.

Auch die algebraischen Größen, aus denen sich die angezeigte Wurzel nicht genau ausziehen läßt, werden algebraische irrationale Größen genannt; so sind z. B. $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{(a^2+x^2)}$, $\sqrt[m]{a^n b}$ in so lang irrational, bis man für die Größen unter dem Zeichen solche Zahlen annimmt, daß sich die Wurzel genau ausziehen läßt; hingegen sind $\sqrt{a^2}$, $\sqrt[3]{a^6 b^3}$, $\sqrt[m]{a^m}$ algebraisch rationale Größen, weil sich die Wurzel genau ausziehen läßt, man möge für $a$ und $b$ was immer setzen.

## §. 126.

Jede Größe, die eine Nulle zum Exponenten hat, ist einer Einheit gleich; nähmlich $a^0 = 1$.

Denn es ist $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$ (vermög §. 65, Nr. 3); es ist aber auch $a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$ (vermög §. 72); folglich auch $a^0 = 1$ (vermög §. 12, Grundsatz 3).

Da nun $a$ jede, sowohl einfache, als zusammengesetzte Größe vorstellen kann, so ist auch jede Größe mit dem Exponenten 0 einer Einheit gleich; so ist $\left(\frac{b}{c}\right)^0 = 1$; $(d-x)^0 = 1$.

## §. 127.

Jede Größe, die einen negativen Exponenten hat, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler die Einheit und der Nenner die nähmliche Größe mit dem positiven Exponenten ist; nähmlich $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Denn $a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$ (vermög §. 65, Nr. 3); und auch $a^m : a^{2m} = \frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{a^m : a^m}{a^{2m} : a^m} = \frac{1}{a^m}$ (vermög §. 79); folglich auch $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vermög §. 12, Grundsatz 3).

Und so ist auch umgekehrt $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$; denn $\frac{1}{a^{-m}} = 1 : a^{-m} = 1 : \frac{1}{a^m} = a^m$, wo $a$ und $m$ wie immer beschaffen seyn können.

Dieses gibt uns ein Mittel an die Hand, jeden Bruch in Gestalt einer ganzen Zahl vorzustellen, oder auch jeden Factor aus dem Zähler in den Nenner, und aus dem Nenner in den Zähler zu übertragen, wenn man bey den übertragenen Factoren die Zeichen der Exponenten ändert. So ist z. B. $\frac{a}{x^2} = a \cdot \frac{1}{x^2} = ax^{-2}$; $\frac{ab^2}{cx^{-m}} = \frac{b^2x^m}{a^{-1}c}$; $\frac{x^3 - ax}{bc^3} = \frac{x(x^2-a)}{bc^3} = \frac{x^2-a}{bc^3x^{-1}}$; $\frac{a^2x(c^2-x^2)^m}{p} = \frac{a^2x}{p(c^2-x^2)^{-m}}$; $\frac{5}{9} = 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{3^2} = 5 \cdot 3^{-2} = 5 \cdot 9^{-1}$.

## §. 128.

Einnahmige Potenzen können wieder zu andern Potenzen erhoben werden, deren Exponenten gegeben sind, wenn man den Exponenten der Potenz mit dem gegebenen Exponenten multipliciret; nähmlich $(a^m)^n = a^{mn}$. Denn $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots = a^{m+m+m+m+\ldots} = a^{mn}$.

### Beyspiele.

$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$.

$(am\ b^n)^4 = am\ b^n \cdot am\ b^n \cdot am\ b^n \cdot am\ b^n = a^{4m}\ b^{4n}$.

$(-a^m bc^3)^2 = -a^m bc^3 \times -a^m bc^3 = +a^{2m} b^2 c^6$.

$\left(\frac{a^2}{b^n}\right)^m = \frac{a^{2m}}{b^{mn}}$; $[a^3(a^2+x^2)^2]^4 = a^{12}(a^2+x^2)^8$.

Auch bey den negativen Exponenten gilt diese Regel; denn es ist z. B. $(a^{-m})^3 = \left(\frac{1}{a^m}\right)^3 = \frac{1}{a^{3m}} = a^{-3m}$ (nach §. 127);

$(a^m b^{-n})^{-n} = \frac{1}{(a^m b^{-n})^n} = \frac{1}{a^{mn} b^{-nn}} = a^{-mn} b^{nn}$;

Es ist hier wieder zu merken, daß man bey einer negativen Größe das Zeichen — in + verwandeln müsse, wenn der gegebene Exponent, wie im B. 3, eine gerade Zahl ist. Denn die Bezeichnung $(-a^m)^4$ ist (vermög §. 118) von $-(a^m)^4$ wohl zu unterscheiden; $(-a^m)^4$ ist gleich $+a^{4m}$; hingegen ist $-(a^{m4}) = -a^{4m}$.

## §. 129.

Und umgekehrt wird aus einer einnahmigen Potenz jede beliebige Wurzel gezogen, wenn man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten des Wurzelzeichens dividiret, nähmlich $\sqrt[n]{p^a} = p^{\frac{a}{n}}$; so z. B. ist $\sqrt[2]{a^2} = \pm a^{\frac{2}{2}} = \pm a$; $\sqrt[3]{b^6} = b^{\frac{6}{3}} = b^2$; $\sqrt[4]{x^8 y^{12}} = \pm x^{\frac{8}{4}} y^{\frac{12}{4}} = \pm x^2 y^3$; weil diese Wurzeln so beschaffen sind, daß, wenn man solche wieder auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, sie die Größen unter dem Wurzelzeichen, die Potenzen nähmlich, wieder zum Vorschein bringen.

## §. 130.

Wenn man was immer für eine zweynahmige Größe $a+b$ (nach §. 113) ins Quadrat erhebt, so ist $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$; nähmlich: das Quadrat einer jeden zweynahmigen Größe besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theiles, 2) aus dem doppelten Producte des ersten in den zweyten Theil, und 3) aus dem Quadrate des zweyten Theiles. Setzet man nun $b = -x$, so ist $2ab = -2ax$ und $b^2 = (-x)^2 = +x^2$; also $(a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$.

### Beyspiele.

$(a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1;$

$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}.$

$\left(bc^2 - \frac{a}{b}\right)^2 = b^2c^4 - 2ac^2 + \frac{a^2}{b^2};$

$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2.$

$(99)^2 = (90 + 9)^2 = 8100 + 1620 + 81 = 9801.$

oder auch $(99)^2 = (100 - 1)^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801.$

### §. 131.

Sollte eine dreynahmige Größe $a + b + c$ ins Quadrat erhoben werden, so kann solche als eine zweynahmige behandelt werden, indem man $(a + b)$ für den ersten, und $c$ für den andern Theil ansieht. Es ist sodann $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ nähmlich das Quadrat einer jeden dreynahmigen Größe besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Theiles; 2) aus dem doppelten Producte des ersten Theiles in den zweyten; 3) aus dem Quadrate des zweyten Theiles; 4) aus dem doppelten Producte des ersten und zweyten Theiles in den dritten; und endlich 5) aus dem Quadrate des dritten Theiles.

### Beyspiele.

$\left(a - x + \frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - 2ax + x^2 + ab - bx + \frac{b^2}{4};$

$(2a^2 - 3ax - 4x^2)^2 = 4a^4 - 12a^3x + 9a^2x^2 - 16a^2x^2 + 24ax^3 + 16x^4.$

$(1 - x + x^2)^2 = 1 - 2x + x^2 + 2x^2 - 2x^3 + x^4 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1.$

$(999)^2 = (900 + 99)^2 = (900 + 90 + 9)^2 = 810000 + 162000 + 8100 + 16200 + 1620 + 81 = 998001.$

### §. 132.

Erhebt man auf die nähmliche Art eine viernahmige Größe $a + b + c + d$ ins Quadrat, so ist $[(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$; und so könnte auch eine 5, 6, 7nahmige Größe u. s. w. ins Quadrat erhoben werden, woraus man sieht, daß das Quadrat einer jeden mehrnah-

migen Größe bestehet, 1) aus dem Quadrate eines jeden Gliedes insbesondere, und 2) aus den doppelten Producten eines jeden Gliedes in alle seine nachfolgenden Glieder.

§. 133.

Der Cubus einer jeden zweynahmigen Größe $a + b$ besteht 1) aus dem Cubus des ersten Gliedes $a^3$; 2) aus dem dreyfachen Producte des Quadrats vom ersten Gliede in das zweyte $3a^2b$; 3) aus dem dreyfachen Producte des Quadrats des zweyten Gliedes in das erste $3ab^2$; und 4) endlich aus dem Cubus des zweyten Gliedes $b^3$. Denn es ist (§. 114)

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 . (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$
$$= a^3 + 2a^2 b + ab^2 + a^2 b + 2ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

Setzet man $b = -x$, so ist $3a^2 b = -3a^2 x$; $3ab^2 = 3a \times (-x)^2 = +3ax^2$; und $(-x)^3 = -x^3$;

folglich $(a - x)^3 = a^3 - 3a^2 x + 3ax^2 - x^3$.

Beyspiele.

$(2ax - x^2)^3 = 8a^3 x^3 - 12a^2 x^4 + 6ax^5 - x^6$.

$(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$.

$$\left(3a + \frac{1}{2}\right)^3 = 27a^3 + \frac{27a^2}{2} + \frac{9a}{4} + \frac{1}{8}.$$

$(11)^3 = (10 + 1)^3 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1000 + 331$
$= 1331.$

$(99)^3 = (90 + 9)^3 = 729000 + 218700 + 21870 + 729$
$= 729000 + 241299 = 970299;$

oder auch $(99)^3 = (100 - 1)^3 = 1000000 - 30000 + 300 - 1$
$= 970299.$

§. 134.

Ist eine dreynahmige Größe $a + b + c$ zum Cubus zu erheben, so ist, wenn man die ersten zwey Glieder als einnahmig betrachtet, $(a + b + c)^3 = [(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 . c + 3(a + b) c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2 . c + 3(a + b) . c^2 + c^3$; nähmlich der Cubus einer dreynahmigen Größe besteht 1) aus dem Cubus des ersten Gliedes; 2) aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Gliedes, mul-

tiplicirt mit dem zweyten; 3) aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Gliedes, multiplicirt mit dem ersten; 4) aus dem Cubus des zweyten Gliedes; 5) aus dem dreyfachen Quadrate der Summe des ersten und zweyten Gliedes, multiplicirt mit dem dritten; 6) aus dem dreyfachen Quadrate des dritten Gliedes, multiplicirt mit der Summe des ersten und zweyten; und endlich 7) aus dem Cubus des dritten Gliedes.

Beyspiele.

$(1 + x - x^2)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 - 3x^2 - 6x^3 - 3x^4 + 3x^4 + 3x^5 - x^6 = 1 + 3x - 5x^3 + 3x^5 - x^6.$

$(999)^3 = (900 + 90 + 9)^3 = 729000000 + 218700000 + 21870000 + 729000 + 26462700 + 240570 + 729 = 997002999.$

§. 135.

Wenn man nun auf eben diese Art eine vier, fünf, sechsnahmige Größe u. s. w. zum Cubus erhebt, indem man selbe jederzeit als zweynahmig betrachtet, so findet man, daß der Cubus einer jeden mehrnahmigen Größe bestehe, 1) aus dem Cubus eines jeden einzelnen Gliedes insbesondere, 2) aus den dreyfachen Producten eines jeden Gliedes in das Quadrat der Summe aller vorhergehenden Glieder, und 3) aus den dreyfachen Producten des Quadrates eines jeden Gliedes in die Summe aller vorhergehenden Glieder.

So ist z. B. $(a+b+c+d+e+f+g+h+\ldots)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 + 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3 + \ldots.$ u. s. w.

§. 136.

So wie wir allgemeine Regeln gefunden haben, nach welchen eine mehrnahmige Größe zur zweyten und zur dritten Potenz erhoben werden kann, eben so lassen sich auch für die vierte, fünfte und höhere Potenzen der mehrnahmigen Größen allgemeine Regeln herleiten. Allein, da diese Regeln schon sehr weitläufig sind, und wir überdieß weiter unten, bey der Lehre von den unendlichen Reihen, Gelegenheit haben werden, eine allgemeinere Formel für jede Potenz $n$ einer zweynahmigen Größe

$(a + b)$ zu entwickeln, so können solche hier mit Stillschweigen übergangen werden. Indessen können doch die fleißigern Anfänger bereits mit ihren eigenen Kräften untersuchen, aus was für Theilen die 4te, 5te, 6te, und 7te Potenz einer zweynahmigen Größe bestehe, wodurch sich sodann jede zweynahmige Größe auf solche Potenzen sehr leicht und geschwind erheben läßt.

§. 137.

Grundsätze. Nr. 1. Wenn man gleiche Größen zu gleichen Potenzen erhebt, so sind die Potenzen einander gleich; erhebt man aber ungleiche Größen zu gleichen Potenzen, so ist die Potenz der kleinern Größe auch kleiner als die andere.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| Es ist $8 = 5 + 3$ | Wenn $a = b$ |
| also auch $8^2 = (5 + 3)^2$ | so ist auch $a^m = b^m$ |
| nähmlich $64 = 25 + 30 + 9$ | Ist aber $a > b$ |
| | so ist auch $a^m > b^m$ |

Nr. 2. Zieht man aus gleichen Größen gleiche Wurzeln, so sind auch die Wurzeln einander gleich. Wenn man hingegen aus ungleichen Größen gleiche Wurzeln zieht, so ist jene größer, die aus der größern Größe gezogen wird.

Beyspiele.

| | |
|---|---|
| Es ist $64 = 25 + 30 + 9$ | Wenn $a = b$ |
| also auch $\sqrt{64} = \sqrt{(25 + 30 + 9)}$ | so ist auch $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ |
| nähmlich $\sqrt{64} = \sqrt{(5 + 3)^2}$ | Ist aber $a > b$ |
| und $8 = 5 + 3$ | so ist auch $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ |

# II. Abschnitt.

## Von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus zusammengesetzten Größen insbesondere.

§. 138.

Wie aus einer einnahmigen algebraischen Größe die Quadrat- und Cubikwurzel ausgezogen werden kann, ist bereits (im §. 129) gesagt worden.

Damit man aber auch die Quadrat- und Cubikwurzel aus einer vorgegebenen Zahl, wenn die Wurzel nur aus einer einzigen Ziffer besteht, alsogleich wissen könne, ist es erforderlich, daß man die zweyten und dritten Potenzen aller einfachen Zahlen von 1 bis 9 im Gedächtniß behalte, wovon die erstern ohnehin schon in dem Einmahleins enthalten sind.

Zur kurzen Übersicht kann folgende Tafel dienen:

| Wurzeln | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadratzahlen | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 |
| Cubikzahlen | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 |

woraus schon zu ersehen ist, daß die Quadratwurzel aus einer Zahl von einer oder zwey Ziffern, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen könne, und daß solche Wurzel, wenn die gegebene Zahl nicht unter den Quadratzahlen in der Tafel enthalten ist, irrational seyn müsse (§. 125); so ist z. B. $\sqrt{72} > 8$, und $< 9$, und folglich irrational. Eben so ist auch daraus zu ersehen, daß die Cubikwurzel aus einer Zahl, die nicht mehr als 3 Ziffern enthält, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen könne; so ist z. B.

$\sqrt{999} < 10$, weil $10^3 = 1000$; und $> 9$, weil $9^3 = 729$ ist;

eben so ist $\sqrt[3]{81} > 4$, und $< 5$.

## §. 139.

Wenn aus einer mehrnahmigen algebraischen Größe die Quadratwurzel gezogen werden soll, so kann die Größe, wenn sie auch aus noch so vielen Gliedern besteht, als das Quadrat einer zweynahmigen Wurzel angesehen werden; weil (vermög §. 132) jede mehrnahmige Größe, als zweynahmig vorgestellt, ins Quadrat erhoben werden kann.

Wenn man sich nun der Theile erinnert, aus welchen das Quadrat einer zweynahmigen Größe zusammengesetzt ist, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$; so ergeben sich für die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer mehrnahmigen Größe, z. B. aus $a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4$ folgende allgemeine Regeln.

$$\sqrt{(a^4 + 6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4)} = a^2 + 3ab - 2b^2$$

$$\underline{+\ a^4}$$

$$6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 \mid : 2a^2$$

$$\underline{+\ 6a^3b \quad +\ 9a^2b^2}$$

$$-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 \mid : (2a^2 + 6ab)$$

$$\underline{-\ 4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4}$$

$$+ \qquad + \qquad -$$

$$0$$

1) Aus dem ersten Gliede der gegebenen Größe ziehe man die Quadratwurzel (gibt $a^2$); dieses setze man als das erste Glied der Wurzel nach dem Gleichheitszeichen hin; erhebe es wieder ins Quadrat, und ziehe es vom ersten Gliede ab, so wird solches getilget.

2) Da nun ferner noch das doppelte Product aus dem ersten in das zweyte Glied, in dem Reste stecken muß; so dividire man das folgende Glied ($6a^3b$) des Restes durch den doppelten gefundenen ersten Theil ($2a^2$) der Wurzel, so gibt der Quotient ($3ab$) das zweyte Glied der gesuchten Wurzel. Mit diesem Gliede multiplicire man den Divisor, so hat man das doppelte Product des ersten Theiles in den zweyten ($6a^3b$); ferner multiplicire man eben dieses Glied der Wurzel noch mit sich selbsten, so hat man das Quadrat des zweyten Theiles ($9a^2b^2$); ziehet man nun beyde von der gegebenen Größe ab, so hat man das vollständige Quadrat der gefundenen zweynahmigen Größe ($a^2 + 3ab$) abgezogen.

3) Bleibt noch ein Rest übrig, so ist es ein Zeichen, daß die gesuchte Wurzel mehr als zwey Glieder habe; man sehe deßwegen die schon gefundenen zwey Glieder als den ersten Theil der Wurzel an; und da das Quadrat dieses Theiles schon abgezogen ist, so dividire man wieder den Rest durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (hier nähmlich durch $2a^2 + 6ab$), so wird der Quotient ($-2b^2$) das folgende Glied der Wurzel seyn. Mit diesem neuen Gliede multiplicire man wieder den Divisor, erhebe auch eben dieses Glied ins Quadrat, ziehe das sämmtliche Product von dem Dividendus ab, so hat man

schon bereits das Quadrat der gefundenen dreynahmigen Größe ($a^2 + 3ab - 2b^2$) von der vorgegebenen Größe abgezogen. Und so könnte man auch, wenn noch ein Rest vorhanden wäre, das vierte Glied der Wurzel finden, indem man alle bereits schon gefundenen Glieder als den ersten Theil der Wurzel betrachtet, und den zweyten durch die Division mittelst des Doppelten aller schon gefundenen Glieder der Wurzel suchet, u. s. w.

4) Wenn nun die gegebene Größe ein vollständiges Quadrat ist, so wird diese vorgeschriebene Operation einmahl ein Ende nehmen; im Gegentheil aber, wenn die vorgegebene Größe kein vollständiges Quadrat seyn sollte, so würde man auch mit diesem Verfahren nie zu Ende kommen, sondern die Glieder der Wurzel würden ohne Ende fortgehen, wie es im Beyspiele III. zu ersehen ist.

## Beyspiele.

I. $\sqrt{(4 - 8y + 4y^3 + y^4)} = 2 - 2y - y^2$

$+4$

$-$

---

$-8y + 4y^3 + y^4 \mid :4$

$-8y + 4y^2$

$+ \quad -$

---

$-4y^2 + 4y^3 + y^4 \mid :4 - 4y$

$-4y^2 + 4y^3 + y^4$

$+ \quad - \quad -$

---

0

II. $\sqrt{\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right)} = x - \frac{a}{2}$

$+x^2$

$-$

---

$-ax + \frac{a^2}{4} \Big| :2x$

$-ax + \frac{a^2}{4}$

$+ \quad -$

---

0

III. $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} \cdots$

$+ a^2$

$-$

$-x^2 \quad : 2a$

$-x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$

$+ \quad -$

$-\frac{x^4}{4a^2} \quad : 2a - \frac{x^2}{a}$

$-\frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}$

$+ \quad - \quad -$

$-\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \quad : 2a - \cdots\cdots$

## §. 140.

Wenn aus einer mehrnahmigen algebraischen Größe die Cubikwurzel gezogen werden sollte, so fließen aus den schon bekannten Theilen, aus welchen der Cubus einer zweynahmigen Größe $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ zusammengesetzt ist (§. 133), folgende allgemeine Regeln:

1) Aus dem ersten Gliede der gegebenen Größe ($8a^3$ im folgenden Beyspiele I.) ziehe man die Cubikwurzel ($2a$), so gibt dieses Glied den ersten Theil der gesuchten Wurzel; den Cubus hiervon ziehe man von der gegebenen Größe ab.

2) Da nun in dem Reste das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theils, multiplicirt mit dem zweyten enthalten seyn muß (§. 133); so dividire man solchen durch das dreyfache Quadrat des schon gefundenen ersten Theiles ($12a^2$), so gibt der Quotient ($3b$) den zweyten Theil der gesuchten Wurzel. Mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor, so ist dieses ($36a^2b$) das dreyfache Product aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweyten. Ferner multiplicire man das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles mit dem ersten (gibt $54ab^2$); sodann erhebe man auch noch den zweyten Theil zum Cubus

(gibt $27b^3$); und da alles dieses in dem Reste enthalten seyn muß (§. 133), so ziehe man solches von dem Reste gehörig ab.

3) Bleibt nun noch ein Rest übrig, wie im folgenden Beyspiele II., so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr, als zwey Gliedern bestehe. Man sehe daher die schon gefundenen zwey Glieder $(2x^2 + x)$ als den ersten Theil der Wurzel an, und suche, wie vorhin, den zweyten; man dividire zu dem Ende den Rest durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so gibt der Quotient das dritte Glied der Wurzel. Mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor; das dreyfache Quadrat dieses Quotienten multiplicire man mit den vorhergehenden Gliedern der Wurzel; endlich erhebe man auch diesen Quotienten zum Cubus, und ziehe diese drey Producte von dem Dividendus ab. Und so wird dieses Verfahren bey jedem nachfolgenden Reste wiederhohlet, indem man jederzeit die schon gefundenen Glieder der Wurzel als den ersten Theil betrachtet, und den zweyten suchet.

4) Kömmt man nun durch diese Operation einmahl zu Ende, so, daß kein Rest mehr übrig bleibt, so ist die vorgegebene Größe ein vollkommener Cubus, wovon die Wurzel gefunden ist; im Gegentheile aber, wenn die vorgegebene Größe kein vollkommener Cubus seyn sollte, wie im folgenden Beyspiele III., so wird man auch mit dieser Operation nie zu Ende kommen.

## Beyspiele.

I. $\sqrt[3]{(8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3)} = 2a + 3b$

$+ 8a^3$

$-$

---

$36a^2b + 54ab^2 + 27b^3 \mid : 12a^2$

$+ 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

$- \quad - \quad -$

---

0

II. $\sqrt[3]{(8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27)} = 2x^2 + x - 3$

$+ 8x^6$

$-$

$12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27 \mid : 12x^4$

$+ 12x^5 + 6x^4 + x^3$

$- \quad - \quad -$

$- 36x^4 - 36x^3 + 45x^2 + 27x - 27$

$: 12x^4 + 12x^3 + 3x^2$

$- 36x^4 - 36x^3 - 9x^2 + 54x^2 + 27x - 27$

$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad +$

0

III. $\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}}$

u. s. w.

Anmerkung. Es ist hier noch zu erinnern, daß man bey der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus mehrnahmigen algebraischen Größen, auch zugleich auf die Ordnung der Glieder zu sehen habe, damit nicht die Division in irgend einem unrechten Gliede geschieht, wodurch man mehrere Glieder in der Wurzel erhält, die sich zwar wieder wechselweise tilgen, die Operation hingegen doch dadurch verzögert wird. Da aber der Fall äußerst selten vorkömmt, daß aus mehrnahmigen algebraischen Größen die Quadrat- oder Cubikwurzel zu ziehen wäre, sondern meistens nur aus einem vollständigen Quadrate einer zweynahmigen Größe, welches ohnehin leicht zu ordnen ist, die Wurzel zu ziehen verlangt wird, so wollen wir uns hierbey auch nicht länger aufhalten.

## §. 141.

Um aber auch allgemeine Regeln bestimmen zu können, nach welchen aus jeder gegebenen, mit noch so viel Ziffern geschriebenen Zahl die Quadrat- und Cubikwurzel theilweise, und zwar nach ihrer dekadischen Ordnung gefunden werden kann, ist es vorher nothwendig, Untersuchungen anzustellen, wie und auf welche Art die Theile des Quadrats oder Cubus bey unserem Zahlensysteme mit einander verbunden sind, und wie weit sich

nach der dekadischen Ordnung das Quadrat oder der Cubus einer jeden einzelnen bedeutlichen Ziffer der Wurzel in dem Quadrate oder Cubus aller Ziffern erstrecke. Dieses läßt sich bestimmen, wenn man eine vorgegebene Zahl nach ihrer dekadischen Ordnung in Theile zerleget, und sodann eine solche Zahl, als eine mehrnahmige Größe, zum Quadrate oder Cubus (nach §. 132 und 135) erhebt; wie es in der Folge zu ersehen seyn wird.

§. 142.

Wenn man eine Zahl, welche aus $m$ (z. B. aus 3) Ziffern besteht, zum Quadrat erhebt, so kann das Quadrat nicht mehr als $2m$ (als 6) und nicht weniger als $2m-1$ (als 5) Ziffern haben.

Denn da die Zahl nur aus $m$ (aus 3) Ziffern besteht, so muß dieselbe, wenn sie auch aus lauter 9nern bestünde, (nähmlich 999 wäre), dennoch kleiner seyn, als 1 mit $m$ angehängten Nullen ($999 < 1000$); daher ist auch ihr Quadrat kleiner als das Quadrat von 1 mit $m$ angehängten Nullen. (§. 137, Grundsatz 1). Nun aber ist das Quadrat von 1 mit $m$ angehängten Nullen (vermög §. 121) eine Einheit mit $2m$ angehängten Nullen (nähmlich $1000^2 = 1000000$), welches die möglich kleinste Zahl ist, die mit $2m+1$ (mit 7) Ziffern geschrieben wird; folglich kann das Quadrat einer Zahl von $m$ (von 3) Ziffern nicht aus $2m+1$ (aus 7) Ziffern, sondern höchstens nur aus $2m$ (aus 6) Ziffern bestehen.

Ferner ist die möglich kleinste Zahl von $m$ (von 3) Ziffern eine Einheit mit $m-1$ (mit 2) angehängten Nullen (nähmlich 100); und diese zum Quadrat erhoben gibt 1 mit $2m-2$ (mit 4) angehängten Nullen, (nähmlich $100^2 = 10000$); folglich eine Zahl mit $2m-1$ (mit 5) Ziffern; daher muß auch das Quadrat von jeder andern Zahl vom $m$ (von 3) Ziffern wenigstens aus $2m-1$ (aus 5) Ziffern bestehen.

§. 143.

Man kann demnach auch umgekehrt aus der Anzahl der Ziffern einer vorgegebenen Zahl alsogleich wissen, aus wie viel Ziffern die daraus zu ziehende Quadratwurzel bestehen müsse; wenn man nähmlich eine gegebene Quadratzahl

von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwey Ziffern abtheilet, wo die letzte Classe links bey einer ungeraden Anzahl der Ziffern auch nur eine einzige Ziffer enthält, so besteht die Quadratwurzel davon aus so viel Ziffern, als Classen vorhanden sind.

§. 144.

Erhebt man ferner eine Zahl $= (\ldots 1000d + 100c + 10b + a)$, deren bedeutliche Ziffern nähmlich von der Rechten gegen die Linke $a$, $b$, $c$, $d$ u. s. w. seyn sollen, als eine mehrnahmige Größe betrachtet, nach §. 132) ins Quadrat, so ist

das Quadrat der Einheiten $= a^2$
" " " Zehner $= b^2 \cdot 100$
" " " Hunderte $= c^2 \cdot 10000$
" " " Tausende $= d^2 \cdot 1000000$

} (§. 121).

Ferner ist das doppelte Product aus den Einheiten in alle links folgende Ziffern $= 2a\,(10b + 100c + \ldots)$;

Das doppelte Product aus den Zehnern in alle links folgende Ziffern $= 20b\,(100c + 1000d + \ldots)$;

Das doppelte Product aus den Hunderten in alle links folgende Ziffern $= 200c\,(1000d + \ldots)$ u. s. w.

Wenn man nun dieses alles durch die Addition (nach §. 17) in eine Summe bringt und gehörig ordnet, so folget daraus

1) daß das Quadrat der Einheiten bis in die erste Ziffer der Summe auf der rechten Seite sich erstrecken müsse, weil $a^2$ immer einige Einheiten in sich enthält, sobald $a$ eine bedeutliche Ziffer ist; daß das Quadrat der Zehner in der Summe sich bis in die dritte Ziffer erstrecken müsse, weil Zehner mit Zehnern multipliciret zum Producte Hunderte geben; daß das Quadrat der Hunderte sich bis in die fünfte, und das Quadrat der Tausende sich bis in die siebente Ziffer erstrecken müsse u. s. w.

Wenn man demnach die Quadratzahl von der Rechten gegen die Linke in Classen eintheilet, und jeder Classe zwey Ziffern gibt, wo die letzte Classe links auch nur eine einzige Ziffer behalten kann, so erstreckt sich das Quadrat der Ein-

heiten bis in die rechte Ziffer der ersten Classe; das Quadrat der Zehner bis in die rechte Ziffer der zweyten Classe; das Quadrat der Hunderte bis zur rechten Ziffer der dritten Classe u. s. w. und folglich erstrecket sich das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel bis zur rechten Ziffer der letzten Classe.

2) Was die doppelten Producte betrifft, so kann das doppelte Product aus den Einheiten in alle links stehende Ziffern, nur bis in die zweyte Ziffer der Summe zur Rechten, oder bis in die linke Ziffer der ersten Classe zur Rechten reichen, weil sich keine Einheiten mehr dabey befinden können. Das doppelte Product aus den Zehnern in alle links folgende Ziffern, kann nur bis in die vierte Ziffer der Summe zur Rechten, oder bis in die linke Ziffer der zweyten Classe sich erstrecken, weil Zehner mit Hunderten multipliciret zum Producte Tausende geben. Eben so kann das doppelte Product, aus den Hunderten in die links folgenden Ziffern, sich nur bis in die linke Ziffer der dritten Classe erstrecken u. s. w. Es kann daher auch das doppelte Product aus der letzten Ziffer der Wurzel links in die nächstvorhergehende sich nur bis in die linke Ziffer der vorletzten Classe erstrecken; es ist nähmlich bey der Zahl $1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$; wenn solche zum Quadrate erhoben wird, das doppelte Product aus $1000\,d$ in $100\,c = 2\,cd$. 100000, wo die bedeutlichen Ziffern von $2\,cd$ nur bis zur linken Ziffer der dritten Classe reichen können.

§. 145.

Alles dieses wohl erwogen, gibt für die Ausziehung der Quadratwurzel aus was immer für einer Zahl (z. B. aus 21381376) folgende allgemeine Regeln.

1) Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen von zwey Ziffern ein, nähmlich 21 | 38 | 13 | 76; wo für die letzte Classe links auch nur eine Ziffer übrig bleibt, wenn die vorgegebene Zahl eine ungerade Anzahl Ziffern hat; so muß die Quadratwurzel aus so vielen Ziffern bestehen, als Classen vorhanden sind, (vermög §. 143).

2) Da nun das Quadrat von der höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten Classe links (21) ganz enthalten seyn muß (§. 144, Nr. 1), so ziehe man aus dieser Classe die Quadratwurzel, oder wenn es keine vollkommene Quadratzahl ist, so nehme man die nächst kleinere Quadratzahl (16), und ziehe die Wurzel daraus (4), so hat man auf diese Art die höchste Ziffer der Wurzel gefunden, welche hinter dem Gleichheitszeichen angesetzt wird. Diesen gefundenen Theil der Wurzel erhebe man wieder zum Quadrate, und ziehe solches von der ersten Classe ab.

3) Da in dem Reste (5) nebst der ersten Ziffer der zweyten Classe (3) das doppelte Product, aus der schon gefundenen Ziffer der Wurzel in die nächst folgende Ziffer, ganz enthalten seyn muß (§ 144, Nr. 2); so setze man zu dem Reste die erste Ziffer (3) der nächstfolgenden Classe herunter, dividire diese Zahl (53) durch das doppelte der schon gefundenen Ziffer (durch 4 . 2 = 8), so ist der Quotient (6) die zweyte gesuchte Ziffer der Wurzel, welche neben der schon gefundenen rechts angesetzet wird. Mit diesem gefundenen Quotienten (6) multiplicire man den Divisor, und ziehe das Product (48) vom Dividendus gehörig ab; und da ferner in dem Reste (5) nebst der zweyten Ziffer der zweyten Classe (8) auch noch das Quadrat der zweyten gefundenen Ziffer enthalten seyn muß (§. 144, Nr. 1), so hänge man an diesen Rest die zweyte Ziffer der folgenden Classe an (58), und ziehe das Quadrat (36) der zweyten gefundenen Ziffer davon ab.

```
√ 21 | 38 | 13 | 76 = 4624
  16
  ----
  53 : 8
  48
  ----
  58
  36
  ----
  22

  538 : 8  6
  516      6
  ---------
 2213 : 92  2
 1844       2
 ---------
36976 : 924  4
36976        4
 ---------
    0
```

Dieses alles kann aber kürzer verrichtet werden, wenn man zum ersten Reste (5) beyde Ziffern der folgenden Classe (38) auf einmahl herunter setzet, und dieses (538) durch das Dop-

pelte der schon gefundenen Wurzel (8) dergestalt dividiret, daß die letzte Ziffer (8) von der Division frey bleibe; sodann den Quotienten (6) an den Divisor rechts anhängt; diesen vermehrten Divisor (86) mit dem Quotienten (6) multipliciret, und das Product (516) von dem ganzen Dividendus (538) gehörig abziehet, wie solches in dem angeführten Beyspiele bey der Wiederhohlung unter dem eingeschlossenen Viereck zu ersehen ist, so daß bey der Anwendung der Rechenkunst die in dem eingeschlossenen Vierecke angezeigte Arbeit gänzlich außer Acht gelassen wird.

4) Besteht nun die Wurzel aus noch mehreren Ziffern, so sehe man die schon gefundenen Ziffern (46) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche wie vorhin, den zweyten Theil; man setze daher zu dem Rest (22) die folgende Classe (13) herunter, und dividire dieses (2213) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (92), so, daß wieder die letzte Ziffer (3) von der Division frey bleibe; auf diese Art gibt der Quotient (2) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel. Diesen Quotienten hänge man wieder rechts an den Divisor an, multiplicire diesen vermehrten Divisor (922) mit dem Quotienten (2), und ziehe das Product von dem Dividendus gehörig ab.

5) Und so wird zu jedem Reste die nächstfolgende Classe herunter gesetzt, und durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel so dividiret, daß die letzte Ziffer frey bleibe; der Quotient wird zu den schon gefundenen Ziffern der Wurzel hinzugefüget, auch rechts an den Divisor angehängt, sodann dieser vermehrte Divisor mit der nähmlichen angehängten Ziffer multipliciret, und das Product von dem Dividendus abgezogen.

6) Sollte irgendwo das Product aus dem Quotienten in den vermehrten Divisor zu groß ausfallen, und nicht von dem betreffenden Dividendus abgezogen werden können, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden sey, und vermindert werden müsse. In dem folgenden Beyspiele Nr. 1 bey der ersten Division, muß man sagen 4 in 16 geht 3 mahl, da es doch bey der gewöhnlichen Division 4 mahl ginge. Es ist

aber bey der Ausziehung der Quadratwurzel allzeit rathsam, den Quotienten anfänglich lieber zu groß, als zu klein anzunehmen, weil man nach geschehener Subtraction nicht so geschwind, wie bey der gewöhnlichen Division entscheiden kann, ob der Quotient nicht zu klein angenommen worden sey.

7) Sollte irgendwo das Doppelte der schon gefundenen Wurzel in dem betreffenden Dividendus nicht enthalten seyn, so muß in der Wurzel an der Stelle des Quotienten eine Nulle gesetzt werden; sodann setze man zu dem Reste noch eine Classe herunter, und fahre mit der Operation auf die vorgeschriebene Art fort, wie es im Beyspiele Nr. 2 zu ersehen ist.

8) Sind nun bereits alle Classen herunter gesetzt, und es geht die letzte Subtraction genau auf, so ist es ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl eine vollkommene Quadratzahl sey; wovon die gefundene Zahl die Wurzel ist. Bleibt aber bey der letzten Subtraction noch ein Rest übrig, wie im Beyspiele Nr. 1, so ist es ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl kein vollkommenes Quadrat, und folglich die Wurzel dieser Zahl eine irrationale Größe sey (§. 125), dergestalt, daß die gesuchte Wurzel zwischen der gefundenen 238, und zwischen der um eine Einheit vermehrten Zahl 239, als zwischen zwey gefundenen Gränzen liegen müsse.

## Beyspiele.

Nr. 1.

$\surd$ 5 | 68 | 76 = 238
4

168 : 4 3
129 3

3976 : 46 8
3744 8

232 Rest

Nr. 2.

$\surd$ 65 | 48 | 04 | 64 | 00 = 80920
64

148 : 16
14804 : 160 9
14481 9

32364 : 1618 2
32364 2

0

## §. 146.

Um sich aber auch den Gränzen einer irrationalen Wurzel durch Decimalstellen nach Belieben nähern zu können, verfahre man auf folgende Art:

1) Man hänge an die vorgegebene Zahl (im nebenstehenden Beyspiele an 1415), oder welches einerley ist, man hänge, nachdem alle vorhandene Classen schon herunter gesetzt sind, an den letzten Rest (46) eine Classe Nullen an, dividire dieses (4600) durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (74), so ist der Quotient (6) abermahl eine Ziffer der Wurzel. Da aber diese Wurzel (vermög §. 121) zehnmahl so groß ist, als die gesuchte, weil durch das Anhängen zweyer Nullen das Quadrat mit 100 multiplicirt worden ist, so dividire man diese Wurzel durch 10, nähmlich man schneide von dieser Wurzel rechts eine Decimalstelle ab, so hat man die gesuchte Wurzel bis in die Zehntel richtig gefunden.

$\sqrt{14\,|\,15} = 37{,}61$

9

515 : 67

469 7

4600 : 746

4476 6

12400 : 752

2) Will man dieselbe genauer haben, so hänge man abermahl an den Rest (124) eine Classe Nullen an, und dividire dieses wieder durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel (752), ohne auf die Decimalstellen Acht zu geben, so wird der Quotient aus erst angeführter Ursache Hunderttel bedeuten, und folglich die zweyte Decimalstelle der gesuchten Wurzel seyn.

3) Und so könnte man sich, ohne Ende fort, der Wurzel immer mehr nähern, da man jederzeit an den Rest eine Classe Nullen anhängt, und solchen sodann durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel dividiret, ohne jedoch jemahls zu einer solchen Wurzel zu gelangen, die mit sich selbst multiplicirt, die vorgegebene Größe vollkommen zum Vorschein bringet.

## Beyspiele.

$\sqrt{3\,|\,46\,|\,95} = 186{,}2$

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 246 : 28 | |
| 224 | 8 |
| 2295 : 366 | |
| 2196 | 6 |
| 9900 : 3722 | |
| 7444 | 2 |
| 2456 Rest. | |

$\sqrt{5} = 2{,}236$

| | |
|---|---|
| 4 | |
| 100 : 42 | |
| 84 | 2 |
| 1600 : 443 | |
| 1329 | 3 |
| 27100 : 4466 | |
| 26796 | 6 |
| 304 Rest. | |

Auf diese Art ist nun im letzten Beyspiele $\sqrt{5} > 2{,}236$ aber auch $\sqrt{5} < 2{,}237$; setzet man die Ausziehung der Wurzel weiter fort, so findet man $\sqrt{5} > 2{,}23606797$ und $\sqrt{5} < 2{,}23606798$ u. s. w.

### §. 147.

Wäre aus einem Decimalbruche, oder auch aus einer ganzen Zahl, nebst einem angehängten Decimalbruche, die Quadratwurzel zu ziehen, so beobachte man Folgendes:

1) Man hänge hinten eine Nulle an, wenn der Decimalbruch eine ungerade Anzahl Decimalstellen haben sollte; sodann lasse man das Comma außer Acht, und ziehe die Quadratwurzel aus, als wenn es eine bloße ganze Zahl wäre.

2) Da aber durch die Auslassung des Comma die vorgegebene Zahl mit 1, nebst so vielen angehängten Nullen, als Decimalstellen vorhanden sind, multiplicirt wird (§. 102); so wird eben dadurch die Wurzel mit 1 nebst halb so viel angehängten Nullen multipliciret (§. 121). Man schneide daher von der gefundenen Wurzel so viele Decimalstellen ab, als in der Zahl Decimalclassen vorhanden sind, so hat man die verlangte Wurzel.

3) Sollte man die Wurzel mit mehreren Decimalstellen bestimmen, so hänge man an den letzten Rest eine Classe Nullen, und verfahre übrigens, wie es (in §. 146) gesagt worden ist.

## Beyspiele.

$\sqrt{}\ 5\,|\,94,\,|\,82\,|\,33\,|\,21 = 24{,}389$

| | | |
|---|---|---|
| 4 | | |
| 194 : 44 | | |
| 176 | 4 | |
| 1882 : 483 | | |
| 1449 | 3 | |
| 43333 : 4868 | | |
| 38944 | 8 | |
| 438921 : 48769 | | |
| 438921 | 9 | |
| 0 | | |

$\sqrt{}\ 0,\,|\,94\,|\,30 = 0{,}971$

| | | |
|---|---|---|
| 81 | | |
| 1330 : 187 | | |
| 1309 | 7 | |
| 2100 : 1941 | | |
| 1941 | 1 | |
| 159 Rest. | | |

### §. 148.

Ist endlich aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel zu ziehen, so muß dieselbe (§. 122) aus dem Zähler und aus dem Nenner gezogen werden. Nur kann man die Arbeit erleichtern, wenn der Nenner irrational ist, indem man den Zähler und Nenner mit dem Nenner multipliciret, dadurch wird derselbe rational; so ist z B.

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3{,}1622}{5} = 0{,}6324.$$

Oder man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch, und ziehe die Wurzel (nach §. 147). So ist z. B.

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{0{,}375} = \sqrt{0{,}3750} = 0{,}61\ \ldots$$

### §. 149.

Der Cubus einer Zahl, die mit $m$ (z. B. mit 3) Ziffern geschrieben wird, kann nicht mehr als $3m$ (als 9) Ziffern, und nicht weniger, als $3m-2$ (als 7) Ziffern haben.

Denn da die Zahl nur aus $m$ (aus 3) Ziffern besteht, so ist sie, wenn sie auch aus lauter 9nern bestünde (nähmlich 999 wäre), doch sicher kleiner als 1 mit $m$ angehängten Nullen ($999 < 1000$); daher ist auch ihr Cubus kleiner, als der Cubus

von 1 mit $m$ angehängten Nullen (§. 137, Grundsatz 1). Nun aber ist der Cubus von 1 mit $m$ (mit 3) angehängten Nullen eine Einheit mit $3m$ (mit 9) angehängten Nullen (nähmlich $1000^3 = 1000000000$) (vermög §. 121), welches die möglichst kleinste Zahl ist, die mit $3m+1$ (mit 10) Ziffern geschrieben wird; folglich kann der Cubus einer Zahl von $m$ (von 3) Ziffern, nicht aus $3m+1$ (aus 10), sondern höchstens aus $3m$ (aus 9) Ziffern bestehen.

Ferner ist die möglichst kleinste Zahl von $m$ (von 3) Ziffern eine Einheit mit $m-1$ (mit 2) angehängten Nullen (nähmlich 100); hiervon ist der Cubus eine Einheit mit $3m-3$ (mit 6) angehängten Nullen (nähmlich $100^3 = 1000000$) (vermög §. 121), welches schon eine Zahl von $3m-2$ (von 7) Ziffern ist; folglich muß auch der Cubus einer jeden anderen Zahl von $m$ (von 3) Ziffern wenigstens aus $3m-2$ (aus 7) Ziffern bestehen.

Und so kann man auch wieder umgekehrt aus der gegebenen Anzahl der Ziffern einer Cubikzahl alsogleich wissen, aus wie viel Ziffern die daraus gezogene Cubikwurzel bestehen müsse. Wenn nähmlich eine gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke, in Classen von 3 Ziffern abgetheilet wird, wo die letzte Classe links auch nur 2, oder gar nur 1 Ziffer enthalten kann, so besteht die Cubikwurzel davon aus so viel Ziffern, als Classen vorhanden sind.

§. 150.

Wenn man ferner eine Zahl $= (\ldots 1000d + 100c + 10b + a)$, deren bedeutliche Ziffern nähmlich von der Rechten gegen die Linke $a$, $b$, $c$, $d$ u. s. w. seyn sollen, als mehrnahmig betrachtet, und solche nach den Regeln (§. 135) zum Cubus erhebt, so ist

der Cubus der Einheiten $= a^3$

$=$ $=$ $=$ Zehner $= b^3 \cdot 1000$

$=$ $=$ $=$ Hunderte $= c^3 \cdot 1000000$

$=$ $=$ $=$ Tausende $= d^3 \cdot 1000000000$

u. s. w.

} (§. 121.)

Sodann ist das dreyfache Product aus den Einheiten in das

Quadrat der Summe von allen links folgenden Theilen $= 3a(10b + 100c + 1000d + \ldots)^2$.

Das dreyfache Product aus den Zehnern in das Quadrat der Summe von allen links folgenden Theilen $= 30b(100c + 1000d + \ldots)^2$.

Das dreyfache Product aus den Hunderten in das Quadrat der Summe von allen links folgenden Theilen $= 300c(1000d + \ldots)^2$ u. s. w.

Ferner ist das dreyfache Product aus dem Quadrate der Einheiten in alle links folgende Theile $= 3a^2(10b + 100c + 1000d + \ldots)$.

Das dreyfache Product aus dem Quadrate der Zehner in alle links folgende Theile $= 300b^2(100c + 1000d + \ldots)$.

Das dreyfache Product aus dem Quadrate der Hunderte in alle links folgende Theile $= 30000c^2(1000d + \ldots)$ u. s. w.

Wird nun alles dieses nach der gewöhnlichen Addition in eine Summe gebracht, so lassen sich wieder folgende Schlüsse daraus ableiten:

1) Der Cubus der Einheiten muß in der Summe sich bis in die erste Ziffer rechts erstrecken, weil $a^3$ immer einige Einheiten in sich enthalten muß, wenn $a$ eine bedeutliche Ziffer ist. Der Cubus von der bedeutlichen Ziffer der Zehner $b$, kann sich nur bis in die vierte Ziffer der Summe rechts erstrecken, weil Zehner zum Cubus erhoben Tausende geben. Eben so kann der Cubus der Hunderte in der Summe nur bis in die siebente, und der Cubus der Tausende nur bis in die zehnte, von der rechten Seite gezählet, sich erstrecken u. s. w.

Theilt man daher die Cubikzahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, und gibt jeder Classe drey Ziffern, wo die letzte Classe links auch nur eine, oder zwey Ziffern haben kann, so erstrecket sich der Cubus der Einheiten bis in die rechte Ziffer der ersten Classe; der Cubus der Zehner bis in die rechte Ziffer der zweyten Classe; der Cubus der Hunderte bis in die rechte Ziffer der dritten Classe u. s. w. und folglich erstrecket sich der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel bis in die rechte Ziffer oder Stelle der letzten Classe.

2) Das dreyfache Product aus den Einheiten in das Quadrat der Summe aller links folgenden Ziffern kann sich in der Hauptsumme nur bis in die dritte Ziffer, oder bis in die linke Ziffer der ersten Classe erstrecken, weil in diesem Quadrate das kleinste Glied schon Hunderte anzeiget. Das dreyfache Product aus den Zehnern in das Quadrat der Summe aller links folgenden Ziffern kann sich nur bis in die sechste Ziffer, oder bis in die linke Ziffer der zweyten Classe erstrecken; weil in diesem Quadrate das kleinste Glied Zehntausende bedeutet, und Zehntausende mit Zehnern multipliciret zum Producte Hunderttausende geben. Eben so kann das dreyfache Product aus den Hunderten in das Quadrat der Summe aller folgenden Ziffern sich nur bis in die linke Ziffer der dritten Classe erstrecken u. s. w.; folglich kann sich auch das dreyfache Product aus dem Quadrate der höchsten Ziffer der Wurzel in die nächst vorhergehende Ziffer, nur bis in die linke Ziffer der vorletzten Classe erstrecken.

3) Ferner kann das dreyfache Product aus dem Quadrate der Einheiten in alle links folgende Ziffern sich nur bis in die zweyte Ziffer rechts, oder bis in die mittlere Ziffer der ersten Classe erstrecken; weil Einheiten, mit Zehnern multipliciret, zum Producte Zehner geben. Das dreyfache Product aus dem Quadrate der Zehner in alle links folgende Ziffern kann sich nur bis in die fünfte Ziffer, oder bis in die mittlere Ziffer der zweyten Classe erstrecken; weil Zehner ins Quadrat erhoben Hunderte geben, und diese wieder mit Hunderten multipliciret zum Producte Zehntausende geben. Und eben so kann sich das dreyfache Product aus dem Quadrate der Hunderte in die folgenden Ziffern nur bis in die mittlere Ziffer der dritten Classe erstrecken u. s. w. Daher kann auch das dreyfache Product, aus der höchsten Ziffer der Wurzel in das Quadrat der vorhergehenden Ziffer, sich nur bis in die mittlere Ziffer der vorletzten Classe erstrecken.

## §. 151.

Alles dieses in Betrachtung gezogen, gibt für die Auszie-

hung der Cubikwurzel, aus jeder mit noch so vielen Ziffern geschriebenen Zahl (z. B. 92959677), folgende Regeln:

1) Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, und gebe jeder Classe drey Ziffern, wo die letzte Classe links auch nur eine, oder zwey Ziffern behalten kann; so wird die Wurzel aus so vielen Ziffern bestehen müssen, als Classen vorhanden sind.

2) Da nun der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel in der ersten Classe links (in 92) enthalten seyn muß (§. 150, Nr. 1), so ziehe man aus dieser Classe die Cubikwurzel; oder wenn sie keine vollkommene Cubikzahl ist, so nehme man die nächst kleinere Cubikzahl (64), ziehe die Wurzel daraus (4), so gibt dieses die erste Ziffer der gesuchten Wurzel; den Cubus hiervon ziehe man von der ersten Classe ab; (64 von 92 bleiben 28).

3) Da in dem Reste (28) nebst der linken Ziffer der folgenden Classe (9) das dreyfache Product, aus dem Quadrate der gefundenen Ziffer in die nächst folgende Ziffer, enthalten seyn muß (§. 150, Nr. 2); so setze man zu dem Reste die erste Ziffer der folgenden Classe herunter (289), und dividire dieses durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel (48), so ist der Quotient (5) die zweyte Ziffer der gesuchten Wurzel; mit diesem Quotienten wird der Divisor multipliciret, und das Product von dem Dividendus abgezogen (240 von 289 bleiben 49). Da ferner in dem Reste (49) nebst der mittlern Ziffer der folgenden Classe (5) auch noch das drey-

$\sqrt[3]{}$ 92 | 959 | 677 = 453
64

| |
|---|
| 289 : 48 |
| 240 |
| 495 |
| 300 |
| 1959 |
| 125 |
| 1834 |

28959 : 48
240
300
125
27125

1834677 : 6075
18225
1215
27
1834677

0

fache Product, aus dem Quadrate der zweyten gefundenen Ziffer in die erste, enthalten seyn muß (§. 150, Nr. 3); so setze man zu dem Reste die zweyte Ziffer der folgenden Classe herunter (495), und ziehe das Product ($5^2 . 3 . 4 = 300$) davon ab (300 von 495 bleiben 195). Endlich da in diesem Reste (195) nebst der rechten Ziffer der zweyten Classe (9) auch noch der Cubus der zweyten gefundenen Ziffer enthalten seyn muß (§. 150, Nr. 1), so setze man zu diesem Reste die letzte noch übrige Ziffer (9) dieser Classe herunter (1959), und ziehe den Cubus der zweyten gefundenen Ziffer (125) davon ab.

Alles dieses, wie es hier in dem nebenstehenden Beyspiele in einem Vierecke eingeschlossen ist, kann wieder kürzer verrichtet werden, wenn man zu dem ersten Reste (28) alle drey Ziffern der folgenden Classe auf einmahl herunter setzet; dieses (28959) durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Ziffer ($4^2 . 3 = 48$) dergestalt dividiret, daß die letzten zwey Ziffern (59) von der Division frey bleiben; sodann multiplicire man mit dem Quotienten (5) den Divisor ($5 . 48 = 240$); ferner multiplicire man das dreyfache Quadrat des Quotienten mit dem schon gefundenen ersten Theil ($5^2 . 3 . 4 = 300$); endlich erhebe man auch den Quotienten (5) zum Cubus (125), setze diese drey Producte so untereinander, daß immer das folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt wird, addire solche zusammen, und ziehe die Summe von dem Dividendus ab (27125 von 28959 bleiben 1834) wie es im nebenstehenden Beyspiele bey der Wiederhohlung unterhalb des Vierecks zu ersehen ist; so, daß bey der Anwendung die in dem Vierecke angezeigte Arbeit gänzlich außer Acht gelassen wird.

4) Zu dem Reste (1834) setze man die nächstfolgende Classe (677) herunter, sehe die schon gefundenen Ziffern (45) als den ersten Theil der Wurzel an, und suche wie vorhin den zweyten Theil; zu diesem Ende dividire man diesen Rest (1834677) durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel ($45^2 . 3 = 6075$); so, daß wieder die letzten zwey Ziffern (77) von der Division frey bleiben, so ist der Quotient (3) die dritte Ziffer der gesuchten Wurzel; mit diesem Quotienten wird der Divisor

multipliciret ($3 \cdot 6075 = 18225$); sodann multiplicire man auch das dreyfache Quadrat desselben mit den vorigen schon gefundenen Ziffern der Wurzel ($3^2 \cdot 3 \cdot 45 = 1215$); endlich erhebe man auch den Quotienten zum Cubus ($3^3 = 27$); addire diese drey Producte, wie vorhin zusammen, und ziehe ihre Summe von dem Dividendus ab u. s. w.

5) Sollte irgendwo die Summe von den drey Producten zu groß ausfallen, und von dem Dividendus nicht abgezogen werden können, so ist es ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen worden sey, und daher vermindert werden müsse.

Wäre aber irgendwo der Divisor in dem betreffenden Dividendus gar nicht enthalten, so muß in der Wurzel an der Stelle des Quotienten eine Nulle gesetzt werden; sodann setze man noch eine Classe herunter, und verrichte die Division nach der erst vorgeschriebenen Art, wie es im folgenden Beyspiele Nr. 1 zu ersehen ist.

6) Sind nun auf diese Art alle Classen schon herunter gesetzt, und es geht die letzte Subtraction ohne Rest genau auf, so ist die vorgegebene Zahl eine vollkommene Cubikzahl; bleibt aber bey der letzten Subtraction noch ein Rest übrig, wie im Beyspiele Nr. 2, so ist die vorgegebene Zahl eine unvollkommene Cubikzahl, und die gesuchte Cubikwurzel daher eine irrationale Größe, welche zwischen der gefundenen Zahl (620), und der um eine Einheit vermehrten (621), als zwischen zwey Gränzen liegen muß.

## Beyspiele.

### Nr. 1.

$\sqrt[3]{}$ 131 | 096 | 512 = 508
125 = = = $(=5^3)$

6096 : 75 = $(= 5^2.3)$

6096512 : 7500 $(=50^2.3)$
60000 = $(=7500.8)$
9600 = $(=8^2.3.50)$
512 = $(=8^3)$
6096512 = Summe

0

### Nr. 2.

$\sqrt[3]{}$ 238 | 368 | 596 = 620
216

22368 : 108
216
72
8
22328

40596 : 11532
40596 Rest.

§. 152.

Will man sich einer irrationalen Cubikwurzel durch Decimalstellen nähern, so hänge man an die vorgegebene Zahl, oder welches einerley ist, an den letzten Rest eine Classe Nullen, und suche auf die vorgeschriebene Art noch eine Ziffer der Wurzel. Da aber durch das Anhängen einer Classe Nullen die Zahl mit 1000 multipliciret, und folglich dadurch die Cubikwurzel daraus zehnmahl so groß wird, als die gesuchte (§. 121), so dividire man die gefundene Wurzel durch 10; das ist, man schneide rechts eine Decimalstelle ab, so ist die Wurzel bis in die Zehntel richtig gefunden. Und so können nach Belieben noch mehrere Decimalstellen der Wurzel gefunden werden, da man jedesmahl an den Rest eine Classe Nullen anhängt, und die folgende Decimalstelle suchet.

Beyspiele.

$\sqrt[3]{4|827} = 16{,}9$

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 3827 : 3 | |
| 18 | |
| 108 | |
| 216 | |
| 3096 | |
| 731000 : 768 | |
| 6912 | |
| 3888 | |
| 729 | |
| 730809 | |
| 191 | |

$\sqrt[3]{10} = 2{,}15$

| | |
|---|---|
| 8 | |
| 2000 : 12 | |
| 12 | |
| 6 | |
| 1 | |
| 1261 | |
| 739000 : 1323 | |
| 6615 | |
| 1575 | |
| 125 | |
| 677375 | |
| 61625 Rest. | |

§. 153.

Ist aus einem Decimalbruche, oder aus einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Decimalbruche die Cubikwurzel zu ziehen, so hänge man an den Decimalbruch hinten eine oder zwey Nullen an, dergestalt, daß immer die Anzahl der Decimalstellen durch 3 theilbar sey; sodann ziehe man die Cubikwurzel aus, als wenn es eine bloße ganze Zahl wäre, und schneide in der

Wurzel so viel Decimalziffern ab, als Decimalclassen vorhanden sind, so ist dieses die verlangte Wurzel. Denn durch die Auslassung des Comma wird die Zahl so oft mit 1000 multiplicirt, als Decimalclassen vorhanden sind; folglich ist die Cubikwurzel eben so oft mit 10 multiplicirt worden (§. 121); daher muß selbe auch wieder so vielmahl durch 10 dividiret werden, welches durch die Absonderung so vieler Decimalziffern; als Classen vorhanden sind, bewerkstelliget wird.

Übrigens, wenn die Wurzel mit mehrern Decimalstellen verlangt werden sollte, so kann man solche nach Belieben bestimmen, indem man an den Rest jedesmahl eine Classe Nullen anhängt, und die folgende Decimalziffer (nach §. 152) sucht.

### Beyspiele.

$\sqrt[3]{}$ 70 | 957 | 944 = 4,14
64

6957 : 48
48
12
1
4921

2036944 : 5043
20172
1968
64
2036944

0

$\sqrt[3]{}$ 0, | 584 | 600 = 0,834
512

72600 : 192
576
216
27
59787

12813000 : 20667
82668
3984
64
8306704

4506296 Rest.

### §. 154.

Wenn aus einem Bruche, dessen Nenner ein unvollkommener Cubus ist, die Cubikwurzel gezogen werden soll, so kann der Nenner rational gemacht werden, wenn man Zähler und Nenner mit dem Quadrate des Nenners multipliciret. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{80}{64}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{4} = \frac{4,3088}{4} = 1,0772.$$

Oder man verwandle den Bruch vorher in einen Decimalbruch, und ziehe die Cubikwurzel aus (nach §. 153).

1. Anmerkung. Wenn man eine Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen bey Handen hat, so kann die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel um Vieles erleichtert werden. Denn da dergleichen Tafeln gemeiniglich die Quadrat- und Cubikzahlen aller Wurzeln von 1 bis 1000 enthalten, so findet man in denselben jedesmahl die drey ersten Ziffern von der verlangten Wurzel, es möge die vorgelegte Zahl, aus welcher die Wurzel gezogen werden soll, aus was immer für einer Anzahl Ziffern bestehen, und entweder eine bloße ganze Zahl seyn, oder auch Decimalstellen bey sich führen. Z. B. wenn aus 34,6853 die Cubikwurzel zu ziehen ist, so hänge man hinten so viele Nullen an, daß die Decimalstellen sich genau in Classen eintheilen lassen (§. 153), und sehe es für eine bloße ganze Zahl an, nähmlich 34685300. Nun findet man in den Tafeln die nächst kleinere Cubikzahl 34645976, und ihre Wurzel 326; daher sind die drey erstern Ziffern der gesuchten Wurzel = 3,26; subtrahirt man nun diese Cubikzahl 34645976 von 34685300, so ist der Rest 39324. Will man nun diese Wurzel mit mehreren Decimalstellen haben, so dividire man diesen mit 3 angehängten Nullen vermehrten Rest durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, und verfahre überhaupt nach §. 151 und 153.

2. Anmerkung. So wie wir für die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus zusammengesetzten Größen allgemeine Regeln festgesetzt haben; eben so könnte man auch aus den bekannten Theilen der vierten, fünften und höhern Potenzen einer zweynahmigen Größe, für die Ausziehung solcher Wurzeln allgemeine Regeln ableiten. Da aber diese Regeln schon zu weitläufig würden, und wir ohnehin tiefer unten sehen werden, wie durch Hülfe der logarithmischen Tafeln jede Wurzel aus einer gegebenen Zahl sehr leicht ausgezogen werden kann, so wollen wir uns hierbey nicht aufhalten.

# III. Abschnitt.

## Von den Wurzelgrößen und ihren Rechnungsarten.

### §. 155.

Alle diejenigen Größen, welche mit Wurzelzeichen behaftet sind, werden insgesammt Wurzelgrößen genannt, und es werden hier vorzüglich jene darunter verstanden, wo sich die Wurzel nicht genau ausziehen läßt, z. B.

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{ab^2},\ \sqrt[4]{5c} \text{ u. dgl.}$$

Wurzelgrößen, bey denen das Wurzelzeichen den nähmlichen Exponenten hat, werden Wurzelgrößen von der nähmlichen Benennung genannt; im Gegentheile sind sie Wurzelgrößen von verschiedener Benennung. So sind z. B. $\sqrt{5}$, $\sqrt{ab^3}$, $\sqrt{7y}$ Wurzelgrößen von gleicher Benennung; hingegen sind $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{a}$ von verschiedener Benennung.

### §. 156.

Jede Wurzelgröße kann, im erforderlichen Falle, ohne Wurzelzeichen als eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten geschrieben werden, wenn man dem Exponenten der Größe unter dem Zeichen, den Wurzelexponenten als Nenner unterschreibt. Denn es ist (§. 129). $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, wo $m$ und $n$ was immer für Zahlen vorstellen können; eben so ist

$$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}};\ \sqrt[3]{ab^3} = a^{\frac{1}{3}}b;\ \sqrt[4]{(a^2-x^3)} = (a^2-x^3)^{\frac{1}{4}}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{a^2-x^2}} = \sqrt[3]{a(a^2-x^2)^{-1}} = a^{\frac{1}{3}}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}.$$

Und so kann auch wieder umgekehrt jede Größe, die zum Exponenten einen Bruch hat, mit dem Wurzelzeichen geschrieben werden, wenn man den Nenner als Exponent des Wurzelzeichens,

und den Zähler als Exponent der Größe unter dem Wurzelzeichen ansetzet. So ist z. B.

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2};\quad b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[5]{b^2 c};\quad (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a^2 - x^2)};$$

$$(a^2 - x^2)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(a^2 - x^2)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(a^2 - x^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 - x^2)^2}}.$$

## §. 157.

Wenn man bey einer Wurzelgröße sowohl den Exponenten des Wurzelzeichens, als auch den Exponenten der Potenz unter dem Zeichen mit einer nähmlichen Größe multipliciret oder dividiret, so bleibt die Größe ungeändert; nähmlich $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$. Denn $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ (vermög §. 156); oder wenn $p = \frac{1}{x}$, so ist $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{x}]{a^{\frac{m}{x}}}$; eben so ist $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$; $\sqrt{ab^3} = \sqrt[3]{a^{\frac{2}{3}} b}$; $\sqrt[4]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\sqrt{a}}$;

$$\sqrt[6]{a} = \sqrt{a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}.$$

Man kann daher auch aus einer gegebenen Zahl die vierte Potenzwurzel ziehen, wenn man zuerst die Quadratwurzel, und aus dieser noch einmahl die Quadratwurzel ziehet. Und eben so kann die sechste Potenzwurzel ausgezogen werden, indem man aus der Quadratwurzel die Cubikwurzel, oder aus der Cubikwurzel die Quadratwurzel ziehet u. s. w.

## §. 158.

Wurzelgrößen, bey denen die Größe unter dem Zeichen sich in solche Factoren zerlegen läßt, daß einer oder mehrere davon vollkommene Potenzen von dem Wurzelexponenten sind, können zum Theil rational gemacht werden; wenn man aus den Factoren, die vollkommene Potenzen

sind, die Wurzeln ziehet, und selbe als Factoren außer dem Zeichen ansetzet; nähmlich

$\sqrt[m]{a^m bc^{2m}} = ac^2 \sqrt[m]{b}$. Denn $\sqrt[m]{a^m bc^{2m}} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} c^{\frac{2m}{m}} = ac^2 b^{\frac{1}{m}}$ (vermög §. 120), und $b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{b}$ (nach §. 156); folglich $\sqrt[m]{a^m bc^{2m}} = ac^2 \sqrt[m]{b}$.

## Beyspiele.

I. $\sqrt[3]{16\,a^4 b} = \sqrt[3]{2.8.a^3.a.b} = 2a\sqrt[3]{2ab}$;

II. $3\sqrt{8\,a^3 b^5} = 3\sqrt{2.4.a^2.a.b^4.b} = 6ab^2\sqrt{2ab}$;

III. $2\sqrt{(a^2x^2 - x^4)} = 2\sqrt{x^2(a^2 - x^2)} = 2x\sqrt{(a^2 - x^2)}$;

IV. $\sqrt{(3a^2c + 6abc + 3b^2c)} = \sqrt{3c(a^2 + 2ab + b^2)}$
$= (a + b)\sqrt{3c}$.

Durch diese Abkürzung können zuweilen verschiedene irrationale Glieder gleichartig gemacht, das ist dergestalt verwandelt werden, daß selbe unter dem Zeichen vollkommen gleiche, und vor dem Zeichen gleichnahmige Größen enthalten. So z. B. scheinen die Glieder $3\sqrt{8\,a^2 b}$ und $4\sqrt{18\,a^2 b}$ ungleichartig zu seyn; zerlegt man aber die Größen unter dem Zeichen in Factoren, und ziehet aus den rationalen Factoren die Wurzel aus, so ist $3\sqrt{8\,a^2 b} = 3\sqrt{2.4.a^2.b} = 6a\sqrt{2b}$; und $4\sqrt{18\,a^2 b} = 4\sqrt{2.9.a^2.b} = 12a\sqrt{2b}$; folglich sind nun $6a\sqrt{2b}$ und $12a\sqrt{2b}$ gleichartige Glieder, so daß sie in ein Glied zusammen addiret werden können; $3\sqrt{8a^2 b} + 4\sqrt{18a^2 b} = 18a\sqrt{2b}$.

## §. 159.

Und umgekehrt können die Größen außer dem Wurzelzeichen unter das Zeichen gebracht werden, wenn man die Größen außer dem Zeichen auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt, und sodann die Größen unter dem Zeichen damit multipliciret; es ist nähmlich

$a\sqrt[m]{b} = a^{\frac{m}{m}} . b^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^m b}$; $3a\sqrt{2a} = \sqrt{18a^3}$; $2\sqrt[3]{(a^2 - x^2)}$
$= \sqrt[3]{(8a^2 - 8x^2)}$; $(a - x)\sqrt{(a + x)} = \sqrt{(a - x)^2 (a + x)}$
$= \sqrt{(a^2 - x^2)(a - x)}$.

Hierdurch läßt sich entscheiden, welche von zweyen Wurzelgrößen der nähmlichen Benennung, die vor und unter dem Zeichen verschiedene Größen haben, die größte sey; so ist z. B. $2\sqrt{7} > 3\sqrt{3}$; weil $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$, und $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$ ist.

## §. 160.

Wurzelgrößen von verschiedener Benennung können ohne Veränderung ihres Werthes auf gleiche Benennung gebracht werden, wenn man sie als Potenzen mit gebrochenen Exponenten vorstellet (§. 156), sodann diese gebrochenen Exponenten auf gleiche Benennung bringet, und endlich solche wieder als Wurzelgrößen anschreibet.

### Beyspiele.

I.
$$\begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \end{cases}$$

II.
$$\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401} \end{cases}$$

III.
$$\begin{cases} \sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{3m}{3nm}} b^{\frac{3m}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{3m} b^{3m}} \\ \sqrt[3]{a^n c} = a^{\frac{n}{3}} c^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{nm}{3mn}} c^{\frac{mn}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{nm} c^{mn}} \\ \sqrt[m]{a^3} = a^{\frac{3}{m}} = a^{\frac{9n}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{9n}} \end{cases}$$

Durch diese Reduction der Wurzelgrößen läßt sich auch entscheiden, welche von zwey Wurzelgrößen verschiedener Benennung

größer sey. So ist z. B. $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{11}$; weil $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, und $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$.

## §. 161.

Wurzelgrößen werden addirt, und subtrahirt, wenn man solche durch die gewöhnlichen Additions- und Subtractionszeichen mit einander verbindet, und die etwa vorhandenen gleichartigen Glieder (nach §. 61) reduciret: zuweilen werden aber erst gleichartige Glieder erhalten, wenn man die Wurzelgrößen von gleicher Benennung zuerst (nach §. 158) abkürzet.

### Beyspiele.

I. $7\sqrt{8} + 5\sqrt{8} = 12\sqrt{8} = 24\sqrt{2}$.

II. $\sqrt{50} - \sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

III. $\sqrt[3]{16\,a^3\,b} + \sqrt{4\,a^2\,b} - \sqrt{a^2\,b} - \sqrt[3]{54\,a^3\,b} = 2a\sqrt[3]{2b}$
$+ 2a\sqrt{b} - a\sqrt{b} - 3a\sqrt[3]{2b} = a\sqrt{b} - a\sqrt[3]{2b}$.

IV. $2\sqrt{(16\sqrt{18})} - \sqrt{(12\sqrt{2})} = 2\sqrt{(16 \cdot 3\sqrt{2})}$
$- \sqrt{(4 \cdot 3\sqrt{2})} = 8\sqrt{(3\sqrt{2})} - 2\sqrt{(3\sqrt{2})}$
$= 6\sqrt{(3\sqrt{2})} = 6\sqrt{\sqrt{18}} = 6\sqrt[4]{18}$.

V. $3\sqrt[3]{(8 + 16\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{20})} = 3\sqrt[3]{8}(1 + 2\sqrt{5})$
$- 2\sqrt[3]{(1 + \sqrt{4.5})} = 6\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})} - 2\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}$
$= 4\sqrt[3]{(1 + 2\sqrt{5})}$.

## §. 162.

Sind Wurzelgrößen mit einander zu multipliciren, so müssen sie zuerst auf gleiche Benennung gebracht werden; sodann multiplicire man sowohl die Größen unter dem Zeichen, als auch die Factoren vor dem Zeichen mit einander; es ist nähmlich

$$a\sqrt[m]{b} \times c\sqrt[n]{d} = ab^{\frac{1}{m}} \cdot cd^{\frac{1}{n}} = acb^{\frac{n}{mn}} d^{\frac{m}{mn}} = ac\sqrt[mn]{b^n} \cdot \sqrt[mn]{d^m}$$
$$= ac\sqrt[mn]{b^n\,d^m}.$$

### Beyspiele.

I. $3\sqrt{6} \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = 24\sqrt{3}.$

II. $5\sqrt[3]{3} \times \sqrt{6} = 5\sqrt[6]{9} . \sqrt[6]{216} = 5\sqrt[6]{1944}.$

III. $\sqrt[4]{20} \times 6\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{20} . 6\sqrt{3}} = \sqrt{(2\sqrt{5}) . 6\sqrt{3}}$
$= 6\sqrt{(6\sqrt{5})}.$

IV. $3\sqrt{(2\sqrt[3]{10})} \times 2\sqrt{(5\sqrt[3]{100})} = 6\sqrt{(10\sqrt[3]{1000})}$
$= 6\sqrt{10} . 10 = 60.$

Dieses Verfahren gilt auch, wenn einer oder beyde Factoren mehrnahmig seyn sollten.

V. $2\sqrt{3} \times (6 - \sqrt{7}) = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{21}.$

VI. $a\sqrt{bc} \times (3\sqrt{ab} - \sqrt{c}) = 3a\sqrt{ab^2c} - a\sqrt{bc^2}$
$= 3ab\sqrt{ac} - ac\sqrt{b}.$

VII. $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{ab} + \sqrt{ab} - \sqrt{b^2}$
$= a - b.$

VIII. $5\sqrt{2} \times 3\sqrt{(4 + 6\sqrt{2})} = 15\sqrt{(8 + 12\sqrt{2})}$
$= 30\sqrt{(2 + 3\sqrt{2})}.$

IX. $3\sqrt{(2 + 4\sqrt[3]{3})} \times 4\sqrt{(6 + 2\sqrt[3]{9})} = 12\sqrt{(12 + 4\sqrt[3]{9}}$
$+ 24\sqrt[3]{3} + 8\sqrt[3]{27}) = 12\sqrt{(36 + 4\sqrt[3]{9} + 24\sqrt[3]{3})}$
$= 12\sqrt{(9 . 4 + 4\sqrt[3]{9} + 6 . 4\sqrt[3]{3})}$
$= 24\sqrt{[9 + (6 + \sqrt[3]{3})\sqrt[3]{3}]}.$

### §. 163.

Bey der Division der Wurzelgrößen bringe man solche ebenfalls auf gleiche Benennung, schreibe sodann den Divisor unter den Dividendus in Gestalt eines Bruches, und kürze solchen ab.

### Beyspiele.

I. $\sqrt{12} : \sqrt{3} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$

II. $(\sqrt{72} - \sqrt{32}) : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$
$= \sqrt{\frac{72}{8}} - \sqrt{\frac{32}{8}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1.$

III. $$2\sqrt{6} : 3\sqrt[3]{9} = \frac{2\sqrt[6]{216}}{3\sqrt[6]{81}} = \tfrac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{216}{81}} = \tfrac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{8}{3}}.$$

IV. $$\sqrt{(a^2-x^2)} : (a+x) = \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a+x)^2}} = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)^2}} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} = \frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}}.$$

V. $$9 : \sqrt[3]{6} = \frac{9}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{729}{6}} = \sqrt[3]{\frac{243}{2}} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{36}.$$

Besteht der Nenner aus zwey Gliedern, und es erscheinen bloße Quadratwurzeln darin, wie sich der Fall in der Geometrie öfters ereignen wird; so kann derselbe rational gemacht werden, wenn man das Zeichen eines Gliedes bey dem Nenner ändert, und mit diesem geänderten Nenner sowohl den Zähler als den Nenner des Bruches multipliciret; so ist

VI. $$\frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} = \frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})} = \frac{b\sqrt{a}-b\sqrt{x}}{a-x}.$$

VII. $$\frac{3+\sqrt{7}}{4-\sqrt{6}} = \frac{(3+\sqrt{7})(4+\sqrt{6})}{(4-\sqrt{6})(4+\sqrt{6})} = \frac{12+3\sqrt{6}+4\sqrt{7}+\sqrt{42}}{10}.$$

VIII. $$\frac{8}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} = \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{3-\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{(3-\sqrt{5})\times(3+\sqrt{5})}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$
$$= \frac{24\sqrt{(3-\sqrt{5})}+8\sqrt{(15-5\sqrt{5})}}{9-5}$$
$$= 6\sqrt{(3-\sqrt{5})}+2\sqrt{(15-5\sqrt{5})}.$$

Wäre der Nenner dreynahmig, so ändere man die Zeichen von zwey Gliedern des Nenners, und multiplicire mit diesem geänderten Nenner sowohl den Zähler als den Nenner des Bruches; dadurch erhält man einen zweynahmigen Nenner, den man wieder wie vorhin rational machen kann. Z. B.

$$\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{10}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{6}+3\sqrt{10})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{12\sqrt{3}+18\sqrt{5}-9\sqrt{2}+\sqrt{30}}{10+2\sqrt{15}}$$
$$= \frac{(12\sqrt{3}+18\sqrt{5}-9\sqrt{2}+\sqrt{30})(10-2\sqrt{15})}{(10+2\sqrt{15})(10-2\sqrt{15})}$$
$$= \frac{7\sqrt{30}+27\sqrt{5}-15\sqrt{3}-30\sqrt{2}}{10}.$$

Und auf eine ähnliche Art könnte man auch verfahren, wenn der Nenner mehrere Glieder haben sollte.

§. 164.

Die Multiplication und Division der eingebildeten, oder unmöglichen Größen geschieht zwar nach eben den Regeln, wie bey den übrigen Wurzelgrößen: nur aber pflegt man gemeiniglich die Multiplication der Größen unter dem Wurzelzeichen nicht wirklich zu verrichten, sondern nur anzudeuten, damit man jederzeit vor Augen habe, daß die Wurzel aus dem Producte negativ genommen werden muß. So ist z. B. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a \times -a)} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Würde man aber die Multiplication wirklich verrichten, so wäre $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{+a^2} = +a$, wo doch augenscheinlich allhier $+a$ nicht angenommen werden darf, weil die Wurzel hieraus $\sqrt{+a}$, und nicht $\sqrt{-a}$ gibt, wie es doch seyn sollte. Eben so ist auch $a\sqrt{-b} \times c\sqrt{-d} = ac\sqrt{(-b \times -d)} = ac \times -\sqrt{bd} = -ac\sqrt{bd}$, wo die Quadratwurzel aus $bd$ wieder negativ zu nehmen ist, weil das Product aus zwey negativen Factoren entstanden ist. Überhaupt ist es nur damahls willkührlich, die Wurzel eines geraden Exponenten aus einer Größe positiv, oder negativ zu nehmen (§. 119, II), wenn es noch unbestimmt ist, aus welchen Factoren, positiven, oder negativen, das Product entstanden sey. Ist es hingegen bestimmt, daß das Product aus zwey negativen Factoren entstanden sey, wie bey $\sqrt{(-b \times -d)}$ der Fall ist, so muß auch die Wurzel negativ genommen werden, nähmlich $\sqrt{(-b \times -d)} = -\sqrt{bd}$; und so müßte auch umgekehrt die Wurzel, $+\sqrt{bd}$, positiv genommen werden, wenn es bekannt wäre, daß das Product $bd$ bey $\sqrt{(+b \times +d)}$ aus positiven Factoren entstanden sey.

Beyspiele.

I. $a\sqrt{-bd} \times c\sqrt{-d} = ac\sqrt{b(-d)^2} = -acd\sqrt{b}$.

II. $a\sqrt{bd} \times c\sqrt{-d} = acd\sqrt{-b}$.

III. $(4 + \sqrt{-3})(4 - \sqrt{-3}) = 16 + 4\sqrt{-3} - 4\sqrt{-3} + 3 = 19$.

IV. $(\sqrt{2} + \sqrt{-2})(3 + \sqrt{-6}) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{-2} + \sqrt{-12} - \sqrt{12}$.

V. $\sqrt{-ab} : \sqrt{a} = \sqrt{-\frac{ab}{a}} = \sqrt{-b}$.

VI. $\sqrt{-ab} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{-ab}{-b}} = \sqrt{a}$.

VII. $\frac{-3+\sqrt{-5}}{3+\sqrt{-5}} = \frac{(-3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})}{(3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})}$
$= \frac{-4+6\sqrt{-5}}{14} = \frac{-2+3\sqrt{-5}}{7}$.

VIII. $(-1+\sqrt{-3}) \times (-1-\sqrt{-3}) = 1-\sqrt{-3}$
$+\sqrt{-3}+3 = 4$.

IX. $(-1+\sqrt{-3})^3 = -1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3} = 8$.

X. $(-1-\sqrt{-3})^3 = -1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3} = 8$.

Anmerkung. Um allen Irrthum zu vermeiden, pflegt man auch sonst die Multiplication und Division der unmöglichen Größen gemeiniglich nur anzuzeigen, und nicht gänzlich zu verrichten; z. B. $3\sqrt{-a} \times 4a\sqrt{-b} = 12a\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$. Nur wenn eine unmögliche Größe auf die Potenz des Wurzelexponenten zu erheben ist, wird das Wurzelzeichen ausgelassen; z. B. $(\sqrt[4]{-a})^4 = -a$; hingegen $(\sqrt[4]{-a})^2 = \sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-a}$; oder abgekürzt $= \sqrt{-a}$. Wenn man diese Erinnerung außer Acht ließe, so könnte man jede negative Größe in eine positive verwandeln, als $-a = (-a)^1 = (-a)^{\frac{2}{2}} = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = a$; oder man könnte gar jede unmögliche Größe möglich machen; nähmlich $\sqrt{-a} = (-a)^{\frac{1}{2}} = (-a)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{+a^2} = a^{\frac{2}{4}}$ $= \pm\sqrt{a}$, wo bey $\sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-a}$ die Multiplication nicht anders verrichtet werden darf, als $(-a)^{\frac{1}{4}} \times (-a)^{\frac{1}{4}} = (-a)^{\frac{2}{4}}$ $= (-a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a}$. Man vergleiche Hrn. A. Bürja's selbstlernenden Algebraisten I. B. S. 193.

## §. 165.

Wurzelgrößen werden zu Potenzen erhoben, deren Exponenten gegeben sind, wenn man die Größen außer und unter dem Zeichen auf die Potenz des gegebenen Exponenten erhebet; nähmlich

$(a \overset{m}{\sqrt} b)^n = a^n \overset{m}{\sqrt} b^n$. Denn $(a \overset{m}{\sqrt} b)^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n$ (vermög §. 129 ) $= a^n b^{\frac{n}{m}}$ (vermög §. 128.) $= a^n \overset{m}{\sqrt} b^n$ (vermög §. 156.) So z. B. ist

$(3 \overset{3}{\sqrt} 2l)^2 = 9 \overset{3}{\sqrt} 4b^2$; $(\sqrt 3\, a^2)^3 = \sqrt 27\, a^6$;
$(3\sqrt (a^2 - x^2)^3 = 27\sqrt (a^2 - x^2)^3$
$= 27\sqrt (a^2 - x^2)^2 . (a^2 - x^2) = 27 . (a^2 - x^2)\sqrt (a^2 - x^2)$.

Wäre nun eine Wurzelgröße auf die Potenz des Wurzelexponenten zu erheben, so erhebe man nur die Größe außer dem Zeichen, und multiplicire dieses mit der Größe unter dem Zeichen. So ist z. B.

$(a \overset{m}{\sqrt} b)^m = a^m \overset{m}{\sqrt} b^m = a^m . b = a^m b$.

$(4 \overset{3}{\sqrt} 2)^3 = 64 . 2 = 128$; $(a\sqrt b)^2 = a^2 b$.
$(3\sqrt -3)^2 = -27$; $(-3\sqrt -3)^2 = -27$.
$(1 + \frac{1}{2}\sqrt 5)^2 = 1 + \sqrt 5 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} + \sqrt 5$.
$(2 - \sqrt 2)^3 = 8 - 12\sqrt 2 + 12 - \sqrt 8 = 20 - 14\sqrt 2$.
$(\overset{3}{\sqrt} x - \sqrt y)^2 = \overset{3}{\sqrt} x^2 - 2 \overset{6}{\sqrt} x^2 y^3 + y$.

## §. 166.

Und umgekehrt wird aus einer Wurzelgröße wieder eine andere Wurzel gezogen, wenn man aus der Größe vor dem Zeichen, und aus der Größe unter dem Zeichen die verlangte Wurzel zieht; welches aber kürzer geschehen kann, wenn man vorher die Größe vor dem Zeichen (nach §. 159) unter das Zeichen wirft, und sodann den Exponenten des Wurzelzeichens der gegebenen Größe mit dem Exponenten der gesuchten Wurzel multiplicirt. So ist z. B.

$\overset{m}{\sqrt} (a \overset{n}{\sqrt} b) = \overset{m}{\sqrt} \overset{n}{\sqrt} a^n b = \overset{m}{\sqrt} a^n \overset{\frac{1}{n}}{b^n} = \overset{\frac{n}{mn}}{a} \overset{\frac{1}{mn}}{b} = \overset{mn}{\sqrt} a^n b$.

$\sqrt (2 \overset{3}{\sqrt} 120) = \sqrt \overset{3}{\sqrt} 960 = \overset{6}{\sqrt} 960 = \overset{6}{\sqrt} 64 . 15 = 2 \overset{6}{\sqrt} 15$
$= 2 \sqrt \overset{3}{\sqrt} 15$.

## §. 167.

Da die Größen mit gebrochenen Exponenten als Wurzelgrößen vorgestellet werden können (§. 156), so sind die gefundenen Regeln für die Rechnungsarten mit Wurzelgrößen auch für die Größen mit gebrochenen Exponenten anwendbar; nähmlich es ist

$$\text{I. } p^{\frac{a}{n}} \cdot p^{\frac{v}{m}} = \sqrt[n]{p^a} \cdot \sqrt[m]{p^v} = \sqrt[nm]{p^{am}} \cdot \sqrt[nm]{p^{nv}} = \sqrt[mn]{p^{am} \cdot p^{nv}}$$

$$= \sqrt[nm]{p^{am+nv}} = p^{\frac{am+nv}{nm}} = p^{\frac{a}{n}+\frac{v}{m}};$$

$$p^{\frac{a}{n}} : p^{\frac{v}{m}} = \frac{\sqrt[n]{p^a}}{\sqrt[m]{p^v}} = \sqrt[nm]{\frac{p^{am}}{p^{nv}}} = \sqrt[nm]{p^{am-nv}} = p^{\frac{a}{n}-\frac{v}{m}}.$$

Woraus es zu ersehen ist, daß die gegebenen allgemeinen Regeln (§. 63, Nr. 5) für die Multiplication, und (§. 65, Nr. 3) für die Division, auch für die Größen mit gebrochenen Exponenten Statt finden.

$$\text{II. } \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{pm}{q}}} = a^{\frac{pm}{qn}};$$

$$\sqrt[n]{a^{\frac{p}{q}}}^m = \sqrt[m]{a^{\frac{pm}{q}}} = a^{\frac{pn}{qm}} = a^{\frac{q}{p}:\frac{m}{n}}.$$

Woraus wieder die (im §. 128 und 129) gegebenen Regeln für die Erhebung zu Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln auch für die gebrochenen Exponenten bestätiget werden.

### Einige Beyspiele zur Übung.

$$2a^{\frac{1}{2}}(ab - 3a^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{3}{2}}b - 6a^{\frac{7}{6}}.$$

$$(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}} + 3a^{-\frac{1}{2}}b)(2a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{-1} + 6b - 3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}.$$

$$(ax^2 - x^{-\frac{2}{3}}) : x^{\frac{1}{2}} = ax^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{7}{6}}.$$

$$(2ax^{-3} - bx^{-\frac{3}{2}}) : ax^{-\frac{2}{3}} = 2x^{-\frac{7}{3}} - a^{-1}bx^{-\frac{5}{6}}.$$

$$(a^{\frac{1}{2}}x^{-1} - 3x^{\frac{2}{3}})^2 = ax^{-2} - 6a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}} + 9x^{\frac{4}{3}}.$$

§. 168.

Es wird in der Folge sehr oft nothwendig seyn, bey einer zusammengesezten Potenz, eine Größe aus einem Gliede unter dem Zeichen (inner den Klammern), hinweg zu schaffen; z. B. es wird bey der Größe $(a^m + bx^n)^p$ verlangt, die Größe $x^n$ aus dem zweyten Gliede hinweg zu schaffen, welches auf folgende Art geschehen kann. Man dividire alle Glieder unter dem Zeichen durch diejenige Größe, welche man aus einem Gliede hinweg schaffen will, und setze eben diese Größe auf die Potenz des gemeinschaftlichen Exponenten erhoben, als Factor außer dem Zeichen, nähmlich

$$(a^m + bx^n)^p = x^{np} \cdot \left(\frac{a^m + bx^n}{x^n}\right)^p = x^{np}\,(a^m\, x^{-n} + b)^p.$$

$$\text{Denn } (a^m + bx^n)^p = \frac{(a^m + bx^n)^p}{(x^n)^p} \cdot (x^n)^p = \left(\frac{a^m + bx^n}{x^n}\right)^p \cdot (x^n)^p$$

$$= x^{np}\,(a^m\, x^{-n} + b)^p.$$

$$\text{Eben so ist } x\,(a^3x - ax^2)^{\frac{3}{2}} = x \cdot (x^2)^{\frac{3}{2}} (a^3x^{-1} - a)^{\frac{3}{2}} = x^4 (a^3x^{-1} - a)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Ingleichen } (ay^{\frac{3}{2}} + a^3y)^{-\frac{2}{3}} = (ay^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}} (1 + a^2y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}$$

$$= a^{-\frac{2}{3}} y^{-1} (1 + a^2y^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}}.$$

§. 169.

Und umgekehrt kann bey einer durch Klammern angezeigten Potenz einer zusammengesetzten Größe, jeder außer dem Zeichen (außer den Klammern) befindliche Factor hineingeschafft werden; wenn man den Exponenten dieses Factors durch den gemeinschaftlichen Exponenten dividiret, und mit diesem geänderten Factor jedes Glied unter dem Zeichen multipliciret. So ist z. B.

$$y^p\,(a^m + bx^n)^q = (y^{\frac{p}{q}})^q \cdot (a^m + bx^n)^q = \left(y^{\frac{p}{q}} \cdot (a^m + bx^n)\right)^q$$

$$= (a^m\, y^{\frac{p}{q}} + bx^n\, y^{\frac{p}{q}})^q.$$

$$x^{-\frac{2}{3}} (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{-\frac{4}{3}} \cdot (ax - x^2)\right)^{\frac{1}{2}} = (ax^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}.$$

$$ax^{-\frac{1}{2}} (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} = \left(a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \cdot (a^2 + x^2)\right)^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}})^{-\frac{3}{2}}.$$

# Vierte Vorlesung.

## Von den Verhältnissen und Proportionen nebst deren Anwendung auf verschiedene Rechnungsfragen.

### I. Abschnitt.

### Von den Verhältnissen.

§. 170.

Die Vergleichung zweyer gleichnahmigen Größen gegen einander nennt man ein Verhältniß; und insbesondere heißt die Vergleichung, in welcher untersucht wird, um wie viel die eine Größe die andere übersteige, ein arithmetisches Verhältniß; die Vergleichung zweyer Größen hingegen, wo man untersuchet, wie vielmahl, oder wie oft die eine Größe in der andern enthalten sey, wird ein geometrisches Verhältniß genannt. Um wie viel die eine Größe die andere übersteige, ergibt sich, wenn man ihre Differenz durch die Subtraction bestimmet: hingegen findet man, wie oft die eine Größe in der andern enthalten sey, wenn man die eine durch die andere dividiret, das ist, wenn man ihren Quotienten aufsuchet. Die Differenz bey einem arithmetischen Verhältnisse heißt sonst auch der Nahmen des Verhältnisses; und der Quotient bey einem geometrischen Verhältnisse der Exponent des Verhältnisses.

Das arithmetische Verhältniß zweyer Größen, z. B. $a$ und $b$, 39 und 13, kann durch $a \div b$, $39 \div 13$, und das geometrische

Verhältniß eben dieser zwey Größen durch $a:b$, 39:13 bezeichnet werden; es wird ausgesprochen: *a* verhält sich zu *b*, oder auch abgekürzt, *a* zu *b*. Die zuerst angesetzte Größe heißt das erste, oder Vorderglied, und die folgende Größe das zweyte, oder Hinterglied des Verhältnisses. Ist das zweyte Glied eines Verhältnisses größer als das erste, so kann das Verhältniß steigend heißen; im Gegentheil ist es ein fallendes Verhältniß, wenn das zweyte Glied kleiner ist, als das erste. Bey einem steigenden Verhältnisse ergibt sich die Differenz, wenn man vom zweyten Gliede das erste abzieht, und so auch der Quotient, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividiret. Bey fallenden Verhältnissen ist es umgekehrt; jedoch ist es erlaubt, auch bey jedem fallenden Verhältnisse die Differenz, und den Quotienten so zu bestimmen, daß man immer vom zweyten Gliede das erste abziehe, und so auch immer nur das zweyte durch das erste dividire, wo aber in einem solchen Falle die Differenz negativ, und der Quotient ein echter Bruch seyn muß. Die Differenz eines arithmetischen Verhältnisses wird daher immer in der Folge durch die Subtraction des ersten Gliedes vom zweyten, und der Quotient eines geometrischen Verhältnisses mittelst der Division des zweyten Gliedes durch das erste bestimmet werden. So sind bey den arithmetischen Verhältnissen $13 \div 39$, $14 \div 15$, $20 \div 12$ die Differenzen 26, 1, $-8$; und bey den geometrischen Verhältnissen 12 : 36, 14 : 21, 18 : 8 sind die Quotienten 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{9}$.

## §. 171.

Gleiche arithmetische Verhältnisse sind solche, welche gleiche Differenzen und gleiche geometrische Verhältnisse sind jene, welche gleiche Quotienten, in der §. 170 angeführten Bedeutung genommen, haben; so sind $15 \div 8$, $10 \div 3$, $8 \div 1$ gleiche arithmetische Verhältnisse, wegen der gleichen Differenz $-7$; eben so sind 8 : 1,80 : 10, 24 : 3 gleiche geometrische Verhält-

nisse, wegen des gleichen Quotienten $\frac{1}{8}$; hingegen 8 : 3, und 9 : 24 sind keineswegs gleiche Verhältnisse, weil der Quotient im ersten Falle $= \frac{3}{8}$ und im zweyten $= \frac{8}{3}$ ist.

Es wird nähmlich bey der Bestimmung der Größe eines Verhältnisses nur bloß allein, bey einem arithmetischen auf die Differenz, und bey einem geometrischen Verhältnisse auf den Quotienten gesehen, die Glieder mögen sonst wie immer beschaffen seyn. Wenn man daher bey zweyen, oder mehreren Verhältnissen darthun kann, daß sie entweder gleiche Differenzen, oder gleiche Quotienten haben, so sind solche gleiche Verhältnisse; im ersten Falle gleiche arithmetische, im zweyten gleiche geometrische Verhältnisse. Auch ist es einleuchtend, daß zwey Verhältnisse einander gleich seyn müssen, wenn jedes einem nähmlichen dritten Verhältnisse gleich ist.

## §. 172.

Jedes arithmetische Verhältniß kann durch $a \div (a + d)$ vorgestellet werden.

Denn jedes erste Glied eines arithmetischen Verhältnisses kann durch $a$, und die Differenz, sie möge positiv, oder negativ seyn, durch $d$ ausgedrücket werden; da nun diese Differenz zum Vorschein kömmt, wenn man das erste Glied von dem zweyten subtrahiret, so muß auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied zu der Differenz addiret; es muß also das zweyte Glied des arithmetischen Verhältnisses $= (a + d)$, und folglich das Verhältniß selbst $a \div (a + d)$ seyn, wenn man für das erste Glied $a$, und für die Differenz $d$ annimmt.

## §. 173.

Und jedes geometrische Verhältniß kann durch $a : aq$ vorgestellet werden.

Denn das erste Glied kann man durch $a$, und den Quotienten eines jeden geometrischen Verhältnisses, es möge solcher eine ganze, oder gebrochene, rationale oder irrationale Zahl seyn, durch $q$ ausdrücken; nun muß der Quotient zum Vor-

schein kommen, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividiret; es muß also auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied mit dem Quotienten multipliciret (§. 36); folglich muß das zweyte Glied des geometrischen Verhältnisses $aq$, und das Verhältniß selbst $a : aq$ seyn, wenn man für das erste Glied $a$, und für den Quotienten $q$ annimmt.

## §. 174.

**Ein geometrisches Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man das erste und zweyte Glied beyde mit einer nähmlichen Größe multipliciret, oder auch beyde dividiret.**

Denn aus $a:aq$ wird $am:amq$ durch die Multiplication mit $m$; und $\frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$ durch die Division mit $n$; und es ist $a:aq = am : amq$, wie auch $a:aq = \frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$, weil bey jedem dieser drey Verhältnisse der nähmliche Quotient $q$ Statt findet und aus der Gleichheit der Quotienten auch die Gleichheit der Verhältnisse sich ergibt (§. 171).

Eben so bleibt ein arithmetisches Verhältniß ungeändert, wenn man von beyden Gliedern Gleiches abzieht, oder zu beyden Gleiches hinzu addiret; denn wenn man in der allgemeinen Formel $a \div (a + d)$ zu beyden Gliedern $p$ hinzu addiret, so hat man $(a + p) \div (a + d + p)$; oder wenn man von beyden $p$ abziehet, so hat man $(a - p) \div (a + d - p)$, wo jedes wieder die nähmliche Differenz $d$ hat; und daher ist $a \div (a + d) = (a + p) \div (a + d + p) = (a - p) \div (a + d - p)$.

Es kann daher öfters ein geometrisches Verhältniß, dessen Glieder große Zahlen sind, viel kürzer dargestellt werden, wenn man beyde Glieder durch eine nähmliche Zahl dividiret. Z. B. statt des Verhältnisses 18 : 63 kann man schreiben 2 : 7.

Eben so kann auch ein geometrisches Verhältniß, worin ein Glied oder auch beyde Glieder Brüche sind, viel deutlicher durch ganze Zahlen dargestellet werden, wenn man mit jedem Nenner das andere Glied des Verhältnisses multipliciret. Z. B.

statt des Verhältnisses $\frac{2}{3} : 5$ kann man schreiben 2 : 15, und statt $\frac{2}{3} : \frac{5}{4}$ kann man schreiben 8 : 15.

Überhaupt finden alle Veränderungen, welche mit den Brüchen vorgenommen werden können, auch bey den geometrischen Verhältnissen Statt, weil ein jedes geometrisches Verhältniß als ein Bruch angesehen werden kann, wovon das zweyte Glied der Zähler, und das erste Glied der Nenner ist.

§. 175.

Das Verhältniß der Producte aus den ersten Gliedern zum Producte aus den zweyten Gliedern mehrerer geometrischer Verhältnisse heißt ein zusammengesetztes Verhältniß; so ist z. B. 3 . 7 : 12 . 21, nähmlich 21 : 252 aus den Verhältnissen 3 : 12, und 7 : 21 zusammengesetzt.

Eben so ist auch *abc* : *abcmnq* ein zusammengesetztes Verhältniß.

Es folgt daraus, daß der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses dem Producte aus den Quotienten der einfachen zusammensetzenden Verhältnisse gleich sey.

| | | |
|---|---|---|
| *a* | : | *aq* |
| *b* | : | *bm* |
| *c* | : | *cn* |
| *abc* | : | *abcmnq* |

§. 176.

Sind nun die einfachen zusammensetzenden Verhältnisse einander gleich, so ist der Quotient des zusammengesetzten Verhältnisses jederzeit eine Potenz des Quotienten von einem der einfachen Verhältnisse, und zwar das Quadrat desselben, wenn zwey gleiche Verhältnisse, der Cubus, wenn drey gleiche Verhältnisse zusammengesetzt werden u. s. w.

| | | |
|---|---|---|
| *a* | : | *aq* |
| *b* | : | *bq* |
| *c* | : | *cq* |
| *d* | : | *dq* |
| *abcd* | : | $abcdq^4$ |

Daher ist das aus mehreren gleichen Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß demjenigen Verhältnisse gleich, welches man erhält, wenn man beyde Glieder eines der einfachen Verhältnisse auf die Potenz des Exponenten von der Anzahl der zusammensetzenden Verhältnisse er-

hebt. So ist im obigen Beyspiele $abcd : abcdq^4$ dem Verhältnisse $a^4 : a^4 q^4$ gleich, weil jedes den Quotienten $q^4$ hat (§. 171). Man pflegt deßwegen auch die aus zwey, drey oder vier gleichen Verhältnissen zusammengesetzten Verhältnisse, quadratische, cubische, biquadratische Verhältnisse zu nennen.

---

# II. Abschnitt.

## Von den Proportionen.

### §. 177.

Eine Proportion ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse; und insbesondere wird die Gleichheit zweyer arithmetischen Verhältnisse, eine arithmetische, und die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältnisse eine geometrische Proportion genannt. Die zwey gleichen Verhältnisse werden durch das Gleichheitszeichen verbunden; so stellt $3 \div 7 = 11 \div 15$ eine arithmetische, und $4 : 12 = 7 : 21$ eine geometrische Proportion vor; beyde werden ausgesprochen: 3 verhält sich zu 7, gleichwie sich 11 zu 15 verhält; 4 verhält sich zu 12, wie sich 7 zu 21 verhält; oder auch abgekürzt, 3 zu 7, wie 11 zu 15; 4 zu 12, wie 7 zu 21. Die vier Glieder in einer Proportion heißen insgesammt Proportionalglieder, und insbesondere werden das erste und vierte Glied der Proportion zusammen die äußern, das zweyte und dritte aber die mittleren Glieder genannt.

Wenn in einer Proportion die zwey mittlern Glieder einander gleich sind, so wird selbe eine stetige oder zusammenhängende Proportion genannt. So ist z. B. $4 \div 7 = 7 \div 10$ eine stetige arithmetische, und $4 : 8 = 8 : 16$ eine stetige geometrische Proportion.

Bey einer stetigen Proportion wird das vierte Glied die dritte Proportionalgröße genannt, weil eigentlich nur drey verschiedene Glieder in der Proportion vorhanden sind;

eben deßwegen wird auch das zweyte und dritte Glied die mittlere Proportinalgröße genannt.

Anmerk. Einige Schriftsteller pflegen die Proportionen auf mancherley Art vorzustellen: so bezeichnen einige die arithmetischen Proportionen mit 3 . 7 ÷ 11 . 15, oder auch 3 — 7 = 11 — 15, und die geometrischen Proportionen mit 4 : 12 :: 7 : 21, oder auch 4 . 12 ÷ 7 . 21; die stetigen arithmetischen mit ÷ 4 . 7 . 10, und die stetigen geometrischen mit :: 4 . 8 . 16, oder auch 4 : 8 : 16. Wir werden aber in der Folge, um allen Irrthum zu vermeiden, uns jederzeit der oberwähnten Bezeichnung bedienen.

§. 178.

Durch die Formel $a \div a + d = b \div b + d$ kann jede arithmetische Proportion vorgestellet werden.

Denn jede zwey gleiche arithmetische Verhältnisse, welche zu einer arithmetischen Proportion erforderlich sind, können durch $a \div a + d$, und $b \div b + d$ vorgestellet werden; daher kann $a \div a + d = b \div b + d$ jede arithmetische Proportion vorstellen.

Soll nun die arithmetische Proportion stetig seyn, so muß das dritte Glied $b$ mit dem zweyten $a + d$ einerley seyn; woraus das vierte Glied $a + 2d$ folget; wenn man (vermög §. 172) zu $a + d$ die Differenz $d$ addiret; so, daß daher jede stetige arithmetische Proportion insbesondere auch durch die Formel $a \div a + d = a + d \div a + 2d$ vorgestellet werden könne.

§. 179.

In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittleren Glieder gleich.

Denn es ist in der allgemeinen Formel $a \div (a + d) = b \div (b + d)$ offenbar die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern Glieder gleich; weil jede Summe $= a + b + d$ ist; folglich ist auch in jeder arithmetischen Proportion die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich. So z. B. in der Proportion $3 \div 7 = 11 \div 15$, ist $3 + 15 = 7 + 11$; ingleichen in der Proportion $5 \div 2 = 13 \div 10$ ist $5 + 10 = 13 + 2$.

Bey einer stetigen arithmetischen Proportion ist daher die Summe der äußern Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich; denn in der allgemeinen Formel $a \div (a + d) = (a + d) \div (a + 2d)$, ist $a + (a + 2d) = (a + d) + (a + d) = 2(a + d)$.

## §. 180.

Es kann daher sehr leicht zu drey gegebenen Größen einer arithmetischen Proportion ein viertes Proportionalglied gefunden werden, wenn man die zwey mittlern Glieder zusammen addiret, und das erste davon abzieht. Denn es sey das gegebene erste Glied $= a$, das zweyte $= b$, das dritte $= c$, und das vierte, welches gesucht werden soll $= x$, so ist $a \div b = c \div x$; folglich ist nach (§. 179) $a + x = b + c$; daher auch $x = b + c - a$, wenn man beyderseits $a$ subtrahiret (§. 22, Grundsatz 1). Z. B. es sollte zu den Gliedern 5, $7\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{3}$ das vierte arithmetische Proportionalglied gefunden werden, so ist solches $= 7\frac{1}{2} + 12\frac{1}{3} - 5 = 19\frac{5}{6} - 5 = 14\frac{5}{6}$, und die Proportion ist $5 \div 7\frac{1}{2} = 12\frac{1}{3} \div 14\frac{5}{6}$.

Sollte zu zwey gegebenen Größen die dritte arithmetische Proportionalgröße gefunden werden, so subtrahire man das erste Glied von dem doppelten mittlern Gliede, und diese Differenz ist das gesuchte dritte Proportionalglied. Denn es sey $a$ das gegebene erste, $b$ das mittlere, und $x$ das zu findende dritte Proportionalglied, so ist $a \div b = b \div x$, daher $2b = a + x$, und $x = 2b - a$.

Wäre endlich zwischen zwey gegebenen Gliedern das mittlere arithmetische Proportionalglied zu finden, so addire man die zwey gegebenen äußern Glieder, und dividire diese Summe durch 2. Denn es sey das gegebene erste Glied $= a$, das gegebene dritte Glied $= b$, und das zu findende mittlere Proportionalglied $= x$, so ist $a \div x = x \div b$; daher ist $a + b = 2x$, und $x = \frac{a+b}{2}$ wenn man beyderseits durch 2 dividiret (§. 39, Grundsatz 1). Z. B. es soll zwischen 3 und 8 die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden werden, so ist selbe $= \frac{3+8}{2} = 5\frac{1}{2}$, und die Proportion ist $3 \div 5\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2} \div 8$.

Anmerkung. So wie man hier zwischen zwey gegebenen Größen die mittlere arithmetische Proportionalzahl gefunden hat, so pflegt man auch auf eine ähnliche Art, bey den Versuchen, Beobachtungen, Finanzrechnungen und sonst im gemeinen Leben zwischen mehrern bekannten Zahlen, wo keine Ursache vorhanden ist, eine der andern vorzuziehen, das arithmetische Mittel, oder den sogenannten Durchschnitt zu bestimmen. Man addiret nähmlich alle die bekannten Größen zusammen, und dividiret die Summe durch die Anzahl der Größen; wodurch man in einigen Fällen der Wahrheit am nächsten kommt. Z. B. man hat bey einem Versuche mit einem Bombenpöller unter einerley Umständen, 5 Probwürfe gemacht: mit dem ersten hat man 2260, mit dem zweyten 2510, mit dem dritten 2365, mit dem vierten 2475, und mit dem fünften 2380 Schritte erreicht; hieraus ist das arithmetische Mittel 2398, welches unter diesen Umständen für die erreichte mittlere Wurfweite ohne merklichen Fehler angenommen werden kann.

Da die arithmetischen Verhältnisse und Proportionen außer der Bestimmung des arithmetischen Mittels sonst von keinem sonderlichen Nutzen sind, so wollen wir uns auch nicht länger dabey aufhalten, sondern alsogleich zu den geometrischen Proportionen übergehen, welche in der Mathematik eine sehr große Anwendung haben. Auch wird in der Folge bey den geometrischen Verhältnissen und Proportionen das Beywort geometrisch nicht mehr ausdrücklich angesetzt, sondern immer stillschweigend dabey verstanden werden, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich angesetzt ist.

## §. 181.

Jede Proportion kann durch die Formel $a : aq = b : bq$ vorgestellt werden.

Denn durch $a : aq$ und $b : bq$ können jede zwey gleiche Verhältnisse ausgedrücket werden, nun aber stellen zwey gleiche Verhältnisse eine Proportion vor: es kann demnach durch $a : aq = b : bq$ jede Proportion vorgestellet werden. Setzen wir nun $b = aq$, so ist $bq = aq \cdot q = aq^2$; es kann demnach jede zusam-

menhängende Proportion durch $a : aq = aq : aq^2$ angezeiget werden.

§. 182.

In jeder Proportion ist das Product der äußern dem Producte der mittlern Glieder gleich.

Denn es ist in der allgemeinen Formel $a : aq = b : bq$ sowohl das Product der äußern, als auch das Product der mittlern Glieder $= abq$, daher muß auch in jeder Proportion das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern Glieder gleich seyn. So z. B. in der Proportion $4 : 12 = 7 : 21$, ist $4 . 21 = 7 . 12$; in der Proportion $9 : 6 = 12 : 8$, ist $9 . 8 = 6 . 12$.

In einer stetigen Proportion ist daher das Quadrat des mittlern Gliedes gleich dem Producte der beyden äußern Glieder; denn in der Formel $a : aq = aq : aq^2$ ist $aq . aq = a . aq^2$.

§. 183.

Und nun sind wir auch im Stande zu jeden drey gegebenen Größen das vierte Proportionalglied zu bestimmen, wenn wir das Product der zwey mittlern Glieder durch das erste dividiren.

Denn es sey das gegebene erste Glied $= a$, das zweyte $= b$, das dritte $= c$ und das zu findende vierte Glied $= x$, so muß $a : b = c : x$ seyn, daher $ax = bc$ (§. 182), folglich $x = \frac{bc}{a}$ (§. 39, Grundsatz 1); und die Proportion ist demnach $a : b = c : \frac{bc}{a}$ z. B. wenn zu 3, 5 und 12 das vierte Proportionalglied gefunden werden soll, so ist $3 : 5 = 12 : x$, nähmlich $x = \frac{5 . 12}{3} = 20$.

Zu zwey gegebenen Größen wird daher das dritte Proportionalglied gefunden, wenn man das Quadrat des mittlern Gliedes durch das erste dividiret; denn wenn $a$ das erste, $b$ das mittlere, und $x$ das zu findende dritte Proportionalglied ist, so ist $a : b = b : x$, und $b^2 = ax$; folglich $x = \frac{b^2}{a}$.

Anmerkung. Eigentlich ist es nicht nothwendig, daß die drey ersten Glieder der Proportion gegeben seyn müssen, um

sodann jenes, welches an die vierte Stelle gehört, finden zu können, sondern es mögen was immer für drey Glieder der Proportion gegeben seyn, so läßt sich jederzeit das abgängige finden. Z. B. es sey $a = 4$ das erste, $b = 6$ das zweyte, und $c = 21$ das vierte Glied einer Proportion, man soll das dritte $x$ finden; so ist $a : b = x : c$, und $ac = bx$ (§. 182); folglich $x = \frac{ac}{b} = \frac{4 \cdot 21}{6} = 2 \cdot 7 = 14$; und die Proportion ist $4 : 6 = 14 : 21$.

§. 184.

Sollte endlich zwischen zwey gegebenen Größen die mittlere Proportionale gefunden werden, so ziehe man aus dem Producte der äußern Glieder die Quadratwurzel aus, welche das mittlere Glied seyn wird. Denn es sey $a$ das erste, $b$ das dritte, und $x$ das zu suchende mittlere Glied, so ist $a : x = x : b$, folglich $x^2 = ab$ (§. 182), und $x = \sqrt{ab}$ (§. 137, Grundsatz 2). Z. B. es sollte zwischen 4 und 9 das mittlere Proportionalglied $x$ gefunden werden, so ist $4 : x = x : 9$, nähmlich $x^2 = 36$, und $x = 6$; ingleichen in $2 : x = x : 12$ ist $x^2 = 24$, und $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$; die mittlere Proportionale zwischen 2 und 12 ist demnach irrational (§. 125).

§. 185.

Wenn zwey Producte einander gleich sind; so stehen ihre Factoren, verkehrt genommen, in einer Proportion, so nähmlich, daß die zwey Factoren des einen Productes die beyden äußern, und die zwey Factoren des andern Productes die beyden inneren Glieder der Proportion formiren.

Denn es sey $ab = cd$, so ist auch $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$ wenn man beyderseits durch $ad$ dividiret (§. 39, Grundsatz 1); daher haben $\frac{b}{d}$, und $\frac{c}{a}$ gleiche Quotienten; folglich sind die Verhältnisse $a : c$ und $d : b$ einander gleich, und $a : c = d : b$ ist eine richtige Proportion. Eben so ist auch $b : c = d : a$ eine richtige Proportion; denn die Quotienten $\frac{c}{b}$ und $\frac{a}{d}$ sind einander

gleich, welche man erhält, wenn man die vorausgesetzten gleichen Producte $ab = cd$ durch $bd$ dividiret.

Es ist aus diesem auch zu ersehen, daß man auch aus der Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder bey vier in Gestalt einer Proportion angesetzten Größen auf die Richtigkeit der Proportion schließen könne.

### Beyspiele.

| | |
|---|---|
| Wenn $ax = bcy$, | so ist $a : bc = y : x$ |
| = $abc = x^2$, | so ist $ab : x = x : c$ |
| = $a = yx$, | so ist $1 : y = x : a$ |
| = $a^2 + ab = 2x - x^2$, | so ist $a : x = (a - x) : (a + b)$ |

u. s. w.

### §. 186.

Wenn $x = ab$ und $y = cd$, so ist auch $x : y = ab : cd$; denn auch hier sind die Quotienten $\frac{y}{x}$ und $\frac{cd}{ab}$ einander gleich, wenn man $y = cd$ durch $x = ab$ dividiret (§. 39, Grundsatz 1).

Wir haben also zwey Kennzeichen, aus denen wir auf die Richtigkeit einer Proportion schließen können;

1tens Aus der Gleichheit der Verhältnisse, das ist, aus der Gleichheit der Quotienten.

2tens Aus der Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder.

Sobald eines dieser Kennzeichen von 4 Größen in der Folge erwiesen wird; so können wir versichert seyn, daß solche in einer Proportion stehen.

### §. 187.

Mit den 4 Gliedern einer Proportion können nun verschiedene Verwandlungen vorgenommen werden, so, daß die Proportion doch noch richtig verbleibt; und zwar, da

$a : aq = b : bq$, z. B. $3 : 5 = 6 : 10$, so ist

I. Durch die Verwechslung der mittlern Glieder.

$a : b = aq : bq$; $3 : 6 = 5 : 10$;

II. Durch die Umkehrung der Glieder.

$aq : a = bq : b$; $5 : 3 = 10 : 6$;

III. Durch übereinstimmende Addition der Glieder.

$a + aq : aq = b + bq : bq$; 8 : 5 = 16 : 10;

oder $a : aq + a = b : bq + b$; 3 : 8 = 6 : 16;

IV. Durch übereinstimmende Subtraction.

$a : aq - a = b : bq - b$; 3 : 2 = 6 : 4;

$a - aq : a = b - bq : b$; − 2 : 3 = − 4 : 6;

$aq - a : aq = bq - b : bq$; 2 : 5 = 4 : 10;

V. Wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied mit einer nähmlichen Größe multipliciret.

$am : amq = b : bq$; 9 : 15 = 6 : 10

$am : aq = bm : bq$; 9 : 5 = 18 : 10

$a : amq = b : bmq$; 3 . 15 = 6 : 30

$ap : amq = bp : bmq$; 12 : 15 = 24 : 30

VI. Wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied durch eine nähmliche Größe dividiret.

$\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = b : bq$; 1 : $\frac{5}{3}$ = 6 : 10

$\frac{a}{m} : aq = \frac{b}{m} : bq$; 1 : 5 = 2 : 10

$a : \frac{aq}{p} = b : \frac{bq}{p}$; 3 : 1 = 6 : 2

$\frac{a}{m} : \frac{aq}{n} = \frac{b}{m} : \frac{bq}{n}$; 1 : $\frac{5}{2}$ = 2 : 5

VII. Wenn man alle 4 Glieder zu gleichen Potenzen erhebt, oder aus selben gleiche Wurzeln ziehet.

$a^2 : a^2 q^2 = b^2 : b^2 q^2$; 9 : 25 = 36 : 100

$a^m : a^m q^m = b^m : b^m q^m$; $3^m : 5^m = 6^m : 10^m$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{aq} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bq}$; $\sqrt[n]{3} : \sqrt[n]{5} = \sqrt[n]{6} : \sqrt[n]{10}$.

Die Richtigkeit aller dieser Proportionen erhellet aus der Gleichheit der Producte der mittlern und äußern Glieder, oder auch aus der Gleichheit der Quotienten der Verhältnisse.

§. 188.

Die Vortheile, welche alle diese Verwandlungen in der Ausübung öfters verschaffen können, sind folgende:

1) Durch I. und II. kann jedes Glied einer Proportion an jede beliebige Stelle gebracht werden; z. B. wenn man in der Proportion $a:b=c:d$ das Glied $a$ an die vierte Stelle haben wollte, so kann man setzen $d:c=b:a$.

2) Durch III. kann in einer Proportion, worin ein äußeres, und ein mittleres Glied unbekannt, ihre Summe aber bekannt ist, jedes Glied insbesondere gefunden werden. Z. B. es sey in der Proportion $6:x=9:y$ sowohl $x$ als $y$ unbekannt, ihre Summe aber sey $=25$, nähmlich $x+y=25$, so kann $x$ und $y$ jedes insbesondere gefunden werden. Denn da $6:x=9:y$, so ist (nach I.) $6:9=x:y$, und (nach III.) $(6+9):9=(x+y):y$, und $(6+9):6=(x+y):x$ nähmlich $15:9=25:y$, und $15:6=25:x$; woraus man (nach §. 183) findet $y=\frac{9\,.\,25}{15}=15$, und $x=\frac{6\,.\,25}{15}=10$.

3) Eben so kann durch IV. ein äußeres und ein mittleres Glied in einer Proportion gefunden werden, wenn ihre Differenz bekannt ist.

4) Durch V. kann man die in einer Proportion vorkommenden Brüche hinwegschaffen. Z. B. in der Proportion $8:13\frac{1}{3}=3:5$ wird der Bruch hinweggeschaffet, wenn man dieses Glied, und dabey auch ein äußeres mit 3 multipliciret; nähmlich $8:40=3:15$, oder $24:40=3:5$.

5) Durch VI. kann öfters eine Proportion, deren Glieder große Zahlen sind, in kleinern Gliedern dargestellet werden, wenn man ein äußeres und ein mittleres Glied durch einen gemeinschaftlichen Factor dividiret. Z. B. es sollte zu den drey Zahlen 320, 256, 480 eine vierte Proportionale gefunden werden, so ist $320:256=480:x$, und $2:256=3\,.\,x$, wenn man das $1^{te}$ und $3^{te}$ Glied durch 160 dividiret; und ferner $1:128=3:x$; daher ist $x=384$.

6) Durch VII. können die in einer Proportion vorkommenden irrationalen Glieder hinweggeschafft werden, wenn man alle Glieder der Proportion auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebet. Z. B. wenn $a:b=c:\sqrt{d}$ ist, so ist auch $a^2:b^2$

$= c^2 : d$; ingleichen wenn $a : b = \sqrt[3]{c} : \sqrt{d}$, so ist $a^2 : b^2 = \sqrt[3]{c^2} : d$, und $a^6 : b^6 = c^2 : d^3$.

Alle diese Vortheile sollen künftig bey der Anwendung deutlicher gezeigt werden.

§. 189.

Wenn man die Glieder zweyer oder mehrerer Proportionen nach der Ordnung mit einander multipliciret, so hat auch die daraus entstehende zusammengesetzte Proportion ihre Richtigkeit; nähmlich

| | |
|---|---|
| $a : aq = b : bq$ | 3 : 5 = 6 : 10 |
| $c : cm = d : dm$ | 2 : 4 = 7 : 14 |
| $e : en = f : fn$ | 8 : 9 = 16 : 18 |
| $ace : acemnq = bdf : bdfmnq$; | 48 : 180 = 672 : 2520; |

weil die Quotienten der zwey zusammengesetzten Verhältnisse, oder auch die Producte der äußern, und mittlern Glieder einander gleich sind.

§. 190.

Haben daher zwey Proportionen einige Glieder gleich, so kann die aus ihnen zusammengesetzte Proportion (nach §. 187, VI) abgekürzt werden; nähmlich

I. wenn ein äußeres und ein inneres Glied von einer Proportion einem äußern, und einem innern Gliede der andern Proportion wechselweise gleich sind; so stehen die übrigen Glieder ordentlich genommen in Proportion. Als

| | |
|---|---|
| wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $c : d = e : f$ | 5 : 10 = 7 : 14 |
| so ist auch $a : b = e : f$ | 3 : 6 = 7 : 14 |
| oder wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $b : e = d : f$ | 6 : 9 = 10 : 15 |
| so ist auch $a : e = c : f$ | 3 : 9 = 5 : 15 |
| oder wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $e : b = f : d$ | 12 : 6 = 20 : 10 |
| so ist auch $a : e = c : f$ | 3 : 12 = 5 : 20 |

wenn man allhier im letzten Beyspiele in der 2ten Proportion nach (§. 187, II.) die Glieder umkehret, und sodann die Glieder beyder Proportionen miteinander multipliciret.

II. Wenn die beyden äußern Glieder der einen Proportion den beyden äußern Gliedern der andern Proportion, oder beyde innere Glieder der einen Proportion den beyden innern Gliedern der andern Proportion, oder auch beyde äußere Glieder der einen Proportion den beyden innern Gliedern der andern Proportion gleich sind; so stehen die übrigen Glieder verkehrt genommen in Proportion. Als

| | |
|---|---|
| wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $a : e = f : d$ | 3 : 2 = 15 : 10 |
| so ist auch $e : b = c : f$ | 2 : 6 = 5 : 15 |

wenn man die zweyte Proportion wie vorhin umkehret.

| | |
|---|---|
| Oder wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $e : b = c : f$ | 15 : 6 = 5 : 2 |
| so ist auch $a : e = f : d$ | 3 : 15 = 2 : 10 |

wenn man ebenfalls die zweyte Proportion umkehret.

| | |
|---|---|
| Oder wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $e : a = d : f$ | 15 : 3 = 10 : 2 |
| so ist auch $e : b = c : f$ | 15 : 6 = 5 : 2 |

III. Wenn das letzte Glied einer Proportion dem dritten Gliede der andern Proportion gleich ist; z. B.

| | |
|---|---|
| wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $e : f = d : g$ | 4 : 8 = 10 : 20 |
| so ist auch $ae : bf = c : g$ | 12 : 48 = 5 : 20 |

IV. Eben so, wenn mehrere Proportionen zusammengesetzt werden, wo immer das vierte Glied der vorhergehenden Proportion dem dritten Gliede der folgenden gleich ist; z. B.

| | |
|---|---|
| wenn $a : b = c : d$ | 3 : 6 = 5 : 10 |
| und $e : f = d : g$ | 2 : 4 = 10 : 20 |
| und $h : i = g : h$ | 5 : 7 = 20 : 28 |
| und $l : m = h : n$ | 6 : 9 = 28 : 42 |
| so ist $achl : bfim = c : n$ | 180 : 1512 = 5 : 42 |

§. 191.

Bey mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten, wie sich jedes erste Glied insbesondere zu seinem zweyten verhält.

Denn mehrere gleiche Verhältnisse können durch $a : aq$; $b : bq$; $c : cq$; $d : dq$ u. s. w. vorgestellet werden. Nun ist aber $(a + b + c + d) : (aq + bq + cq + dq) = a : aq$; eben so auch $(a + b + c + d) : (aq + bq + cq + dq) = b : bq$ u. s. w.; weil das Product der mittlern Glieder dem Producte der äußern Glieder gleich ist; folglich steht das Verhältniß aus der Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten Glieder mit jedem einzelnen Verhältnisse in Proportion.

---

# III. Abschnitt.

## Von der einfachen Regel Detri.

§. 192.

Die Lehre von den Proportionen wird von einigen Mathematikern mit Recht die Seele der Mathematik genannt, weil ihr Nutzen so allgemein über alle Theile derselben ausgebreitet ist. Auch im gemeinen Leben ist die Anwendung der Proportionen sehr nützlich; die meisten Dinge, die im menschlichen Umgange in Rechnungen vorkommen, sind durch geometrische Verhältnisse mit einander verbunden; als z. B. die Waaren von einerley Gattung, und ihre Preise; die Arbeit und die Zeit, u. dgl.; wer zweymahl so viel Waare kauft, muß auch zweymahl so viel bezahlen; der dreymahl so viel kauft, zahlt dreymahl so viel; zu einer 6fachen Arbeit braucht man auch 6 mahl so viel Zeit, oder man muß 6 mahl so viel Arbeiter dazu anstellen u. s. f.

§. 193.

Im §. 170, ist zwar gesagt worden, ein Verhältniß (ein geometrisches) sey die Vergleichung zweyer gleichnahmigen

Größen gegen einander, durch die Bestimmung, wie oft die eine in der andern enthalten sey; so, daß daher das Wort Verhältniß in dieser Bedeutung nur bey gleichnahmigen Dingen anzuwenden sey. Jedoch pflegt man im gemeinen Leben das Wort Verhältniß auch bey ungleichnahmigen Dingen zu gebrauchen. Der Redegebrauch: zwey auch ungleichnahmige Dinge *a* und *b* stehen im geraden Verhältnisse, oder das Verhältniß von *a* zu *b* ist ein gerades Verhältniß; hat die Bedeutung, diese zwey Dinge *a* und *b* haben einen solchen Bezug auf einander, daß beyde zugleich wachsen, oder beyde zugleich abnehmen, und zwar dergestalt, daß sich *a* zu einem Vielfachen von *a* verhalte, wie *b* zu einem eben solchen Vielfachen von *b*, nähmlich $a : aq = b : bq$. So steht die Menge der Waare mit ihrem Preise im geraden Verhältnisse, weil der Preis mit der Waare auf einerley Art zugleich wächst, oder zugleich abnimmt; z. B. wenn es bekannt ist, daß 2 Ellen von einem gewissen Tuche 7 Fl. kosten, so müssen 6 Ellen als das Dreyfache von 2 Ellen auch gewiß 21 Fl. als das Dreyfache von 7 Fl. kosten; und die Verhältnisse 2 Ellen : 6 Ellen; und 7 Fl. : 21 Fl. sind einander gleich, und machen also eine richtige Proportion aus; nähmlich 2 Ellen : 6 Ell. = 7 Fl. : 21 Fl.

Wenn hingegen zwey Dinge *a* und *b* einen solchen Bezug auf einander haben, daß das eine eben so abnimmt, als das andere zunimmt, nähmlich daß *a* sich in $\frac{a}{n}$ verwandelt; wenn *b* in *bn* übergeht; so sagt man, diese zwey Dinge *a* und *b* stehen mit einander im verkehrten Verhältnisse. So stehet die Zeit, welche man braucht, um eine gewisse Arbeit zu vollenden, mit der Anzahl Arbeiter, die zu dieser Arbeit angestellet werden, im verkehrten Verhältnisse; denn so vielmahl mehr Arbeiter man anstellet, eine eben so vielmahl kürzere Zeit wird man zur Vollendung dieser Arbeit brauchen; z. B. wenn es bekannt ist, daß 3 Mann eine Wiese in 8 Tagen abmähen, so werden 6 Mann nur 4 Tage zu dieser Arbeit brauchen, und die Ver-

hältnisse 3 M. : 6 M., und 8 T. : 4 T. werden dann erst eine richtige Proportion ausmachen, wenn man die Glieder des einen Verhältnisses umkehret; nähmlich 6 M : 3 M. = 8 T. : 4 T.

Überhaupt, wo *a* und *b* im geraden Verhältnisse stehen, kann man sagen, je mehr *a*, desto mehr *b*; je größer *a*, desto größer *b*; je länger *a*, desto länger *b*; oder auch je weniger *a*, desto weniger *b*; je kleiner *a*, desto kleiner *b* u. s. w., in der angeführten Bedeutung genommen; z. B. je mehr Waare desto größer der Werth; je weniger Arbeiter angestellt werden, desto weniger Arbeit werden sie verfertigen u. dgl.

Hingegen wo *a* und *b* im verkehrten Verhältnisse stehen, kann man sagen je mehr *a*, desto weniger *b*; je größer *a*, desto kleiner *b*; je länger *a*, desto kürzer *b*; oder auch je weniger *a*, desto mehr *b*; je kleiner *a*, desto größer *b* u. s. w., ebenfalls in der angeführten Bedeutung genommen; z. B. je mehr Arbeiter man zu einer Arbeit anstellet, desto weniger Zeit wird man dazu brauchen; je schmäler ein Tuch ist, desto mehr Ellen wird man hiervon zu einem Kleide brauchen u. dgl.

## §. 194.

Wären nun in einer solchen Proportion nur 3 Glieder bekannt, so läßt sich (nach §. 183) auch das 4te finden; z. B. es wäre die Frage, wenn 3 Ellen Tuch 10 Fl. kosten, wie viel kosten 9 Ellen von diesem Tuche? so bezeichne man die noch unbekannte Anzahl Gulden, welche 9 Ellen kosten müssen, mit $x$; und es findet sodann die Proportion Statt, 3 Ellen : 9 Ellen = 10 Fl, : $x$, wo man (nach §. 183) findet $x = \frac{9 \cdot 10}{3}$ = 30 Fl.

Die Anwendung der Regel, nach welcher man bey einer Rechnungsfrage zu drey gegebenen Gliedern das vierte Proportionalglied findet, wird in der Ausübung auf die benannten Zahlen von den Rechenmeistern die Regel Detri genannt; und zwar heißt sie die gerade Regel Detri, wenn die zwey ungleichnahmigen Größen, welche in der Rechnungsfrage vor-

kommen, (nach §. 193) im geraden Verhältnisse stehen; im Gegentheile aber, wenn diese zwey Größen im verkehrten Verhältnisse stehen, so heißt sie die verkehrte Regel Detri.

§. 195.

Zur Regel Detri gehören zwey Verhältnisse, wo in dem einen beyde Glieder, in dem andern aber nur ein Glied bekannt, und das zweyte noch unbekannt ist. Dasjenige Glied in dem ersten Verhältnisse, welches sich unmittelbar auf die im andern Verhältnisse noch unbekannte Zahl bezieht, nennt man die Fragezahl. So ist im obigen Beyspiele 9 Ellen die Fragezahl; weil eigentlich nach der Anzahl Gulden, welche diese 9 Ellen kosten müssen, gefragt wird.

Übrigens muß es bey einer Rechnungsfrage, welche durch die Anwendung der Regel Detri beantwortet wiro, aus der Beschaffenheit der Sache bekannt seyn, daß die zwey ungleichnahmigen Größen in einem richtigen, entweder geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen, (in der Bedeutung des §. 193); sonst läßt sich die Regel Detri nicht anwenden. Z. B. wenn es bekannt wäre, daß in zwey Minuten durch ein im Boden eines Fasses gebohrtes Loch 5 Eimer Wein ausfließen, so könnte man keineswegs sagen, daß in 4 Minuten 10 Eimer Wein aus diesem Loche fließen werden; die Proportion 2 M. : 4 M. = 5 Eymer : 10 Eymer ist nicht richtig, weil der Wein immer mit einer kleinern Geschwindigkeit herausfließet; in jeder folgenden Minute fließt demnach weniger heraus, als in der vorhergehenden. Man kann daher die Menge des Weines, welche in 4 Minuten aus diesem Loche fließt, durch die Regel Detri nicht finden, obwohl es bekannt ist, daß in 2 Minuten 5 Eymer ausfließen.

§. 196.

Um nun bey den Rechnungsfragen, wo eine Proportion wirklich Statt findet, sowohl die gerade als auch die verkehrte Regel Detri jederzeit richtig anzuwenden, verfahre man folgender Maßen:

1) Man untersuche, ob die zwey ungleichnahmigen Größen in der Rechnungsfrage (die Fragezahl, und die unbekannte Größe)

(nach §. 193) im geraden oder verkehrten Verhältnisse stehen, nähmlich ob es eine gerade, oder verkehrte Regel Detri sey.

2) Das Verhältniß (in der Bedeutung §. 170), in welchem beyde Glieder bekannt sind, wird zuerst vor das Gleichheitszeichen gesetzt; und zwar, wenn es eine gerade Regel Detri ist (§. 194), so setze man die Fragezahl an die 2te Stelle, und die mit ihr gleichnahmige an die erste Stelle; ist es aber eine verkehrte Regel Detri, so kömmt die Fragezahl an die erste, und die mit ihr gleichnahmige Zahl an die zweyte Stelle zu stehen.

3) Das andere Verhältniß (in der Bedeutung §. 170), in welchem sich die noch unbekannte Zahl befindet, kömmt hinter das Gleichheitszeichen zu stehen, und zwar so, daß jederzeit die noch unbekannte Zahl an der vierten, und die mit ihr gleichnahmige an der dritten Stelle stehe.

4) Sodann multiplicire man in einem, wie im andern Falle die zwey mittlern Glieder miteinander, und dividire das Product durch das erste Glied, so hat man die unbekannte Zahl gefunden.

5) Sollte irgendwo ein oder mehrere Glieder, Zahlen von verschiedener Benennung enthalten, z. B. Gulden und Kreuzer, oder Pfunde, Lothe u. dgl., so müssen solche vorher auf gleiche Nahmen gebracht werden, und zwar so, daß das erste und zweyte Glied vollkommen gleiche Nahmen haben. Und eben so wird auch das vierte Glied in eben solchen Einheiten gefunden werden, auf welche das dritte Glied gebracht worden ist.

Man verfährt hier öfters am kürzesten, wenn man die Größen kleinerer Gattung als Brüche von der größern Gattung (nach §. 92) vorstellet, wie in folgenden Beyspielen zu ersehen ist.

## Beyspiele.

1. Frage. Wenn $3\frac{1}{2}$ Ellen Tuch 16 Fl. kosten; wie viel Ellen von diesem Tuche bekommt man für 100 Fl.?

Antwort. 16 Fl. : 100 Fl. = $3\frac{1}{2}$ Ellen : $x$ Ellen;

Folglich $x = \frac{3\frac{1}{2} . 100}{16} = \frac{3\frac{1}{2} . 25}{4} = \frac{7 . 25}{2 . 4} = 21\frac{7}{8}$ Ellen.

Denn je mehr Gulden, desto mehr Ellen; nähmlich es ist

hier eine gerade Regel Detri anzuwenden, (vermög §. 193 und 194).

2. Frage. Eine gewisse Anzahl Patronen wird in 8 Tagen von 150 Mann verfertigt; man will aber diese Munition in 6 Tagen fertig haben; wie viel Mannschaft muß hierzu angestellet werden?

Antwort. 6 Tage : 8 Tage = 150 Mann : $x$ M.;

Folglich $x = \frac{8 \cdot 150}{6} = 4 \cdot 50 = 200$ Mann. Denn je mehr Tage, desto weniger Mannschaft; folglich ist hier eine verkehrte Regel Detri anzuwenden, (vermög §. 193 und 194).

3. Frage. Wie viel kosten 9 Pf. 24 Loth von einer Waare, wenn man für 5 Pf. 1 Fl. 30 Kr. zahlen muß?

Antwort. 5 Pf. : $9\frac{3}{4}$ Pf. = $1\frac{1}{2}$ Fl. : $x$ Fl.;

Folglich $x = \frac{9\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2}}{5} = \frac{39}{4} \cdot \frac{3}{2} : 5 = \frac{117}{40}$ Fl. = 2 Fl. $55\frac{1}{2}$ Kr.

Oder 5 Pf. : $9\frac{3}{4}$ Pf. = 90 Kr. : $x$ Kr.

Folglich $x = 9\frac{3}{4} \cdot \frac{90}{5} = 9\frac{3}{4} \cdot 18 = 175\frac{1}{2}$ Kr. = 2 Fl. $55\frac{1}{2}$ Kr., wie vorhin.

4. Frage. Wenn 100 Mann in einer Nacht eine Transchee von 160 Klafter verfertigen können; wie viel Mannschaft muß angestellt werden, wenn in der nähmlichen Zeit eine Transchee von 400 Klaftern verfertiget werden soll?

Antwort. 160 Kl. : 400 Kl. = 100 M. : $x$ M.;

Folglich $x = \frac{400 \cdot 100}{160} = \frac{10 \cdot 100}{4} = 10 \cdot 25 = 250$ Mann.

5. Frage. Wenn der jährliche Liedlohn eines Dienstbothen 36 Fl. beträgt, wie viel gebührt ihm für 8 Monathe und 12 Tage?

Antwort. 25 Fl. 12 Kr.

6. Frage. Wenn hundert Gulden Capital jährlich $3\frac{1}{2}$ Fl. Interesse bringen; wie groß muß das Capital seyn, wovon man jährlich 1000 Fl. Interesse haben kann?

Antwort. $28571\frac{3}{7}$ Fl.

7. Frage. Eine Rikoschetbatterie in einer Transchee ist dermaßen mit Patronen versehen, daß sie durch 24 Stunden, jede Stunde 20 Schüsse geben kann; man hat aber 32 Stunden lang keine frische Munition zu hoffen, und hat daher die vorhandenen Patronen für diese Zeit einzutheilen; wie viel Schüsse können in jeder Stunde gemacht werden?

Antwort. 15 Schüsse.

8. Frage. Wenn man zu einem Luftballon 2360 Ellen von einem Taffet braucht, welcher eine Elle breit ist; wie viel braucht man zu eben diesem Ballon Ellen von einem Taffet, welcher $1\frac{1}{4}$ Ellen breit ist?

Antwort. 1888 Ellen.

9. Frage. Es befinden sich in einer Festung 6000 Mann Besatzung, welche für 2 Monathe mit Proviant versehen sind; nun wird die Festung mit einer Blokade bedrohet; der Commandant erhält Ordre, sich durch 3 Monathe und 10 Tage zu halten; es ist die Frage, wie viel er von der Mannschaft aus der Festung fortschicken muß?

Antwort. $3\frac{1}{3}$ Monath: 2 Monath = 6000 M.: $x$ M.;

Folglich $x = 6000 \cdot 2 : \frac{10}{3} = \frac{6000 \cdot 2 \cdot 3}{10} = 600 \cdot 6 = 3600$ Mann, welche in der Festung verbleiben können; mithin müssen 6000 — 3600 = 2400 Mann fortgeschafft werden.

10. Frage. Nun setze man den Fall, die ganze Mannschaft müßte in der Festung bleiben; und da entsteht die Frage, wie viel Zwieback einem jeden Manne täglich zu geben sey, wenn sie für 2 Monathe dergestalt mit Proviant versehen sind, daß jeder Mann täglich 2 Pf. Zwieback erhalten könnte.

Antwort. $3\frac{1}{3}$ Monath : 2 Monath = 2 Pf. : $x$ Pf.;

Folglich $x = 4 : \frac{10}{3} = \frac{4 \cdot 3}{10} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ Pf

$= 1$ Pf. $\frac{32}{5}$ Loth $= 1$ Pf. $6\frac{2}{5}$ Loth.

Man sieht aus diesem Verfahren, daß es bey der Anwendung der Regel Detri besser ist, wenn man die Multiplication der mittlern Glieder nicht alsogleich verrichtet, sondern selbe nur

andeutet, weil sich öfters vortheilhafte Abkürzungen anbringen lassen, welche aus der Lehre von den Brüchen entspringen.

Anmerkung. Man kann bey der Anwendung der geraden und verkehrten Regel Detri die Glieder auch folgender Maßen ordnen: Die Zahl, welche mit der Fragezahl gleichnahmig ist, setze man an die erste, und die Fragezahl selbst an die dritte Stelle; die noch unbekannte Zahl an die vierte, und die mit ihr gleichnahmige an die zweyte Stelle. Um sodann die noch unbekannte Zahl zu finden, multiplicire man bey der geraden Regel Detri die zwey mittlern Glieder miteinander, und dividire das Product durch das erste Glied; bey der verkehrten Regel Detri aber multiplicire man das erste und zweyte Glied miteinander, und dividire das Product durch das dritte Glied. Das obige Beyspiel Nr. 1, würde demnach also stehen: 16 Fl. : $3\frac{1}{2}$ Ellen = 100 Fl. : $x$ Ellen. Folglich $x = 3\frac{1}{2}$. 100 : 16 = $21\frac{7}{8}$ Ellen.

Obwohl nun dawider eingewendet werden kann, daß in diesem Beyspiele 16 Fl. : $3\frac{1}{2}$ Ellen kein Verhältniß in der Bedeutung (§. 170) seyn kann, da diese zwey Glieder ungleichnahmig sind, so sieht man doch wohl ein, daß die Proportion dennoch richtig ist, wenn man die Glieder derselben als unbenannte Zahlen betrachtet. Und muß man denn dieses nicht auch bey dem vorigen Ansatze 16 Fl. : 100 Fl. = $3\frac{1}{2}$ Ellen : $x$ Ellen thun, wenn man die zwey mittlern Glieder 100 Fl. und $3\frac{1}{2}$ Ellen miteinander multipliciret? Freylich könnte man hier auch diesem Vorwurfe ausweichen, wenn man, um das vierte Glied zu finden, zuvor das zweyte Glied 100 Fl. durch das erste 16 Fl. dividiret, und mit diesem unbenannten Quotienten $\frac{100}{16} = \frac{25}{4}$ das dritte Glied $3\frac{1}{2}$ Ellen multipliciret. Da man aber nach dieser strengen Theorie eben das nähmliche Resultat, wie vorhin erhält, so kann die im gemeinen Leben schon einmahl so eingeführte practische Ordnung der Glieder, und Auflösung der Regel Detri auch beybehalten werden.

§. 197.

Die Regel Detri findet auch vorzüglich ihre Anwendung bey der Verwandlung (Reduction) der Gewichte und Maße eines Ortes, in jene eines andern Ortes, wenn das Verhältniß, welches solche gegeneinander haben, bekannt ist. Z. B. wenn es bekannt ist, daß ein cöllner Pfund sich zu einem pariser Pfunde verhält, wie 43 zu 45, nähmlich daß 45 cöllner Pfunde 43 pariser Pfunde ausmachen, und es würde gefragt, wie viel 94 pariser Pfunde nach dem cöllner Gewichte betragen; so findet folgende Regel Detri Statt: 43 par.: 94 par. = 45 cölln.: $x$ cölln. Pfund, folglich $x = \frac{94 \cdot 45}{43} = 98\frac{1}{43}$ pariser Pfund = 98 Pf. $11\frac{3}{43}$ L.

Eben so, wenn es bekannt ist, daß sich eine prager Elle zu einer wiener Elle verhalte, wie 16 zu 21, oder daß 16 wiener Ellen 21 prager Ellen ausmachen; und es wird gefragt, wie viel 30 wiener Ellen in prager Ellen verwandelt betragen, so ist 16 wiener Ellen: 30 wiener Ellen = 21 pr. Ell.: $x$ pr. Ell.; also $x = \frac{30 \cdot 21}{16} = 39\frac{3}{8}$ pr. Ell.

Ingleichen, wenn die Frage wäre; wie viel beträgt eine Länge von 100 wiener Fuß nach dem pariser Fuße gemessen, wenn es bekannt ist, daß 1440 wiener Fuß 1401 pariser F. ausmachen; so ist 1440 wien. F.; 100 wien. F. = 1401 par. F.: $x$ par. F.; folglich $x = \frac{1401 \cdot 100}{1440} = \frac{467 \cdot 10}{48} = 97\frac{7}{24}$ par. Fuß.

§. 198.

Es ist aber bey der Reduction der Gewichte und Maße nicht nur das Verhältniß, welches die Gewichte und Maße verschiedener Örter gegeneinander haben, zu wissen nöthig, sondern man muß auch von den, an verschiedenen Örtern gebräuchlichen Eintheilungen derselben unterrichtet seyn. Insbesondere kömmt hier in Absicht des Gewichts zu bemerken, daß an einem nähmlichen Orte öfters verschiedene Gewichte im Gebrauche sind; besonders ist in den meisten Örtern das Gewicht, womit Silber,

Gold und Edelgesteine gewogen werden, von dem Kramer- oder Handelsgewichte verschieden; so ist auch gemeiniglich ein Apothekerpfund von einem Handelspfunde verschieden.

Hier in Wien sind, vermög Protokoll des k. k. Zimmentirungsamtes, fünferley Gewichte im Gebrauche, nähmlich:

1) Das Mark- oder Münzgewicht (auch Valvationsgewicht genannt), dessen man sich beym Münzwesen, beym Abwägen des Silbers, und der davon verfertigten Dinge bedienet.

2) Das Commercial- oder Handelsgewicht, welches im gewöhnlichen Handel gebraucht wird.

3) Das Ducatengewicht, welches beym Abwägen des Goldes, und der aus Gold verfertigten Sachen gebraucht wird.

4) Das Juwelengewicht, womit Perlen und Edelgesteine gewogen werden.

5) Das Apothekergewicht.

Eine wiener Mark beträgt vermög der Einrichtung des hiesigen k. k. Münzamtes vollkommen genau $\frac{6}{5}$ der wahren cöllnischen Mark, der man sich an vielen Orten Deutschlands bedienet; und es wird die wiener Mark eben so wie die cöllnische in 16 Lothe, das Loth in 4 Quintl, das Quintl in 4 Pfennige, der Pfennig in 2 Heller, und der Heller in 128 Richtpfennige eingetheilet, so daß die Mark aus 65536 Richtpfennigen bestehet; mithin ist ein Richtpfennig des wiener Markgewichts ebenfalls $\frac{6}{5}$ eines Richtpfennigs einer cöllnischen Mark; und ein cölln. Richtpfennig $= \frac{5}{6}$ wiener Richtpfennig.

Ein wiener Handelspfund wird in 32 Lothe, ein Loth in 4 Quintl, und ein Quintl in 4 Pfennige, zuweilen auch noch ein Pfennig in 15 Grane eingetheilet. Es ist aber das wiener Handelsgewicht um etwas weniges leichter als das wiener Markgewicht, so daß ein halbes wiener Handelspfund vollkommen genau nur aus 65387 solchen Richtpfennigen bestehet, deren eine wiener Mark 65536 hat.

Das Gewicht eines gesetzmäßigen kaiserlichen Ducatens, deren 67 auf eine cöllnische Mark, und 80$\frac{3}{5}$ auf eine wiener Mark gehen, ist die Einheit des in Nr. 3 angeführten Ducatengewichts, und wird allhier in 60 gleiche Theile getheilet, die man Ducatengrane nennet. Eine Unze des wiener Markgewichts enthält demnach 603 Ducatengrane.

Das Gewicht der Juwelen wird durch Karate bestimmet; ein Karat des wiener Juwelengewichts wiegt 48$\frac{1}{3}$ Richtpfennige des wiener Markgewichts; ein Karat wird noch in 4 Juwelengrane eingetheilet.

Ein wiener Apothekerpfund hat, wie es sonst überall gebräuchlich ist, 12 Unzen, und eine solche Unze besteht allhier aus 2 genau eben so schweren Lothen, als das Handelspfund deren 32 hat. Eine Unze wird eingetheilet in 8 Drachmen, oder Quintel; eine Drachme in 3 Scrupel, und ein Scrupel in 20 Apothekergrane.

Bey den Gold- und Silberprobirwagen bedient man sich allhier, so wie in ganz Deutschland eines kleinen Gewichts (gemeiniglich eines Pfennigs des Markgewichts), welches eine verjüngte oder symbolische Mark genannt wird; beym Silber theilt man diese verjüngte Mark in 16 Lothe, und ein solches verjüngtes Loth in 18 Silbergrane; oder auch ein Loth in 4 Quintl, und ein Quintel in 4 Pfennige. Beym Gold aber wird die verjüngte Mark in 24 Goldkarate, und ein solcher Karat in 12 Goldgrane eingetheilet.

Anmerkung. In Frankreich, Holland und England wird die verjüngte Mark Silber in 12 Haupttheile (Deniers, Pfennige oder Unzen), und ein solcher Haupttheil in Frankreich und Holland in 24 Grains, in England aber in 20 Dwts. eingetheilet. Ein Goldkarat aber der verjüngten Mark wird in Frankreich in 32, in Holland in 12, und in England in 4 Grains zertheilet, wo in England ein solcher Grain noch in 4 Quarters zerfället wird.

§. 199.

Wir wollen bey dieser Gelegenheit die zuverlässigsten Ver-

gleichungen der Gewichte und Längenmaßen einiger Orte hieher setzen.

1. Vergleichung einiger Gewichte nach Richtpfennigen der cöllnischen Mark, und Asen des holländischen Troys-Gewichts.

Wenn man eine cöllnische Mark (als das Gewicht von 67 neugeprägten k. k. Ducaten) durch bloße Halbirungen in 65536 Richtpfennige eintheilet, nähmlich die Mark in 8 Unzen, die Unze in 2 Lothe, 1 ein Loth in 4 Quentchen, 1 Quentchen in 4 Pfennige, einen Pfennig in 256 Richtpfennige (zuweilen wird auch ein Pfennig in 17 Eßchen, wie auch in 15 Grane zertheilet), so enthält, vermög einer sorgfältigen Untersuchung:

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| 1) In Amsterdam und ganz Holland ein Apothekerpfund des holländischen Troys-Gewichts von 12 Unzen. | 103400 | 7680 |
| Es sind nähmlich 135 Unzen holl. Troys = 142 cöllnisch, und 71 Unzen der wien. Mark = 81 Unzen holl. Troys. | | |
| 8 Solche Unzen holl. Troys sind eine holl. Mark, = = = = = | 68933 | 5120 |
| wo eine Unze in 20 Engels, und ein Engel in 32 Asen zertheilet wird, so daß eine Mark holl. Troys 5120 Asen enthalte. 41 Asen holl. Troys sind daher äußerst nahe = 552 Richtpfennig der cölln. Mark, = 460 Richtpfennig der wiener Mark, weil (vermög §. 198) genau 5 wien. Mark = 6 cölln. Mark sind. Denn vermög eigener Untersuchung hat ein neuer messingener Einsatz von 4 holl. Mark im hiesigen k. k. Münzamte gewogen 229780 $\pm$ 4 wien. Richtpfennig; und ein anderer von 1 holländ. Mark 57444 $\pm$ 1 wien. Richtpfennig. | | |

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| 19 Unzen holl. Troys sind daher nicht genau = 20 Unzen cöllnisch; und die cölln. Mark enthält nicht 4864, wie es sonst allenthalben in den Büchern angetroffen wird, sondern 4867 $\frac{2}{3}$ Asen holl. Troys; welches in der Folge noch mehr bestätiget wird. | | |
| Ein Handelspfund in Holland von 16 Unzen, oder 32 Loth, ist etwas schwerer als 2 holl. Mark; es enthält = = = | 138410 | 10280 |
| Es sind nähmlich 256 Unzen holl. Handelsgewicht = 257 holl. Troys, und 125 Unzen holl. Handelsgewicht = 132 Unzen cöllnisch; wie auch 161 Pfunde holl. Handelsgewicht = 142 Pfunden wien. Handelsgewicht. | | |
| Denn ein neuer messingener ganzer Centner von 100 Pfund amsterdamer Handelsgewicht im hiesigen, nun zwar aufgehobenen k. k. Zimmentirungsamte, mit einem Zeugnisse seiner Richtigkeit versehen, hat gewogen 88 Pfund 6 $\frac{3}{8}$ Loth wien. Handelsgewicht, oder 11534164 wien. Richtpfennige. Ein anderer messingener Einsatz von 32 Loth holl. Handelsgewicht im hiesigen Münzamte hat gewogen 115308 $\pm$ 2 wien. Richtpfennige. | | |
| 2) In London und ganz England ein Apothekerpfund des englischen Troy-Gewichts (nicht Troys-Gewichts) von 12 Unzen = | 104560 | 7766 |
| Es sind nähmlich 90 Unzen holl. Troys = 89 Unzen engl. Troy. | | |
| Die Unze des engl. Apothekerpfundes wird, wie es sonst gewöhnlich ist, in 8 Drachmen, eine Drachme in 3 Scrupel, und ein | | |

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| Scrupel in 20 Grane zertheilet. 12 solche Unzen heißen auch eine englische Mark Troy, wo aber eine Unze in 20 Pennys, ein Penny in 24 Grans und ein Gran in 20 Mits zertheilet wird. | | |
| In England ist auch das sogenannte Avoir du poids Gewicht gebräuchlich, wo ein Pfund in 16 Unzen, und eine Unze in 16 Drachmen zertheilet wird, und es sind 31 Unzen engl. Troy = 34 Unzen Av. d. p.; daher 1 Pf. Avoir du poids = = = | 127112 | 9441 |
| Und endlich ist in England auch noch ein Pfund Königsgewicht von 16 Unzen = 1½ Pf. Av. d. p. = = = | 190668 | 14162 |
| 3) In Paris und ganz Frankreich ein Apothekerpfund des französischen Gewichts von 12 Unzen (Poids de France oder auch Poids de marc, welches zuweilen in Deutschland unrichtig Poids de Troyes genannt wird) enthält = = = = = | 102876 | 7641 |
| Es sind nähmlich 43 Unzen franz. = 45 Unzen cölln. | | |
| 8 solche Unzen sind eine franz. Mark. | 68584 | 5094 |
| Und 16 Unzen ein franz. Handelspfund | 137168 | 10188 |
| Die Unze wird in 8 Gros oder Drachmen, ein Gros in 3 Deniers, und ein Denier in 24 Grans zertheilet. | | |
| Diese angeführte Bestimmung des pariser Gewichts in cölln. Richtpfennigen, und in Asen holl. Troys stimmen vollkommen überein sowohl mit H. Krusens Angabe im hamb. Kontoristen (1 par. Mark = 5094 Asen holl. Troy vermöge einer wirklichen in | | |

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| Amsterdam vorgenommenen Untersuchung) als auch mit H. Eisenschmieds Untersuchung in Disquis. de pond. et mens. (1 cölln. Unze = 550¼ paris. Grans); hingegen die fernere Vergleichung des H. Kruse (21 par. Mark = 22 cölln. Mark) muß unrichtig seyn, weil solche mittelst des unrichtigen Satzes (19 Asen holl. Tr. = 256 cölln. Richtpfennige) abgeleitet wurde. | | |
| 4) In Wien und in allen österreichischen Staaten. | | |
| 1 wien. Apothekerpfund von 12 Unzen. | 117696⅗ | 8742 |
| 1 wien. Handelspfund von 32 Lothen, oder 16 Unzen = = = = = | 156928⅘ | 11656 |
| 1 wien. Mark von 16 Lothen oder 8 Unzen | 78643⅕ | 5841 |
| 1 Ducaten von 60 Gran = = = | 978⅑ | |
| 1 Karat des wien. Juwelengewichts = | 57¾ | |
| Es ist auch sonst überall 1 Juw. Karat = 57 bis 58 cölln. Richtpfennige. | | |
| Es sind daher 47 Unzen Poids de France oder pariser Poids de marc = 41 Unzen wien. Mark-Gewicht. | | |
| Und 183 franz. Pfunde sind gleich 160 Pfunden wien. Handelsgewicht. | | |
| 5) In Kölln und in mehreren andern Städten Deutschlands ein Handelspfund von 32 Loth = 2 Mark des wahrhaften cölln. Gewichts. = = = = = = | 131072 | 9735⅓ |
| Ein gut aufbewahrter messingener Einsatz von 1 Mark cölln. vom Jahre 1716 mit dem Stämpel von Cölln versehen im hiesigen Münzamte hat gewogen 54610 ± 1 wien. Richtpfennig; und ein anderer solcher Ein- | | |

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| satz ohne Jahrzahl, und nicht so fleißig ausgearbeitet 54644 ± 1 wien. Richtpfennig. | | |
| 6) In Venedig ein großes Handelspfund von 16 Unzen (libra grossa), oder 2 Mark Münzgewicht = = = = | 133802 | 9938 |
| Es sind nähmlich 48 Unzen der venet. libra gr. = 49 Unzen cöllnisch. | | |
| Ein venetianisches kleines Handelspfund von 12 Unzen (libra sottile) = = = | 84633 | 6286 |
| Es sind nähmlich 83 Unzen lib. sottile = 70 Unzen lib. gr. | | |
| Auch ist in Venedig ein eigenes Fleisch- und Victualgewicht (großes oder schweres Gewicht peso grosso genannt) gebräuchlich; 19 Unzen dieses Gewichts sind beynahe = 30 Unzen libra sottile; folglich 1 Pf. p. gr. von 12 Unzen. = = = = | 133631 | 9744 |
| Und endlich gibt es in Venedig auch noch eine oncia sottile, welche bey dem Apothekergewicht, und in verschiedenen andern Fällen gebraucht wird; 25 solche Unzen des venetianischen Apothekergewichts sind gleich 21 Unzen des venet. Markgewichts und folglich enthält ein venet. Apothekerpfund von 12 Unzen = = = | 84295 | 6261 |
| Denn vermög eigener Untersuchung hat ein neuer messingener Einsatz von 2 Mark oder 1 Pfund lib. gr. gewogen 111502 ± 2; ein anderer von ½ Mark 27876 ± ½; ein Pfund lib. sott. 70528 ± 1; eine Unze Fleischgewicht im Durchschnitt 9280, und eine Unze Apothekergewicht 5857 wien. Richtpfennige. | | |

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| Diese angeführten Gewichte waren mit Zeugnissen ihrer Echtheit versehen, welche weiter unten folgen werden. Hingegen hat ein anderer zwar gestämpelter, aber mit keinem Zeugnisse versehener messingener Einsatz von 1 venet. Mark im hiesigen Münzamte gewogen 55698 ± 1 wien. Richtpfennig. | | |
| 7) Zu Breslau, in Lemberg und ganz Galizien, ein Pfund von 32 Loth des breslauer Gewichts, wie solches allhier nach einem breslauer Original verfertiget wird, wiegt 23 Loth, 0 Quintl, $1\frac{5}{16}$ Pfennig wien. Markgewicht = 94544 wien. Richtpfennig. | | |
| Ein breslauer Handelspfund ist daher | 113452 | $8426\frac{3}{4}$ |
| Und es sind 119 bresl. Pf. = 103 cölln. Pf. wie auch 65 bresl. = 47 wien. Handelspfund. | | |
| Eine einzelne ganz von Messing sauber ausgearbeitete breslauer Mark im hiesigen Münzamte hat gewogen 45994 ± 1 wien. Richtpfennig; und eben daselbst ein messingener Einsatz von 1 bresl. Mark 45986 ± 1 wien. Richtpfennig. | | |
| Es ist daher eine breslauer Mark = | 55193 | $4099\frac{1}{4}$ |
| Und es sind sehr nahe 57 breslauer Mark = 40 wien. Mark = 48 cölln. Mark. | | |
| 8) Ein prager Pfund von 2 Mark im hiesigen Münzamte hat gewogen 119440 ± 2 wien. Richtpfennig; daher ist | | |
| Eine prager Mark von 8 Unzen = | 71664 | 5323 |
| Und es sind 107 prager Mark = 117 | | |

| | Richtpfen. der cölln. Mark. | Verw. in Asen holl. Tr. |
|---|---|---|
| Mark cölln. wie auch 124 prager Mark = 113 wien. Mark. | | |
| 9) Ein messingener Einsatz von 1 nürnb. Mark im hiesigen Münzamte hat gewogen 55684 ± 1 wien. Richtpfennig enthält daher | 66821 | 4963 |
| Und vermöge dieser Untersuchung wären 51 nürnb. Unzen = 52 cölln. Unzen. | | |
| 10) Ein gut aufbewahrter messingener Einsatz mit der Aufschrift, Augsburg 1 Pfund von 2 Mark, im hiesigen Münzamte hat gewogen 110176 ± 2 wien. Richtpfennig. | | |
| Es ist daher 1 augsburg. Mark von 3 Unzen = = = = = = | 66105 | 4910 |
| Und 461 Unzen augsb. = 465 Unz. cölln. | | |
| 11) Ein sauber ausgefertigter messingener Einsatz von 1 Pfund zu 2 Mark, wo 1 Loth mit 12 *d*, ½ Loth mit 6 *d*, ¼ Loth mit 3 *d*, und endlich 1 *d* mit 1 . . 12 bezeichnet war, im hiesigen Münzamte hat gewogen 114690 ± 2 wien. Richtpfennig. | | |
| Das Futteral hatte die deutsche Aufschrift: Niederländer Gewicht; die erste Hülse war am Boden, außen mit 1 marc, und inwendig mit 16 bezeichnet. | | |
| Dieses Pfund enthält daher = = | 137628 | 10222 |
| Und es sind 20 solche Pf. = 21 Pf. cölln. | | |
| Bey diesem, und dem vorigen Einsatze war der eine Stämpel (vermuthlich des Meisters mit den Buchstaben G. S.) einerley; die zwey andern Stämpel aber waren verschieden; diese Merkmahle und Krusens Angabe lassen vermuthen, daß dieser Einsatz Regenspurg. Markgewicht sey. | | |

Ferner soll nach Hrn. Krusens Angabe im hamb. Kontoristen an Asen holl. Troysgew. enthalten:

1 Handelspfund von 16 Unzen oder 32 Loth in Antwerpen und ganz Niederland 9790, eine Mark aber von 8 Unzen 5120; Augsburg schweres 10220, leichtes 9836; Berlin von 2 Mark 9750; Bern 10825; Braunschweig von 2 Mark, Dresden und Leipzig 9716; Constantinopel 1 Oka 26396; Copenhagen und ganz Dänemark 10388, eine Mark aber von 8 Unzen 4888; Danzig 9062; Genf großes 11462, kleines 9552; Hamburg 10080; Hannover von $1\frac{1}{5}$ Apothekerpfund 10127; Lissabon und ganz Portugal von 2 Mark 9552; Madrit und ganz Spanien von 2 Mark 9592; Marseille 8359; München und Regenspurg 11671; eine Mark aber in Regenspurg 5111; Petersburg und ganz Rußland 8512; Stockholm und ganz Schweden 8848, eine Mark aber von 8 Unzen 4384; Warschau 7863.

Ferner 1 Pfund von 12 Unzen in Corsika 7166; Florenz 7273; Genua schweres 7140, leichtes 6720; Livorno 7131; Mantua 6854; Mayland 6822; Neapel 6677; Padua 6952; Parma 7056; Rom 7345; Turin von $1\frac{1}{2}$ Mark holl. Troys 7680. Apothekergewicht in Deutschland (mit Ausnahme der österreichischen Monarchie und Hannover) 7444.

Da nun vermöge obenangeführten, 41 Asen = 552 cölln. Richtpfennig sind, so ist es leicht, diese angeführten Gewichte aus dem für bekannt angenommenen Gewichte von 67 kais. Ducaten abzuleiten, um eine bestimmte Kenntniß davon zu erlangen, wie viel solche nach dem wahren cölln. Gewichte betragen. Nur dürften diese Angaben des Hrn. Kruse bis auf die Einheiten der Asen nicht allenthalben richtig seyn, weil diese Verhältnißzahlen an mehreren Orten mittelst der unrichtigen Angabe (1 cölln. Mark = 4864 Asen holl. Troys) abgeleitet wurden. Daß diese Angabe unrichtig seyn müsse, erhellet auch schon daher, weil 70 neugeprägte Ducaten 159 Engels holl. Tr. und 67 solche eine cöllnische Mark wiegen müssen. Auch sind die Gewichtseinsätze einer nähmlichen Gattung, die von verschiedenen Künstlern verfertigt werden, öfters bey 10000 Asen um 1 oder 2, zuweilen auch um mehr Asen verschieden. Überdieß sind die

Gewichtseinsätze in ihren Zertheilungen öfters nicht genau abgeglichen, so, daß die Schlußfolge aus der abgeführten Untersuchung eines Theiles des Gewichteinsatzes auf das ganze Gewicht unrichtig ausfallen muß, wie es aus Folgendem erhellet.

Die Richtigkeit des obenangeführten venetianischen Gewichtes, welches auch in Triest gebraucht wird, war mit folgenden in italienischer Sprache abgefaßten Zeugnissen versehen; nur der Anfang und das Ende bey dem ersten war lateinisch.

Im Nahmen des Barmh. Gottes Amen. Im Jahre v. d. Menschw. unf. H. J. Chr. 1787 am Donnerstag d. 5. Apr.

H. J. B. Nicoletti, Wag- und Gewichtsaufseher im hiesigen Münzhause ist in meiner, des öffentlichen Notars, und der unten gesetzten Zeugen Gegenwart erschienen, und hat mittelst eines freywilligen, aus Liebe zur Wahrheit in meine Hände abgelegten Eides erkläret: daß die zwey Gewichtseinsätze, der eine von 1 kleinen, der andere von 1 großen venetianischen Pfunde, wo zugleich der größere Einsatz 2 Mark Goldarb. Gew. beträgt (dichiara, che si due Marchi, uno a peso di libra sottile veneta, e l'altro a peso di libra alla grossa veneta, qual Marca alla grossa forma il peso di Marche duo peso da orefice etc.), welche derselbe an H. V. Porta verkaufet, wahre und echte Gewichte von einem kleinen und von einem großen Pfunde sind, wie solche in der Hauptstadt (nella dominante) üblich sind; und welche hiermit mit dem Stämpel des heil. Markus bezeichnet werden. So viel bez. ꝛc. Venedig ꝛc.

Bey der Prüfung enthielt wiener Richtpfennige vom großen Pfunde der ganze Einsatz von 16 Unzen 111502; 8 Unzen 55748; 4 Unzen 27864; 2 Unzen 13950; 1 Unze 6970; der Überrest von 1 Unze 6964. Vom kleinen Pfunde der ganze Einsatz von 12 Unzen 70528; 6 Unzen 35264; 3 Unzen 17624; 2 Unzen 11768; der Überrest von 1 Unze 5862.

Ferner wurden später eingeschickte, mit nachstehendem Zeugnisse versehene venetianische Gewichte untersuchet:

Venedig den 14. August 1789. Ich Endesunterzeichneter öffentlicher Wag- und Gewichtsaufseher im Münzhause bezeuge

hiermit, daß diese überschickten Gewichte echte und richtige venetianische Gewichte sind. Als, ein Einsatz von 4 Unzen des Goldarb. Gewichts ꝛc. Sodann 1, ½, ¼ Unzen 1, ½ Drachm. 1, ½ Scr. des geringen Gewichts für die Apotheker (Oncia detta sottila da 1, ½. ¼; Drama et mezza; Scrupulo et mezzo ad uzzo di spicialli et marceri da cetta etc.). Ferner 1, ½, ¼ Unze des sogenannten schweren Gewichts für die Lebensmittel ꝛc. (mit Beybehaltung der Schreibart; Piu oncia 1, ½, ¼ dette pesso grosso ad uzzo de comestibelli carnami cazarolli et frutarolli il tutto di peso Giustisimo). Und endlich einige Karate und Grane ꝛc. J. B. Nicoletti etc.

Es enthielt wiener Richtpfennig ½ Mark 27876, war aber in der Zertheilung eben so unrichtig als die vorigen; vom Apothekergew. 1 Unze 5857; ½ Unze 2928; ¼ Unze 1463½; 1 Drama 726; ½ Drama 362½; 1 Scrupulo 140; vom Victualiengewichte eine Unze 9276; ½ Unze 4640, und ¼ Unze 2321½ wiener Richtpfennige. Ein Karat war im Durchschnitte beynahe eben so schwer als ein wiener Juwelenkarat; und so auch ein Gran beynahe = 1 wiener Ducatengran.

Ein zierlich ausgearbeiteter englischer Gewichtseinsatz eines seyn sollenden Av. d. p. Gewichts von 4 Pfunden bey einer künstlichen Ramsden'schen Wage in der hiesigen medicinisch-chirurgischen Akademie, womit ein jeder das Gewicht seines eigenen Körpers selbst finden kann, und wobey mittelst jeder Unze ein Gewicht von 7 Pfunden angegeben wird, wurde bey der Untersuchung folgender Maßen befunden:

Die äußere Hülse mit der Aufschrift 32 O. 16 Ston. 224 Pf. wog wiener Richtpfennige 212264; der Überrest von 32 Ounc. 213124; ferner 16 Unzen 106306; 8 Unzen 53168; 4 Unzen 26576; 2 Unzen 13448; 1 Unze 6760; und der noch ferner zertheilte Überrest von 1 Unze 6864. Wer sollte wohl aus London so was unrichtiges erwarten? So grobe Fehler in der Zertheilung waren doch bey keinem der angeführten im Deutschlande verfertigten Gewichtseinsätze anzutreffen.

So eben erhalte ich aus Paris die Etalons (Grundmuster) des neuen, aus der Größe unserer Erdkugel, abgeleite-

ten Maß- und Gewichtssystems. Bey der genauesten Vergleichung derselben, mit der Maß- und Gewichtsverfassung der k. k. Erblande, überzeugte ich mich mit Vergnügen, daß die von mir in meinem Log. Trig. Handb. Leipzig 1800, und in D. L. v. Zach Monatl. Corresp. May 1800 angegebenen Vergleichungen des alten und neuen französischen Gewichtes mit dem wiener, mit dem mittlern cöllnischen, mit dem holländischen, mit dem nürnberger u. m. a. Gewichten richtig sind; obschon meine Bemühung, einen Etalon des französischen Poid de Marc zu erhalten, durch zwanzig Jahre vergeblich war. Die Theile des erwähnten neuen Gewichts-Etalons wurden bey der genauesten in meiner Gegenwart im Zimmentirungs-Zimmer des Wiener Stadt-Magistrats vorgenommenen Abwägung in Granen des wiener Apotheker-Gewichts (von 12 Unzen zu 8 Drachmen zu 60 Gran) folgender Maßen schwer befunden:

500 Grammes = $6857\frac{1}{2}$; 200 Grammes = $2742\frac{1}{2}$;
100 Gr. = $1371\frac{1}{2}$; 50 Gr. = $685\frac{3}{4}$; 20 Gr. = $274\frac{33}{64}$;
10 Gr. = $137\frac{33}{128}$; 5 Gr. = $68\frac{81}{128}$; 2 Gr. = $27\frac{115}{256}$;
1 Gramme = $13\frac{45}{64}$; $\frac{5}{10}$ Gr. = $6\frac{57}{64}$; $\frac{2}{10}$ Gr. = $2\frac{183}{256}$;
$\frac{1}{10}$ Gr. = $1\frac{42}{128}$; $\frac{5}{100}$ Gr. = $\frac{179}{256}$ Wiener Gran.

Die bey den angeführten Untersuchungen gebrauchte sogenannte Valvationswage, und Gewichtszertheilung wien. Valvationsgewicht (dem Hrn. Joh. Edlezeit, Wag-, Gewicht- und Maßenfabrikanten allhier gehörig, welchem zugleich für seine dießfalls bezeigte gefällige Bereitwilligkeit hiermit gedanket wird), war mit äußerster Genauigkeit verfertiget. Überhaupt hat sich bey dieser Untersuchung gezeiget, daß die Gewichte, Wagen und Maße sowohl zum allgemeinen, als auch zum besondern Gebrauche im Durchschnitte genommen, vielleicht nirgends in der ganzen Welt mit einer so genauen Richtigkeit, Gleichförmigkeit und Übereinstimmung, sowohl im Ganzen als auch in ihrer Zertheilung verfertiget werden, als allhier in Wien, welches man vorzüglich der Einrichtung des vorher bestandenen eigenen Zimmentirungs-Amtes zu verdanken hat. Nun aber, da dieses eigene Zimmentirungs-Amt im Jahre 1787 aufgehoben worden, so ist mit Grunde zu befürchten, daß zum

großen Nachtheile des allgemeinen Besten in die Zukunft die dießfällige Unrichtigkeit und Ungleichförmigkeit sich auch allhier nach und nach einschleichen werde; nicht zwar bey der Erzeugung der Gewichte, Wagen und Maße, weil auf deren Richtigkeit dießfalls nun der wiener Stadtmagistrat die Aufsicht hat, sondern bey deren so vielfältigem Gebrauche in der Handlung und andern Geschäften.

Anmerkung. Eben noch zu rechter Zeit, da dieser Bogen gesetzt wird, ergibt sich die Gelegenheit, aus den Pariser Mem. des sciences 1767 nachstehende auf Veranlassung der pariser Akademie der Wissenschaften durch Hrn. Tillet abgeführte Untersuchung einiger von den französischen Gesandtschaften eingeschickten Gewichte einzurücken, um verschiedene Angaben sowohl in Krusens hamb. Kontoristen, als auch in vielen andern Büchern, welche dergleichen Krusens Angaben enthalten, prüfen und berichtigen zu können, als:

| Nahmen der Orter. | Benennung des Gewichts. | enth. Unzen | wiegt P. de Fr. M. | O. | G. | gr. | Verw. par. Gr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Paris | Poids de Marc 1 Livres = 2 Marc. = 16 Onc. = 128 Gros = 9216 gr. | 16 | 2 | 0 | 0 | 0 | 9216 |
| Berlin | ½ Pf., oder 1 Mark von 16 L. | 8 | 0 | 7 | 5 | 16 | 4408 |
| Bern | 1 Pf. Handelsgew. von 32 L. | 16 | 2 | 1 | 0½ | 6 | 9834 |
| | 1 Mark von 16 Loth ..... | 8 | 1 | 0 | 0½ | 4 | 4648 |
| | 8 Unzen oder 16 Loth Apothekergewicht ..... | 8 | 0 | 7 | 5½ | 26 | 4454 |
| Bonn | ½ Pf. od. 1 cölln. Mark v. 16 L. | 8 | 0 | 7 | 5 | 6¾ | 4398¾ |
| Brüssel | P. de Troyes 1 M. = 8 Onc. = 260 Esterl. = 5120 As. | 8 | 1 | 0 | 0 | 21 | 4629 |
| Cölln | 1 cölln. Mark von 16 Loth... | 8 | 0 | 7 | 5 | 11 | 4403 |
| Constantinopel | ¼ Oka oder Cheky von 100 Drachmen = 1600 Kara = 6400 Gr. ..... | — | 1 | 2 | 3 | 28 | 6004 |
| Copenhagen | 1 Mark von 16 Loth..... | 8 | 0 | 7 | 5½ | 10⅓ | 4438⅓ |
| | ½ Pf. Handelsgew. von 16 L. | 8 | 1 | 0 | 1 | 22½ | 4702½ |
| Danzig u. Dresden | 1 seyn sollende cölln. Mark von 16 Loth..... | 8 | 0 | 7 | 5 | 3½ | 4395½ |
| Florenz | 1 Pf. von 12 Unzen..... | 12 | 1 | 3 | 0½ | 20 | 6392 |

| Nahmen der Örter. | Benennung des Gewichts. | enth. Unzen | wiegt P. de Fr. M. | O. | G. | gr. | Verw. par. Gr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Genua | 1 kleines Pf. oder 1 Mark von 12 Unzen ..... | 12 | 1 | 2 | $2\frac{1}{2}$ | 30 | 5970 |
| | 1 großes Pf. von 12 Unzen = $\frac{2}{3}$ Rotolo ..... | 12 | 1 | 2 | 3 | 5 | 5981 |
| Hamburg | 1 cölln. Mark von 16 Loth. .. | 8 | 0 | 7 | 5 | $7\frac{3}{4}$ | $4399\frac{1}{4}$ |
| | $\frac{1}{2}$ Pf. Handelsgew. von 16 L. | 8 | 0 | 7 | 7 | 23 | 4559 |
| Lüttich | 1 Mark von 8 Unzen ..... | 8 | 1 | 0 | 0 | 24 | 4632 |
| Lissabon | $\frac{1}{2}$ Pf. oder 1 Mark von 8Unzen | 8 | 0 | 7 | $3\frac{1}{2}$ | 34 | 4318 |
| London | 1 Pf. Troy von 12 Unzen ... | 12 | 1 | 4 | $1\frac{1}{2}$ | 1 | 7021 |
| | 1 Pf. Av. d. p. von 16 Unzen | 16 | 1 | 6 | $6\frac{1}{2}$ | 6 | 8538 |
| Lucca | 1 kleines Pf. von 12 Unzen .. | 12 | 1 | 3 | 0 | $23\frac{1}{4}$ | $6359\frac{1}{4}$ |
| Madrid | 1 Mark von 8 Unzen ..... | 8 | 0 | 7 | 4 | 8 | 4328 |
| Malta | 1 Pf. von 12 Unzen = $\frac{2}{3}$ Rot. | 12 | 1 | 2 | $2\frac{1}{2}$ | 21 | 5961 |
| Manheim | 1 cölln. Mark von 16 Loth. .. | 8 | 0 | 7 | 5 | $10\frac{1}{4}$ | $4402\frac{1}{4}$ |
| Mayland | 1 Mark von 8 Unzen ..... | 8 | 0 | 7 | 5 | 33 | 4425 |
| | 1 kleines Pf. von 12 Unzen .. | 12 | 1 | 2 | $5\frac{1}{2}$ | 0 | 6156 |
| | 1 großes Pf. von 28 Unzen .. | 28 | 3 | 0 | $7\frac{1}{2}$ | 0 | 14364 |
| München | 1 cölln. Mark von 16 Loth... | 8 | 0 | 7 | 5 | $11\frac{1}{2}$ | $4403\frac{1}{2}$ |
| Neapel | 1 Pf. von 12 Unzen = $\frac{2}{25}$ Rot. | 12 | 1 | 2 | $3\frac{1}{2}$ | 27 | 6039 |
| Padua | 1 großes Pf. von 12 Unzen... | 12 | 1 | 7 | $7\frac{1}{2}$ | 5 | 9185 |
| | 1 kleines Pf. von 12Unzen... | 12 | 1 | 2 | 1 | 14 | 5846 |
| Regensburg | 1 Mark von 8 Unzen ..... | 8 | 1 | 0 | 0 | 24 | 4632 |
| | 1 Pf. Handelsgew. v. 16 Unz. | 16 | 2 | 2 | $4\frac{1}{2}$ | 6 | 10698 |
| | Ducatengew. von 64 Duc... | — | 0 | 7 | 2 | 32 | 4208 |
| | Kronengew. von 64 Kronen. | — | 0 | 7 | 0 | 12 | 4044 |
| Rom | 1 Pf. von 12 Unzen ..... | 12 | 1 | 3 | $0\frac{1}{2}$ | 14 | 6386 |
| Stockholm | 1 Pf. Victualgew. von 32 L. = 2 M. ..... | 16 | 1 | 5 | 7 | 8 | 8000 |
| Stuttgart | 1 cölln. Mark von 16 Loth... | 8 | 0 | 7 | 5 | $11\frac{3}{4}$ | $4403\frac{3}{4}$ |
| Turin | 1 Mark = $\frac{2}{3}$ Pf. Handelsgew. = $\frac{4}{5}$ Apothekerpfund ..... | 8 | 1 | 0 | 0 | $22\frac{1}{4}$ | $4630\frac{1}{4}$ |
| Venedig | 1 Mark von 8 Unzen ..... | 8 | 0 | 7 | 6 | $32\frac{1}{2}$ | $4526\frac{1}{2}$ |
| | Libra grossa von 12 Unzen. | 12 | 1 | 7 | $4\frac{1}{2}$ | $25\frac{1}{2}$ | $8989\frac{1}{2}$ |
| | Peso sottile von 12 Unzen.. | 12 | 1 | 1 | $6\frac{1}{2}$ | 24 | 5676 |
| | Ein anderes Pf. von 12 Unzen | 12 | 1 | 2 | 5 | $18\frac{1}{4}$ | $6138\frac{1}{4}$ |
| Warschau | Ein pohlnisches Pfund ..... | — | 1 | 5 | 2 | 12 | 7644 |
| Wien | $\frac{1}{2}$ Pf. Handelsgew. von 16 L. | 8 | 1 | 1 | 1 | 16 | 5272 |
| | 1 Mark von 16 Loth ..... | 8 | 1 | 1 | 1 | 26 | 5282 |
| | $\frac{3}{2}$ wiener Mark = 1 cölln. M. | — | 0 | 7 | 5 | $9\frac{2}{3}$ | $4401\frac{2}{3}$ |

Aus dieser Untersuchung, mit der vorigen verbunden, ist es zu ersehen, daß die in verschiedenen Städten Deutschlands eingeführte cöllnische Mark von 65536 Richtpfennigen nicht überall einerley sey, wo inzwischen diejenige cöllnische Mark, welche bey der Einrichtung des wiener Münzamtes (§. 198) zum Grunde gelegt wurde, sehr genau zwischen allen das Mittel hält. So scheint auch das niederländische Troys- oder Troyes-Gewicht verschieden zu seyn; eine Mark Troys-Gewicht in den vereinigten Niederlanden von 5120 Asen scheint mit einer Mark Troyes-Gewicht in den österreichischen Niederlanden ebenfalls von 5120 Asen nicht einerley zu seyn; diese wiegt 4629, und jene 4631⅓ pariser Grans, weil die pariser Mark in Holland 5094 Asen holländische Troys soll gewogen haben. Und diese Verschiedenheiten sind die Hauptursachen der so vielfältigen Abweichungen in den Angaben der Gewichtsvergleichungen von den wirklich vorgenommenen Prüfungen. Diese Abweichungen werden auch nicht eher gehoben, als bis man sich entschließt, die zuverlässigsten Gewichtsvergleichungen künftig nicht mehr in Asen, und auch nicht mehr in cöllnischen Gewichtstheilen, sondern in einem andern bekannten, sich immer gleichförmig bleibenden, und leicht zu habenden Gewichte anzugeben. Da nun die Gewichte allhier in Wien allgemein mit einer außerordentlichen Genauigkeit, Gleichförmigkeit und Übereinstimmung sowohl im Ganzen als auch in ihrer Zertheilung verfertiget werden, dabey auch um einen geringen Preis zu haben sind (ein zertheiltes wiener Apothekergewicht in einem saubern Kästchen von 12, 6, 3, 2, 1, ½, Unzen, 2, 1, ½, ¼ Drachma, 4, 3, 2, 1 Scrupel, und 10 bis 1 Gran, wo 16 solche Unzen ein wiener Handelspfund von 32 Loth sind, kostet bey dem obengenannten Hrn. Edlezeit auf dem St. Stephanskirchhofe 4 Gulden), so dürfte es für Deutschland rathsam seyn, künftig anzustellende Gewichtsuntersuchungen in Granen des wiener Apothekergewichtes anzugeben. Noch besser wäre es freylich, dergleichen Prüfungen der Gewichte mit dem bis in die Richtpfennige zertheilten wien. Mark- oder Münzgewichte, (mit dem eigentlichen wiener Valvatiosgewichte, wo

$80\frac{2}{5}$ neugeprägte kais. königl. Ducaten auf 1 Mark gehen) vorzunehmen; ein solches wiener Valvationsgewicht kostet ebendaselbst $14\frac{1}{2}$, und eine dazu gehörige Valvationswage $15\frac{1}{2}$ Gulden.

Es ist dermahlen keine Zeit mehr übrig, zu den beyden obigen Untersuchungen mehrere kritische Bemerkungen hinzuzusetzen: wie viel nun ein Berliner, Dresdner, Hamburger, Pariser, Turiner, Wiener Pfund ꝛc., sowohl in Asen holl. Troys, als auch in Asen niederl. Troyes Gew. enthalte, wenn diese zwey Gewichte doch wirklich verschieden seyn sollten, wird ein jeder selbst leicht finden können.

## II. Zuverlässige Vergleichung einiger Fußmaße und Ellen mit dem königl. pariser Fuß.

Wenn man einen königl. pariser Fuß (welcher so beschaffen ist, daß ein pariser Cubikfuß Regenwasser 70 pariser Pfunde wiegt), in 1440 gleiche Theile theilet, (nähmlich den Fuß in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien, und die Linie in 10 Scrupeln); so enthält an solchen Scrupeln

1 Fuß in Bayern 1294; Dänemark $1391\frac{1}{3}$; England 1351; Frankreich 1440; Spanien 1253; Rußland 2386; Schweden 1316; Amsterdam 1255; Augsburg 1313; Berlin 1373; Braunschweig 1260; Gotha 1275; Hamburg 1270; Hannover 1295; Cölln. 1220; Leipzig 1253; Nürnberg Werkfuß 1347, und Artilleriefuß $1298\frac{1}{3}$; Rom ein Palmo 990; Turin (piede di liprando) 2277; Venedig 1540; Wien 1401; der rheinländische Fuß $1391\frac{1}{3}$; 6 Fuß heißen gemeiniglich eine Klafter, und 12 Fuß eine Ruthe.

Vollkommen genau verhält sich der wiener Fuß zum pariser, wie 100000 zu 102764. Und 1 nürnb. Artilleriezoll allhier $= \frac{1601}{1728}$ wien. Zoll.

Eine Elle in Amsterdam 3060; Brüssel große 3078, kleine 3034; Dänemark von 2 rh. Fuß $2782\frac{2}{3}$; Dresden 2509; Hamburg 2540; Hannover 2590; Leipzig 2506; Lemberg und ganz Galizien vermöge eigener Untersuchung eine Breslauer Elle von 2 Breslauer Fuß 2634; London 4053; Nürnberg 2924; Paris 5268; Rußland 1 Arschine 3154; Schweden 2632; Wien 3454.

### III. Angabe und Vergleichung einiger andern in den österreichischen Staaten gebräuchlichen Maße, nach dem Protokoll des k. k. Zimmentirungsamtes.

Eine Wiener Elle ist genau = 2,465 Wiener Fuß, und daher auch = 3454 pariser Scrupeln.

Ein wiener Metzen = 1,9471 wien. Cubikfuß; und 1 wiener Eymer von 40 Maß oder 160 Seitel oder 320 Pfiff ist = 1,792 wiener Cubikfuß; 3 Pfiff machen 1 Groß-Seitel.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 100000 | böhmische<br>schlesische<br>tyrolische | Pfunde = | 91847<br>94612<br>100516 | wien. Pfund. |
| 6000 | böhmische<br>schlesische<br>mährische<br>tyrolische | Klafter = | 5626<br>5493<br>5617<br>6342 | wien. Klafter. |
| 2465 | böhmische<br>schlesische<br>mährische<br>tyrolische | Ellen = | 1879<br>1830<br>2501<br>2544 | wien. Ellen. |
| 10000 | böhmische Strich<br>schlesische Scheffel<br>mährische Metzen<br>tyrolische Staar<br>galizische Korschetz | = | 15220<br>12419<br>11482<br>4972<br>20000 | wien. Metzen. |
| 1000 | böhmische Pinten<br>schlesische Quart<br>mährische Maß<br>tyrolische Maß | = | 1350<br>496<br>756<br>573 | wien. Maß. |

Mittelst der angeführten Vergleichungszahlen der Gewichte und Längenmaße verschiedener Örter, ist es nun leicht, eine gegebene Anzahl Pfunde, wie auch Klaftern und Füße eines Ortes in eine gleichgültige Anzahl eines andern Ortes zu verwandeln; z. B. da der Londner Fuß 1351, und der wiener 1401 pariser Scrupeln enthält; so ist der wiener Fuß länger, als der londner; und zwar dergestalt, daß ein wiener Fuß zu einem londner Fuß sich verhält, wie 1401 zu 1351; eben so verhält

sich auch der wiener Zoll zum londner Zoll, nach der zwölftheiligen Eintheilung; es sind daher 1351 wiener Fuß oder Zoll = 1401 londner Fuß oder Zoll (vermöge §. 182); welches man den Reductionssatz für das wiener und londner Fußmaß zu nennen pflegt; und man findet aus den in I. und II. angeführten Vergleichungen für jede zwey Orte den Reductionssatz sehr leicht, wenn man die danebenstehenden Zahlen verkehrt nimmt. Wäre nun eine gewisse Länge, welche im londner Fußmaße ausgedrückt gegeben ist, in das wiener Fußmaß zu verwandeln; so muß man die gegebene Zahl mit dem Bruche $\frac{1351}{1401}$ multipliciren. Wäre hingegen ein gegebenes wiener Fußmaß in das londner zu verwandeln, so muß man die gegebene Zahl mit $\frac{1401}{1351}$ multipliciren. Wenn mehrere gegebene Längenmaße mit einem Bruche zu multipliciren wären, so kann man einen solchen Bruch, oder ein solches Verhältniß $\frac{1401}{1351}$ (nach §. 111) in einen einfachen Ausdruck, ohne merkliche Veränderung des Werthes verwandeln. Auf diese Art findet man, daß $\frac{1401}{1351}$ äußerst nahe $= \frac{28}{27}$ sey; denn, wenn man 1351 mit $\frac{28}{27}$ multipliciret, so ist das Product $1401\frac{1}{27}$, so, daß die letzte Ziffer mit der eigentlichen Verhältnißzahl 1401 völlig genau übereinstimmet, wo ohnehin bey dergleichen Verhältnißzahlen die letzte Ziffer selten völlig genau richtig ist. Es sind daher auch 27 wiener Fuß = 28 londner Fuß.

Die Lehre von der Abkürzung der Brüche (nach §. 111) findet vorzüglich ihre Anwendung auf die Abkürzung solcher Verhältnißzahlen, oder Reductionssätze bey den Maßen und Gewichten; so wie auch in verschiedenen andern Fällen. Z. B. in unserer Artillerie ist es festgesetzt, daß sich der Durchmesser der Kugel zum Durchmesser der Bohrung verhalte, wie sich der Durchmesser einer 7pfündigen zum Durchmesser einer 8pfündigen Kugel verhält. Nun ist der Durchmesser einer 7pfündigen eisernen Kugel $= 3{,}902^{11}$ und der Durchmesser einer 8pfündigen

Kugel = 4,08[11] nach dem nürnberger Artilleriefuße; folglich ist das Verhältniß des Durchmessers der Kugel zum Durchmesser der Bohrung = 3,902 : 4,08 = 3902 : 4080, und endlich = 22 : 23, wenn man das Verhältniß 3902 : 4080 (nach §. 111) abkürzet.

| | 1 | 21 | 1 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| Denn 4080 : | 3902 : | 178 : | 164 : | 14 |
| | 3902 | 356 | 164 | 14 |
| | 178 | 342 | 14 | 24 |
| | | 178 | | 14 |
| | | 164 | | 10 |

| | 1, | 21 | , | 1 |
|---|---|---|---|---|

| folglich | 0 | 1 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 22 | 23 |

nähmlich $\frac{3902}{4080} = \frac{22}{23}$ sehr nahe.

Und wirklich wenn man 3902 mit $\frac{23}{22}$ multipliciret, so ist das Product = 4079$\frac{4}{11}$. Es ist demnach das Verhältniß des Durchmessers der Kugel zum Durchmesser der Bohrung bey unsern Kanonen dem Verhältnisse der zwey unbenannten oder Absolutzahlen 22 zu 23 gleich, nähmlich wenn man den Durchmesser der Kugel bey was immer für einer Kanone in 22 gleiche Theile theilet, so ist der Durchmesser der Bohrung um einen solchen Theil größer, so daß daher der Unterschied zwischen dem Durchmesser der Kugel und der Bohrung (der Spielraum) = $\frac{1}{22}$ des Kugeldurchmessers ist. Da aber gewöhnlich in der Artilleriezeichnung der Durchmesser der Kugel in 32 gleiche Theile getheilet wird, so kann man, ohne einen Fehler zu besorgen, bey der Zeichnung der Kanonen für den Spielraum $\frac{1\frac{1}{2}}{32}$ des Kugeldurchmessers annehmen, weil $\frac{1\frac{1}{2}}{32}$ von $\frac{1}{22}$ nur um $\frac{1}{704}$ des Kugeldurchmessers verschieden ist, welches bey unserer größ-

ten Kugel, nähmlich bey der 24 Pfündigen, beynahe nur $\frac{1}{12}$ Linie beträgt, welches auf einem verjüngten Maßstabe mit der Zirkelspitze nicht mehr unterschieden werden kann.

Eben so findet man den Spielraum bey unsern Pöllern $= \frac{1}{21}$ des Bombendurchmessers und folglich für die Zeichnung $\frac{3}{64}$ Durchmesser, weil es festgesetzt ist, daß bey den Pöllern der Durchmesser der Bombe sich zum Durchmesser des Flugs verhalte, wie der Durchmesser einer 20pfündigen zum Durchmesser einer 23pfündigen Bombe $= \sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{23}$.

---

# IV. Abschnitt.

## Von der zusammengesetzten Regel Detri.

### §. 200.

Die Rechnungsfragen, welche wir bisher durch die Regel Detri aufgelöset haben, waren alle so beschaffen, daß in denselben jederzeit nur zwey eigentliche Verhältnisse in Betrachtung gezogen wurden, weil alle übrigen Umstände vollkommen einerley waren. Es kommen aber sehr oft Rechnungsfragen vor, wo mehr als zwey Verhältnisse in Erwägung gezogen werden müssen. Z. B. es würde gefragt; wenn 100 Fl. Capital in 12 Monathen 5 Fl. Zins bringen, wie viel Gulden Zins bringt ein Capital von 836 Fl. in der Zeit von 16 Monathen? Hier sieht man wohl ein, daß in dieser Frage drey verschiedene Verhältnisse vorkommen, nähmlich das Verhältniß der Zeit, des Capitals und des Zinses. Ingleichen wenn gefragt würde; wenn 5 Mann in 6 Tagen 600 Faschinen verfertigen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Faschinen werden 150 Mann in 3 Tagen verfertigen, wenn sie täg-

lich 12 Stunden arbeiten? so kommen in dieser Frage vier Verhältnisse vor, nähmlich das Verhältniß der Mannschaft, der Tage, der täglichen Arbeitsstunden, und der Anzahl der Faschinen.

Die Auflösung solcher Rechnungsfragen, worin mehr als zwey Verhältnisse vorkommen, pflegt man die zusammengesetzte Regel Detri zu nennen, so wie jene, worin bloß zwey Verhältnisse vorkommen, die einfache Regel Detri genannt wird.

Jede zusammengesetzte Regel Detri besteht aus zwey Theilen, wovon jener, worin alle Glieder bekannt sind, der bekannte Fall, und der andere, worin sich die noch unbekannte Zahl befindet, der unbekannte Fall genannt wird. So ist im ersten gegebenen Beyspiele der bekannte Fall, daß 100 Fl. Capital in 12 Monathen 5 Fl. Zins bringen; und im zweyten Beyspiele ist der bekannte Fall, daß 5 Mann in 6 Tagen 600 Faschinen verfertigen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten.

Anmerkung. Die practischen Rechenmeister pflegen insbesondere jene zusammengesetzte Regel Detri, worin drey Verhältnisse vorkommen, die Regula quinque zu nennen, weil eigentlich 5 Zahlen gegeben sind, wozu die sechste gefunden werden soll. Aus gleichem Grunde nennen sie die aus vier Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri die Regula septem, jene mit fünf Verhältnissen, Regula novem u. s. w.

§. 201.

Jede zusammengesetzte Regel Detri kann durch eine wiederhohlte einfache Regel Detri aufgelöset werden, indem man jedesmahl nur zwey verschiedene Verhältnisse in die Rechnung nimmt, und alle übrige Umstände für vollkommen einerley ansieht. Z. B. die oberwähnte Frage, wenn 100 Fl. Capital in 12 Monathen 5 Fl. Zins bringen, wie viel Fl. Zins bringt ein Capital von 836 Fl. in 16 Monathen, kann folgender Maßen aufgelöset werden: Man suche zuerst durch die einfache Regel Detri, wie viel dieses Capital von 836 Fl. in eben der Zeit von 12 Monathen Zins bringt, das

ist, man lasse die Zeit gänzlich außer Acht, und ziehe nur das Verhältniß des Capitals und der Zinsen in Betrachtung; so ist

100 Fl. C. : 836 Fl. C. = 5 Fl. Z. : $x$ Fl. Z. = $\frac{5 \cdot 836}{100} = \frac{836}{20}$

$= 41\frac{4}{5}$ Fl. Z. Da es nun bekannt ist, wie viel dieses Capital 836 Fl. in Zeit von 12 Monathen Zins bringt, so läßt sich wieder durch die Regel Detri finden, wie viel solches in der gegebenen Zeit von 16 Monaten Zins trägt, nähmlich 12 M. : 16 M. $= 41\frac{4}{5}$ Fl. Z. : $x$ Fl. Z. $= \frac{41\frac{4}{5} \cdot 16}{12} = 55\frac{1}{3}$.

Eben so kann auch das zweyte obenerwähnte Beyspiel mit vier Verhältnissen durch die dreymahl wiederhohlte einfache Regel Detri aufgelöset werden, indem man jedesmahl nur zwey Verhältnisse in Erwägung zieht, und die übrigen außer Acht läßt; nähmlich man suche zuerst die Anzahl der Faschinen, welche die 150 Mann in eben der Zeit verfertigen werden, in welcher 5 Mann 600 Faschinen zu Stand bringen; so ist 5 M. : 150 M. $= 600$ F. : $x$ F. $= \frac{150 \cdot 600}{5}$ $30 \cdot 600 = 18000$.

Da es nun bekannt ist, wie viel Faschinen diese Mannschaft in 6 Tagen verfertiget, so läßt sich auch finden, wie viel Faschinen eben diese Mannschaft in den gegebenen 3 Tagen verfertigen werden, wenn man die täglichen Arbeitsstunden noch außer Acht läßt, nähmlich 6 T. : 3 T. $= 18000$ F. : $x$ F. $= \frac{3 \cdot 18000}{6} = 9000$ F. Endlich ziehe man nun auch noch die täglichen Arbeitsstunden mit in die Rechnung; so ist 8 St. : 12 St. $= 9000$ F. : $x$ F. $= \frac{12 \cdot 9000}{8} = 1125 \cdot 12 = 13500$ Faschinen, welche 150 Mann in 3 Tagen verfertigen werden, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten.

Und eben auf diese Art könnte jede aus noch so viel Verhältnissen zusammengesetzte Regel Detri aufgelöset werden.

## §. 202.

Um aber auch zu zeigen, wie jede zusammengesetzte Regel Detri kürzer, als durch die wiederhohlte einfache Regel Detri aufgelöset werden könne, wollen wir die erste obenerwähnte Frage

also stellen: Wenn $k$ Fl. Capital in $m$ Monathen $z$ Fl. Zins bringen (als der bekannte Fall); wie viel Zins bringet ein Capital $K$ Fl. in $M$ Monathen (als der unbekannte Fall)?

Wir setzen nähmlich, um die Auflösung allgemeiner zu machen, 100 Fl. Capital $= k$, 12 Monathe $= m$, 5 Fl. Zins $= z$, 836 Fl. Capital $= K$, 16 Monathe $= M$; ferner wollen wir die Anzahl Gulden Zins, welche diese 836 Fl. in der Zeit von 12 Monathen bringen, mit Z, und die Zinsen, die dieses Capital in 16 Monathen bringt, mit $Z$ benennen; so ist, wie oben

$k : K = z :$ Z, wenn die Zeit einerley, und das Capital verschieden ist;

$m : M =$ Z $: Z$, wenn das Capital einerley, und die Zeit verschieden ist:

folglich auch $km : KM = z : Z$, (vermöge §. 190, III). Nähmlich, wenn das Capital, und die Zeit verschieden ist, so verhalten sich die betreffenden Zinsen wie die Producte aus den Capitalien in die Zeiten; oder wie man zu sagen pflegt, der Zins steht mit dem Capital, und mit der Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse. Setzen wir nun wieder statt der Buchstaben ihre angenommenen Werthe, so ist

$$100 \cdot 12 : 836 \cdot 16 = 5 : z; \text{ daher } z = \frac{5 \cdot 16 \cdot 836}{12 \cdot 100}$$

$$= \frac{4 \cdot 836}{3 \cdot 20} = \frac{836}{3 \cdot 5} = 55\tfrac{11}{15} \text{ Fl. wie vorher.}$$

Eben so wollen wir bey dem zweyten obenangeführten Beyspiele im bekannten Falle 100 Mann $= m$, 6 Tage $= t$, 8 tägliche Arbeitsstunden $= s$, 600 Faschinen $= f$; und im unbekannten Falle 150 Mann $= M$, 3 Tage $= T$, 12 tägliche Arbeitsstunden $= S$ setzen, überdieß wollen wir die Anzahl der Faschinen, welche diese $M$ Mann verfertigen würden, wenn sie ebenfalls $t$ Tage, und täglich $s$ Stunden arbeiten mit f, die Anzahl der Faschinen, die sie verfertigen würden, wenn sie $T$ Tage, und täglich $s$ Stunden arbeiten mit F, endlich die Anzahl der Faschinen, welche diese $M$ Mann in $T$ Tagen, da sie täglich $S$ Stunden arbeiten, mit $F$ benennen, so ist wieder wie oben

$m : M = f : \mathfrak{f}$, denn je mehr Mann, desto mehr Faschinen;
und $t : T = \mathfrak{f} : \mathfrak{F}$, denn je mehr Tage, desto mehr Faschinen;
und $s : S = \mathfrak{F} : F$, denn je mehr Arbeitsstunden, desto mehr Faschinen;
folglich auch $mts : MTS = f : F$, (vermöge §. 190, IV.)

Nähmlich die Zahlen der verfertigten Faschinen verhalten sich gegen einander, wie die Producte aus der Anzahl der Mannschaft in die Arbeitstage, und in die täglichen Arbeitsstunden; oder die Anzahl der Faschinen steht mit der Anzahl der Mannschaft, der Arbeitstage, und der täglichen Arbeitsstunden im zusammengesetzten Verhältnisse.

## §. 203.

Wenn daher die Bestimmung der gesuchten Größe in einer Rechnungsfrage von mehreren Größen dergestalt abhängt, daß die gesuchte Größe einzeln betrachtet, mit jeder der übrigen im geraden Verhältnisse stehet, so steht eben diese gesuchte Größe mit allen übrigen Größen im zusammengesetzten Verhältnisse. So steht z. B. die Menge der Arbeit mit der Anzahl der Arbeiter und mit der dazu erforderlichen Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse, weil die Menge der Arbeit mit der Anzahl der Arbeiter allein im geraden, und mit der Zeit allein ebenfalls im geraden Verhältnisse steht. Wir wollen diesen Satz noch auf ein Paar Beyspiele anwenden.

1. Frage. Wenn man einem Fuhrmann, um 50 Centner 30 Meilen weit zu führen 80 Fl. bezahlen muß, wie viel muß man bezahlen, um 60 Centner 45 Meilen weit zu führen?

Antwort. Der Fuhrlohn steht mit der Fracht im geraden Verhältnisse, denn je mehr Fracht, desto mehr Fuhrlohn (§. 193); und der Fuhrlohn steht auch mit dem Wege im geraden Verhältnisse, denn je größer der Weg, desto größer der Fuhrlohn; folglich steht der Fuhrlohn mit der Fracht, und mit dem Wege im zusammengesetzten Verhältnisse.

Nun ist das Verhältniß der Fracht 50 : 60
des Weges 30 : 45
folglich 50 . 30 : 60 . 45 = 80 Fl. : $x$ Fl.;
daher $x = \frac{80.60.45}{50.30} = \frac{8.6.45}{5.3} = 8 . 2 . 9 = 144$ Fl.
Fuhrlohn.

2. Frage. Zu einer Mauer, welche 6 Klafter lang, 8 Schuhe hoch, und $1\frac{1}{2}$ Schuh dick ist, braucht man 5184 Ziegelsteine; wie viel braucht man von diesen Ziegelsteinen zu einer Mauer, die $8\frac{1}{3}$ Klafter lang, 2 Schuhe dick, und 6 Schuhe hoch ist?

Antwort. Die Anzahl der Ziegelsteine steht mit der Länge, mit der Höhe und mit der Dicke der Mauer, mit jedem insbesondere im geraden Verhältnisse; denn je länger die Mauer, desto mehr Ziegeln, je dicker die Mauer, desto mehr Ziegeln, und je höher die Mauer, desto mehr Ziegeln (§. 193); folglich steht die Anzahl der Ziegeln mit der Länge, Höhe und Dicke der Mauer im zusammengesetzten Verhältnisse.

Nun ist das Verhältniß der Längen der Mauer 6 : $8\frac{1}{3}$
= = Höhen 8 : 6
= = Dicken $1\frac{1}{2}$ : 2
folglich 6 . 8 . $1\frac{1}{2}$ : $8\frac{1}{3}$ . 6 . 2 = 5184 Ziegeln : $x$ Ziegeln;
und $x = \frac{8\frac{1}{3}.2.5184}{8.1\frac{1}{2}} = \frac{\frac{25}{3}.2.5184}{8.\frac{3}{2}} = \frac{25.2.5184.2}{8.3.3}$
$= 25 . 288 = 7200$ Ziegeln.

## §. 204.

Kommen aber in einer Rechnungsfrage Verhältnisse vor, welche mit dem Verhältnisse, worin sich die noch unbekannte Zahl befindet, einzeln betrachtet, nicht in gerader, sondern in verkehrter Proportion stehen; so kann der eben erwähnte Satz erst angewendet werden, wenn man diese Verhältnisse zuvor umkehret. Z. B. es wäre die Frage: Wenn 100 Mann = $m$, in 5 Tagen = $t$, 250 Klaftern = $k$, von einer Schanze verfertigen; wie viel Mannschaft müßte angestellet werden, wenn man die ganze Länge der Schanze von 1000 Klaftern = $K$, in 2 Tagen = $T$ verfertigt haben will?

Benennet man nun die Anzahl der Mannschaft, welche diese $K$ Klaftern in $t$ Tagen zu Stande bringen würde, mit $\mathfrak{M}$, und die Anzahl der Mannschaft, welche diese Arbeit in $T$ Tagen verfertigt, mit $M$, so ist

$k : K = m : \mathfrak{M}$, denn je mehr Klafter, desto mehr Mann, und $T : t = \mathfrak{M} : M$, denn je mehr Tage, desto weniger Mann, folglich $kT : Kt = m : M$ (§. 190, III.)

und $M = \frac{mKt}{kT} = \frac{1000 . 100 . 5}{2 . 250} = 1000$ Mann.

Nähmlich das Verhältniß der Mannschaft ist dann erst dem zusammengesetzten Verhältnisse aus der Anzahl der Klaftern und der Anzahl der Tage gleich, wenn man vorher das Verhältniß der Tage umkehret.

Ingleichen eine Festung ist dergestalt mit Proviant versehen, daß solche 6000 Mann $= m$, durch 90 Tage $= t$, jedem Manne täglich 2 Pfund Brot $= p$ geben könne: nun aber werden 1000 Mann fortgeschickt, und die übrigen 5000 Mann $= M$ müssen durch 130 Tage $= T$ ernähret werden; wie viel Brot kann jedem Manne täglich verabreicht werden?

Benennen wir die Anzahl der Pfunde, die jedem Manne gegeben werden könnten, wenn sie mit dem Proviant nur $t$ Tage auskommen dürften, mit $\mathfrak{P}$, und die Anzahl der Pfunde, so man jedem Manne nur geben kann, da sie $T$ Tage auskommen müssen, mit $P$, so ist

$M : m = p : \mathfrak{P}$, denn je mehr Mannschaft, desto weniger Brot, und $T : t = \mathfrak{P} : P$, denn je mehr Tage, desto weniger Brot; folglich $MT : mt = p : P$ (vermöge §. 190, III.)

und $P = \frac{pmt}{MT} = \frac{2 . 6000 . 90}{5000 . 130} = \frac{2 . 6 . 9}{5 . 13} = 1\frac{43}{65}$ Pf.

$= 1$ Pf. 22 Loth beynahe.

Nähmlich die Menge des Brotes steht hier umgekehrt im zusammengesetzten Verhältnisse mit der Anzahl der Mannschaft, und mit der Zeit.

## §. 205.

Und nun läßt sich eine allgemeine Regel geben, wie jede, aus noch so viel geraden, und verkehrten Verhältnissen zusam-

mengesetzte Regel Detri, ganz einfach aufgelöset werden kann, und zwar auf folgende Art: Man schreibe alle Glieder des bekannten Falles nach was immer für einer Ordnung in einer Linie dahin; die Glieder des unbekannten Falles aber schreibe man so unter die vorigen, daß die gleichnahmigen Glieder untereinander zu stehen kommen, und dort, wo die gesuchte Zahl hintrifft, setze man das Zeichen $x$. Sodann prüfe man das Verhältniß der gesuchten Zahl $x$ zu jeder ungleichnahmigen Größe des einen Falles insbesondere (nach §. 193), ob das Verhältniß gerade, oder verkehrt sey; und schreibe die gleichnahmigen Größen paarweise so untereinander, daß bey den geraden Verhältnissen die Zahlen des bekannten Falles vorne, bey den verkehrten Verhältnissen aber hinten rechts zu stehen kommen; auf diese Art verhält sich sodann das Product aller ersten Glieder zum Producte aller zweyten, wie die zur gesuchten gleichnahmige Zahl sich zu $x$ verhält; und weil in jeder Proportion das Product der äußern dem Producte der mittlern Glieder gleich ist, so kann man die unbekannte Größe $x$, und ihre gleichnahmige Zahl gleich anfänglich so ansetzen, daß $x$ vorne zu stehen kömmt; auf diese Art muß das Product der vordern Glieder dem Producte der hintern Glieder gleich seyn, woraus sich dann die unbekannte Zahl $x$ durch die Division (§. 39, Grundsatz 1) finden läßt. Die Glieder der Verhältnisse können hier durch einen stehenden Strich von einander abgesondert werden, wo sodann öfters große Abkürzungen angebracht werden können, wenn man die Glieder rechts des Striches als Factoren des Zählers, und die Glieder links des Striches als Factoren des Nenners eines Bruches ansieht.

### Beyspiele.

Wenn 100 Mann in 3 Tagen einen Transcheegraben von 250 Klafter lang, 7 Schuh breit und 3 Schuh tief verfertigen; in wie viel Tagen werden 300 Mann eine Transchee von 600 Klafter lang, 8 Schuh breit und 4 Schuh tief verfertigen?

| Mann | Tage | Kl. lang | Sch. breit | Sch. tief |
|---|---|---|---|---|
| 100, | 3, | 250, | 7, | 3 |
| 300, | $x$, | 600, | 8, | 4 |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 3 | |
| 300 | 100 | je mehr Mann, desto weniger Tage, |
| 250 | 600 | je länger der Graben, desto mehr Tage, |
| 7 | 8 | je breiter der Graben, desto mehr Tage, |
| 3 | 4 | je tiefer der Graben, desto mehr Tage, |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | | |
| 5 | 12 | folglich $3 . 5 . 7 . x = 12 . 8 . 4$ |
| 7 | 8 | nähmlich $35\ x = 128$ |
| 3 | 4 | und $x = \frac{128}{35} = 3\frac{23}{35}$ Tage. |

2) Wenn 20 Weber in 8 Wochen, da sie wöchentlich 5 Tage, und täglich 10 Stunden arbeiten, 100 Stück Leinwand verfertigen, wo jedes Stück 30 Ellen lang, und $1\frac{1}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Stücke Leinwand werden 80 Weber in 15 Wochen, da sie wöchentlich 6 Tage, und täglich 12 Stunden arbeiten, verfertigen, wenn jedes Stück 40 Ellen lang, und 1 Elle breit seyn soll?

| Weber | Wochen | Tage | Stunden | Stück | Ell. l. | Ell. br. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20, | 8, | 5, | 10, | 100 | 30, | $1\frac{1}{4}$ |
| 80, | 15, | 6, | 12, | $x$, | 40, | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 100 | |
| 20 | 80 | je mehr Weber, desto mehr Stücke, |
| 8 | 15 | je mehr Wochen, desto mehr Stücke, |
| 5 | 6 | je mehr Tage, desto mehr Stücke, |
| 10 | 12 | je mehr Stunden, desto mehr Stücke, |
| 40 | 30 | je mehr Ellen im Stück, desto weniger Stücke, |
| 1 | $1\frac{1}{4}$ | je breiter die Leinwand, desto weniger Stücke, |

| | |
|---|---|
| $x$ | 100 |
| | 4 |
| 8 | 3 |
| | 3 |
| 5 | 12 |
| 4 | 3 |
| 4 | 5 |

ferner, folglich

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 100 | $2 . 4 . x = 3 . 3 . 3 . 3 . 100$ |
| 2 | 3 | |
| | 3 | nähmlich $8\ x = 8100$ |
| | 3 | |
| 4 | 3 | und $x = \frac{8100}{8} = 1012\frac{1}{2}$ Stücke. |

Anmerkung. Diese gegebene Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri, wodurch nun alle von §. 200 bis 204 vorgelegte Rechnungsfragen sehr geschwind und leicht zu beantworten sind, ist dem wesentlichen nach die sogenannte Reesische Regel, welche in manchen Büchern auf verschiedene Arten vorgetragen wird.

§. 206.

Die zusammengesetzte Regel Detri findet auch ihre Anwendung, wenn das Verhältniß zweyer Größen nicht unmittelbar bekannt, sondern erst durch bekannte Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß. Z. B. es würde gefragt, wie verhält sich der wiener Fuß zum berliner, wenn es bekannt ist, daß sich der wiener zum pariser Fuß wie 1401 : 1440; der pariser zum turiner wie 720 : 1139; der turiner zum londner wie 2277 : 1351; und der londner zum berliner wie 6756 : 6866 verhält?

Benennen wir einen wiener Fuß mit $W$, einen pariser mit $P$, einen turiner mit $T$, einen londner mit $L$, und einen berliner mit $B$

so ist $W : P = 1401 : 1440$; nähmlich $1440\ W = 1401\ P$

$= P : T = 720 : 1139 = 1139\ P = 720\ T$

$= T : L = 2277 : 1351 = 1351\ T = 2277\ L$

$= L : B = 6756 : 6866 = 6866\ L = 6756\ B$

folglich auch (vermöge §. 29, Grundsatz 1.)

$1440\ W. 1139\ P. 1351\ T. 6866\ L = 1401\ P. 720\ T. 2277\ L. 6756\ B.$

oder $1139 . 1351 . 3433\ W = 1401 . 2277 . 1689\ B.$ und $W : B = 1401 . 2277 . 1689 : 1139 . 1351 . 3433$ endlich $W : B = 51 : 50$; wenn man das Verhältniß (nach §. 111) abkürzet.

Dieses ist eigentlich der Grund der so berühmten Kettenregel, der sich die Kaufleute bey der Vergleichung der Gewichte, Maße und Münzen, wie auch bey Wechselreductionen u. dgl., mit Vortheil bedienen. Wir wollen den Gebrauch derselben gleich durch ein Beyspiel erläutern.

Wenn ein Stück holländisches Tuch von 30 brabanter Ellen 260 holländische Gulden kostet, und ein holländischer Gulden = 20 Stüver, 104 Stüver = 1 holländer Ducaten, 1 holländer Ducaten = 4 Fl. 28 Kr. wiener Courrant ist; wie viel kostet

eine wiener Elle von diesem Tuch, da 89 wiener Ellen = 100 brabanter Ellen sind?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | Fl. w. Cour. | 1 | wien. Elle | $x$ | |
| 89 | w. Ellen | 100 | brab. Ellen | 89 | 100 |
| | | | | 3 | 26 |
| 30 | brab. Ellen | 260 | holl. Fl. | 26 | 5 |
| 1 | holl. Fl. | 20 | Stüver | 60 | 268 |
| | | | | | |
| 104 | Stüver | 1 | holl. Duc. | $x$ | |
| | | | | 89 | 100 |
| 1 | holl. Ducaten | $4\frac{28}{60}$ | wien. Cour. | 3 | |
| | | | | 12 | 268 |

ferner $89 . 3 . 3\ x = 67 . 100$, nähmlich $801\ x = 6700$; und endlich $x = 6700 : 801 = 8$ Fl. $21\frac{3}{4}$ Kr.

Der Ansatz ist folgender: Man fängt bey der unbekannten Zahl an, und setzt solche oben an, und neben ihr rechts setzt man die Fragezahl; sodann kömmt links diejenige Zahl, welche mit der Fragezahl gleichen Nahmen hat; und rechts neben ihr setze man die Zahl, welche in der Angabe mit ihr einerley Werth hat; ferner wird wieder zur linken jene Zahl gesezt, die mit der letztgeschriebenen gleichnahmig ist, und neben ihr zur rechten jene, welche mit ihr einerley Werth hat; und so weiter bis man endlich rechts eine Zahl erhält, die mit der unbekannten einerley Nahmen führet. Übrigens wird wie bey der Reesischen Regel (im §. 205) verfahren.

---

# V. Abschnitt.

## Von der Gesellschaftsrechnung.

### §. 207.

**Wenn ein Ganzes in mehrere ungleiche Theile getheilt werden soll, die ein bestimmtes Verhältniß untereinander haben**

müssen, so wird die Art, wie dieses geschieht, die Gesellschaftsrechnung genannt; vermuthlich, weil sie auch bey Handlungsgesellschaften angewendet wird, um den Gewinn und Verlust der einzelnen Personen nach einem bestimmten Verhältnisse zu berechnen. Z. B. Drey Kaufleute treten in eine Handlungscompagnie; der erste legt zur Handlung 4000 Fl. der zweyte 6400, der dritte 5600; sie gewinnen mit dieser ganzen Einlage 12000 Fl.; wie wiel gebührt nun einem jeden von ihnen?

Hier ist es klar, daß der ganze Gewinn verhältnißmäßig nach den Einlagen getheilt werden muß, nähmlich, daß sich die Einlage eines jeden eben so verhalten muß zu seinem Gewinn, wie die Einlage eines andern sich zu seinem Gewinn verhält.

Benennen wir daher der Kürze halber, 4000 Fl. mit $a$, 6400 Fl. mit $b$, 5600 mit $c$, und den ganzen Gewinn mit $g$; und überdieß den noch unbekannten Gewinn des ersten mit $x$, den Gewinn des zweyten mit $y$, und den Gewinn des dritten mit $z$ so ist

$a : x = b : y = c : z$, und daher (nach §. 191).

$(a + b + c) : (x + y + z) = a : x = b : y = c : z$.

Es ist aber $a + b + c$ die sämmtliche Einlage, und $x + y + z$ der sämmtliche Gewinn $= g$, (weil alle drey Gewinnste zusammen den ganzen Gewinn ausmachen müssen); folglich verhält sich die ganze Einlage zum ganzen Gewinn, gleichwie eines jeden seine einzelne Einlage sich zu seinem einzelnen Gewinn verhält.

Setzen wir nun wieder statt der Buchstaben $a$, $b$, $c$, $g$ ihre Werthe, so ist

16000 : 12000 = 4000 : $x$ = 3000 Fl. der Gew. d. 1ten
= : = = 6400 : $y$ = 4800 Fl. der Gew. d. 2ten
= : = = 5600 : $z$ = 4200 Fl. der Gew. d. 3ten

Und eben so könnte man verfahren, wenn mehrere Personen in der Gesellschaft wären.

Diese nähmliche Auflösung kann auch angewendet werden, wenn eine Mischung von verschiedenen Ingredienzen gemacht werden soll, wo die Verhältnisse der Ingredienzen gegen einander bekannt sind. Z. B. zu einem guten Schießpulver gehören

16 Theile Salpeter, 2 Theile Schwefel, und 3 Theile Kohlen; und es sollen 600 Centner von diesem Pulver verfertiget werden; wie viel soll nun von jedem insbesondere genommen werden?

Weil nun bey jeder Menge Pulver die Menge Salpeter, die Menge Schwefel, und die Menge Kohlen sich gegen einander verhalten müssen wie 16 : 2 : 3 :, so ist auch hier

$(16 + 2 + 3) : 600 = 16 : x = 457\frac{1}{7}$ Cent. Salpeter;
$= : = = 2 : x = 57\frac{1}{7}$ Cent. Schwefel;
$= : = = 3 : x = 85\frac{5}{7}$ Cent. Kohlen.

Ingleichen: zu einem Feuerballensatze nimmt man 1 Pf. Wachs, 24 Pf. Salpeter, 9 Pf. Schwefel, 4 Pf. Spießglas, 4 Pf. Sägespäne, und 1 Pfund Pulver. Nun sollen 4000 Pf. von diesem Satze verfertigt werden: wie viel muß von jedem genommen werden?

$43 : 4000 = 1 : x = 93\frac{1}{43}$ Pf. Wachs
$= : = = 24 : x = 2232\frac{4}{43}$ Pf. Salpeter
$= : = = 9 . x = 837\frac{2}{43}$ Pf. Schwefel
$= : = = 4 : x = 372\frac{4}{43}$ Pf. Spießglas
$= : = = 4 : x = 372\frac{4}{43}$ Pf. Sägespäne
$= : = = 1 : x = 93\frac{1}{43}$ Pf. Pulver.

## §. 208.

Es können bey einer Gesellschaftsrechnung nicht nur die Einlagen, sondern auch die Zeiten, durch welche jeder sein Geld in der Handlung liegen läßt, verschieden seyn. Z. B. zwey Personen treten in eine Handlung; der erste legt 6500 Fl. $= E$, und läßt dieses Geld durch 6 Monathe $= Z$ in der Handlung liegen; der andere aber legt 5400 Fl. $= e$, und läßt dieses Geld durch 5 Monathe $= z$ in der Handlung liegen; und sie gewinnen damit 12000 fl. $= a$. Wie viel soll nun jeder bekommen?

Hier müssen sich die Gewinnste so gegen einander verhalten, wie die Producte aus den Einlagen in die Zeiten; nähmlich der Gewinn steht mit der Einlage und der Zeit im zusammengesetzten Verhältnisse (§. 203); weil der Gewinn mit der Einlage insbesondere im geraden, und mit der Zeit insbesondere ebenfalls im geraden Verhältnisse steht. Benennen wir daher den Gewinn

des ersten mit $G$, und den Gewinn des andern mit $g$, so ist

$G : g = E . Z : e . z$;

daher $(EZ + ez) : EZ = (G + g) : G$
und $(EZ + ez) : ez = (G + g) : g$ } §. 187, III.

oder $(EZ + ez) : (G + g) = EZ : G$
$= \quad : \quad = ez : g$ } §. 187, I.

Es ist aber $G + g = a$ der sämmtliche Gewinn; folglich verhält sich hier die Summe der Producte aus den Einlagen in die Zeiten zum ganzen Gewinn, gleichwie jedes einzelne Product zum betreffenden Gewinn.

Setzen wir in unserm Beyspiele statt $E$, $e$, $Z$, $z$, ihre Werthe, so ist

$6 . 6500 + 5 . 5400 : 12000 = 6 . 6500 : G = 7090\frac{10}{11}$ Fl.
$= \quad = + = \quad = : \quad = = 5 . 5400 : g = 4909\frac{1}{11}$ Fl.

Es ist übrigens leicht einzusehen, daß dieses auch Statt findet, wenn mehrere Personen unter diesen Umständen in Gesellschaft wären.

Anmerkung. Wir übergehen hier mit Stillschweigen alle noch übrige, in den practischen Rechenbüchern vorfindige Rechnungsregeln, als Regula Alligationis, Falsi, Coeci u. dgl., weil dergleichen Rechnungsfragen durch die Analysis ungemein faßlicher und kürzer, als hier noch geschehen kann, aufgelöset werden können, wie es in der Folge zu ersehen seyn wird.

# Fünfte Vorlesung.

## Von den Gleichungen des ersten und zweyten Grades, nebst deren Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

### I. Abschnitt.

### Von den Gleichungen und ihrer Auflösung.

§. 209.

Eine jede algebraische Größe kann auf eine mannigfaltige Art ausgedrückt, oder vorgestellt werden; z. B. die Größe $6a$ kann durch $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a$, oder durch $4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$ u. s. w. vorgestellt werden; und es ist $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a = 4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$.

Eben so ist $6ab + \frac{20}{4} - \frac{14ab}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{28ab}{3} - \frac{40}{7} - 4ab + \frac{180}{7}\right)$ weil jedes nach vorgenommener Reduction die Größe $5 + \frac{4ab}{3}$ zum Vorschein bringt. Eine solche Bezeichnung, wodurch eine nähmliche Größe auf eine doppelte Art ausgedruckt wird, z. B. $9a + \sqrt{\frac{12a^2}{3}} - 5a = 4 \cdot 9a - \frac{90a}{3}$, nennt man eine Gleichung. Die Größen, zwischen welchen das Gleichheitszeichen stehet, nennt man Theile der Gleichung; und jene Größen, die auf einer oder der andern Seite des Gleichheitszeichens mit den Zeichen + oder — verbunden sind, heißen Glieder der Gleichung. Im letzt angeführten Beyspiele bestehet

der eine Theil der Gleichung aus 3, und der andere aus 2 Gliedern.

§. 210.

Solche Gleichungen, deren Richtigkeit durch einen bloßen Anblick, oder durch die Reduction der Glieder gleich in die Augen fällt, ohne in Erwägung zu ziehen, was für Werthe die darinnen vorkommenden Buchstaben haben, oder wie solche von einander abhängen müssen, werden identische Gleichungen genannt. Zuweilen aber ist es aus andern Umständen bekannt, daß zwey algebraische Ausdrücke einander gleich seyn müssen, ohne daß beyde die nähmlichen Buchstaben führen, wo sodann die Gleichheit der zwey algebraischen Ausdrücke auch keineswegs durch eine bloße Reduction der Glieder, ohne auf ihren Werth zu sehen, offenbar werden kann. Z. B. das Gewicht einer Kugelpatrone sey $a$ Pf.; die dazu gehörige Kugel wiege $b$ Pf: das Pulver hierzu sey $c$ Pf., und der Sack sammt Bindfaden wiege $d$ Pf; so ist offenbar, daß $a = b + c + d$ seyn muß, welches nicht durch einen bloßen Anblick der Gleichung, sondern erst aus der Bedeutung der Buchstaben $a$, $b$, $c$ und $d$ folget. Eine solche Bezeichnung, wo zwey auf verschiedene Art ausgedrückte algebraische Größen einander gleich sind, in so fern man den darinnen vorkommenden Buchstaben gewisse Werthe beyleget, heißt eine wirkliche algebraische Gleichung. So ist bey den angeführten Umständen $a = b + c + d$ eine wirkliche algebraische Gleichung.

Eben so könnte auch $5a - \frac{4c}{5} = a + b + c$ eine wirkliche algebraische Gleichung seyn, in so fern man aus gewissen Umständen wüßte, daß die Größen $a$, $b$, $c$ so von einander abhängen, daß diese Gleichung Statt haben muß.

§. 211.

Die vorzüglichsten Eigenschaften der Gleichungen sind folgende:

1) In jeder Gleichung kann man jedes Glied aus einem Theile der Gleichung hinwegschaffen,

wenn man solches in den andern Theil der Gleichung mit verändertem Zeichen $\pm$ überträgt. Z. B. in der Gleichung $4a - 5b = m + c$ kann das Glied $-5b$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens geschafft werden, da man setzt $4a = m + c + 5b$, und so auch $4a - m = c + 5b$; (vermöge §. 16 und 22, Grundsatz 1).

2) Wenn man alle Glieder der Gleichung mit einer nähmlichen Größe multipliciret oder dividiret, so bleibt die Gleichung noch richtig, (vermöge §. 29 und 39, Grundsatz 1). Man kann demnach in einer Gleichung jeden beliebigen Nenner eines Gliedes hinwegschaffen, wenn man alle Glieder der Gleichung mit diesem Nenner multipliciret, und auch kann man was immer für ein Glied von seinem Coefficienten befreyen, wenn man alle Glieder der Gleichung durch diesen Coefficienten dividiret. Es sey z. B. $\frac{5ab}{c} - bc = a + 3c$ eine Gleichung; man soll darin das erste Glied $\frac{5ab}{c}$ vom Nenner $c$, und von dem numerischen Coefficienten 5 befreyen, so ist $ab - \frac{bc^2}{5} = \frac{ac + 3c^2}{5}$; indem man alle Glieder mit $c$ multipliciret und durch 5 dividiret.

Aus diesem erhellet auch, daß eine Gleichung noch richtig verbleibe, wenn man die Zeichen aller Glieder verändert, weil man sich vorstellen kann, man habe die ganze Gleichung mit $-1$ multipliciret; wenn also $ab - bc = c + d$ ist, so ist auch $bc - ab = -c - d$.

3) Eben so bleibt die Gleichung auch noch richtig, wenn man beyde Theile zur gleichen Potenz erhebet, oder aus beyden Theilen gleiche Wurzeln ziehet, (vermöge §. 137, Grundsatz 1 und 2). Dadurch sind wir im Stande, jedes Glied in einer Gleichung von seinem Exponenten, oder von einem Wurzelzeichen zu befreyen. Z. B. in der Gleichung $a + \frac{5b^3}{4} = c$ soll $b$ vom Coefficienten, Nenner und Exponenten befreyet werden; so ist

$\frac{5b^3}{4} = c - a$ nach Nr. 1; und $5b^3 = 4c - 4a$, und auch $b^3 = \frac{4c-4a}{5}$ (verm. Nr. 2); und endlich $b = \sqrt[3]{\frac{4c-4a}{5}}$. Eben so soll in der Gleichung $\frac{a}{2} - \sqrt{bc} = c$ das Glied $\sqrt{bc}$ vom Wurzelzeichen befreyet werden; so ist $-\sqrt{bc} = c - \frac{a}{2}$, und $(-\sqrt{bc})^2 = \left(c - \frac{a}{2}\right)^2$; nähmlich $bc = c^2 - ac + \frac{a^2}{4}$.

## §. 212.

Eine Größe aus einer vorgelegten Gleichung finden, oder vielmehr den Werth einer Größe aus einer vorgelegten Gleichung bestimmen, heißt diese Größe durch die andern in der Gleichung vorkommenden Größen so ausdrücken, daß, wenn man diesen gefundenen Ausdruck, statt der Größe in der vorgelegten Gleichung substituiret, eine identische Gleichung zum Vorschein komme. Z. B. aus der Gleichung $a + \frac{4b}{3} = ac - 5$ den Werth von $b$ finden, heißt $b$ durch $a$ und $c$ so ausdrücken, daß, wenn man den gefundenen Werth von $b$ in dieser Gleichung substituiret, eine identische Gleichung zum Vorschein komme.

Dieser Werth ist $b = \frac{3ac - 15 - 3a}{4}$; man erhält ihn, wenn man (nach §. 211) trachtet $b$ ganz allein auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und zwar positiv zu erhalten, und es vom Coefficienten, vom Nenner und von dem etwa noch vorfindigen Exponenten befreyet, welches sich allzeit thun läßt, wenn nur $b$ nicht in der Gleichung mit zwey verschiedenen Exponenten erscheint, wie es weiter folgen wird. Wäre nun in der vorgelegten Gleichung $a$ und $c$ in Zahlen bekannt, z. B. $a = 7$, $c = 4$, und von $b$ wüßte man nur aus gewissen Umständen, $b$ hänge von $a$ und $c$ so ab, daß die angeführte Gleichung $a + \frac{4b}{3} = ac - 5$ Statt finden müsse, ohne noch eigentlich zu wissen, was $b$ in Zahlen gelte, so ist durch diese Operation auch $b$ in Zahlen bestimmt, wenn man in dem gefundenen Werthe von $b$

$= \frac{3ac - 15 - 3a}{4}$ statt $a$ und $c$ ihre Werthe 7, und 4 substituirt; es ist alsdann $b = \frac{3 \cdot 7 \cdot 4 - 15 - 3 \cdot 7}{4} = 12$. In solchen Fällen wird $b$ die unbekannte Größe genannt, und die Operation, selbe zu finden, heißt die Gleichung auflösen.

§. 213.

Wenn die Größe, welche aus einer Gleichung bestimmet werden soll, nur in der ersten Potenz erscheinet, so wird die Gleichung eine einfache, oder eine Gleichung vom ersten Grade genannt; befindet sich aber die zu bestimmende Größe in einer höhern Potenz, so heißt die Gleichung eine höhere Gleichung, und zwar eine quadratische, oder eine Gleichung vom $2^{ten}$ Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe $= 2$ ist; eine cubische, oder eine Gleichung vom dritten Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe $= 3$; eine Gleichung vom $4^{ten}$, $5^{ten}$, $6^{ten}$ Grade, wenn der höchste Exponent der zu bestimmenden Größe $= 4, 5, 6$ ist u. s. w. So ist die Gleichung $3a^2b - c^3 = 4b + ac^3 + c$ eine Gleichung vom ersten Grade, wenn $b$ daraus zu bestimmen wäre; eine quadratische Gleichung, wenn $a$, und eine cubische Gleichung, wenn $c$ daraus zu bestimmen wäre.

Eine höhere Gleichung heißt rein, oder eine reine höhere Gleichung, wenn die zu bestimmende Größe nur in einer einzigen Potenz in der Gleichung erscheinet. Befindet sich aber die zu bestimmende Größe in der Gleichung zu verschiedenen Potenzen erhoben, so ist solche eine verwickelte höhere Gleichung. So ist die Gleichung $a^3b - a^3 = 4b^2$ eine reine cubische Gleichung, wenn $a$ daraus zu bestimmen ist; wäre hingegen $b$ daraus zu suchen, so ist solche eine verwickelte quadratische Gleichung; weil $a$, obwohl in zwey Gliedern, doch nur in eben derselben Potenz, $b$ hingegen in der zweyten und ersten Potenz, in der Gleichung erscheinet.

§. 214.

Wie aus einer einfachen, oder auch aus einer reinen, höhern

Gleichung die unbekannte Größe gefunden wird, ist bereits (im §. 212) gesagt worden; nur kömmt noch zu erinnern, daß, wenn die zu bestimmende Größe in mehreren Gliedern erscheint, alle Glieder, worin sich solche befindet, auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und die übrigen auf die andere Seite geschafft werden müssen, (nach §. 211); sodann zerlege man sie in Factoren, und befreye endlich die zu suchende Größe von ihrem zusammengesetzten Factor (nach §. 39, Grundsatz 1) Z. B.

Aus der Gleichung $2ab = b - ac + d$ soll $a$ gefunden werden; so ist $2ab + ac = b + d$ (nach §. 211, Nr. 1). und $a(2b + c) = b + d$ durch Zerlegung in Factoren, und endlich $a = \frac{b + d}{2b + c}$. (§. 211, Nr. 2.)

Noch einige Beyspiele zur Übung.

Aus der Gleichung $a^2bc - cd + 5 = d - 2c$ soll $c$ gefunden werden; so ist $a^2bc - cd + 2c = d - 5$ durch Übertragung der Glieder, und $c(a^2b - d + 2) = d - 5$ durch Zerlegung in Factoren, endlich $c = \frac{d - 5}{a^2b - d + 2}$ durch die Division.

Aus $ax + bc = dc + x$ soll $x$ gefunden werden; so ist $ax - x = dc - bc$ durch Übertragung der Glieder, und $x(a - 1) = c(d - b)$ durch Zerlegung in Factoren, endlich $x = \frac{c(d - b)}{a - 1}$ durch die Division.

Aus $\frac{ab}{y} = bc + d + \frac{1}{y}$ soll $y$ gefunden werden; so ist $ab = bcy + dy + 1$ durch die Multiplication mit $y$, und $ab - 1 = y(bc + d)$ durch die Zerlegung in Factoren, endlich $y = \frac{ab - 1}{bc + d}$ durch die Division.

Aus $a^2 - x^2 = \frac{ab + bx}{c}$ ist $x$ zu suchen; so ist $(a + x).(a - x) = \frac{b(a + x)}{c}$ durch Zerlegung in Factoren, und $a - x = \frac{b}{c}$ durch die Division mit $(a + x)$, endlich $x = a - \frac{b}{c}$ durch Übertragung der Glieder.

Aus $az^2 - bc + 1 = 35 + bz^2$ ist $z$ zu suchen; so ist $az^2 - bz^2 = 35 + bc - 1$ durch Übertragung der Glieder, und $z^2(a - b) = 34 + bc$ durch Zerlegung in Factoren, sodann $z^2 = \frac{34 + bc}{a - b}$ durch die Division, endlich $z = \sqrt{\frac{34 + bc}{a - b}}$ durch Ausziehung der Wurzeln.

Aus $ax^m + b = bx^m + 18 - x^m$ soll $x$ gefunden werden; so ist $ax^m - bx^m + x^m = 18 - b$ durch Übertragung der Glieder, sodann $x^m(a - b + 1) = 18 - b$ durch Zerlegung in Factoren, ferner $x^m = \frac{18 - b}{a - b + 1}$ durch die Division, endlich $x = \sqrt[m]{\frac{18 - b}{a - b + 1}}$ durch Ausziehung der Wurzeln.

## §. 215.

Wäre aber aus einer verwickelten quadratischen Gleichung die unbekannte Größe zu finden, so ordne man die Gleichung so, daß die unbekannte Größe der zweyten Potenz mit dem positiven Zeichen, ohne Nenner und Coefficienten, und neben ihr die unbekannte Größe in der ersten Potenz (die was immer für Zeichen, Coefficienten und Nenner haben kann) auf eine Seite des Gleichheitszeichens, und alle übrigen Glieder, worin sich die unbekannte Größe nicht mehr befindet, auf die andere Seite zu stehen kommen. Z. B. wenn aus der Gleichung $ab - bx = d - ax^2$ die Größe $x$ zu suchen wäre, so kann die Gleichung (nach §. 211, Nr. 1 und 2) also geordnet werden $x^2 - \frac{bx}{a} = \frac{d - ab}{a}$.

Eben so kann die Gleichung $bx - ax^2 + d = cx - dx^2 + b$, wenn $x$ daraus bestimmet werden soll, also geordnet werden: $dx^2 - ax^2 + bx - cx = b - d$ und $x^2(d - a) + (b - c).x = b - d$ endlich $x^2 + \left(\frac{b - c}{d - a}\right).x = \frac{b - d}{d - a}$.

Man sieht aus diesem, daß jede verwickelte quadratische Gleichung sich auf diese Formel bringen läßt: $x^2 + Ax = B$; wo $x$ die zu suchende Größe, $A$ und $B$ aber jede zusammen-

gesetzte positive oder negative Größe vorstellen könne, worin sich $x$ nicht mehr befindet. Betrachtet man nun diese Formel, so sieht man alsogleich, daß der erste Theil der Gleichung ein vollkommenes Quadrat von $(x + \frac{1}{2}A)$ wäre, wenn er noch das Quadrat dieses 2ten Gliedes $(\frac{1}{2}A)^2$ enthielte, und daß man sodann durch Ausziehung der Quadratwurzel die Gleichung auf eine einfache reduciren könnte. Man addire demnach bey einer nach der angeführten Art geordneten verwickelten quadratischen Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten der unbekannten Größe in der ersten Potenz, zu beyden Theilen der Gleichung, und ziehe sodann beyderseits die Quadratwurzel aus; so ist die Gleichung auf eine einfache gebracht, wo sich sodann die gesuchte Größe finden läßt. Die allgemeine Formel für jede geordnete quadratische Gleichung

ist $x^2 + Ax = B$
addirt $(\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{4}A^2$
also $x^2 + Ax + (\frac{1}{2}A)^2 = \frac{1}{4}A^2 + B$
und $\sqrt{[x^2 + Ax + (\frac{1}{2}A)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$
nähmlich $x + \frac{1}{2}A = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$
endlich $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + B)}$.

Daß das Zeichen $\pm$ gesetzt werden müsse, erhellet daraus, weil sowohl eine positive, als negative Wurzel ein positives Quadrat gibt. Welches Zeichen von beyden aber bey der Entwicklung genommen werden soll, müssen andere Umstände entscheiden, wie es weiterhin bey der Auflösung der Aufgaben gezeigt werden wird.

## Beyspiele.

Aus der Gleichung $3x^2 - 144 = 6x$ soll $x$ gefunden werden; so ist
$3x^2 - 6x = 144$ (nach §. 211, Nr. 1).
$x^2 - 2x = 48$ durch die Division,
$x^2 - 2x + 1 = 48 + 1$ wenn man das Quadrat ergänzt,
$x - 1 = \sqrt{(48 + 1)} = 7$ wenn man beyderseits die Wurzel zieht,
$x = 1 + 7 = 8$.

Aus der Gleichung $4ax - bx^2 = bx - c$ soll $x$ gefunden werden; so ist

$-bx^2 + 4ax - bx = -c$ durch Übertragung der Glieder,

$bx^2 + bx - 4ax = c$ durch die Multiplication mit $-1$,

$bx^2 + (b - 4a)\,x = c$ durch Zerlegung in Factoren,

$x^2 + \left(\frac{b-4a}{b}\right) x = \frac{c}{b}$ durch die Division mit $b$,

$x^2 + \left(\frac{b-4a}{b}\right) x + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2 = \frac{c}{b} + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2$ Erg. d. Q.

$x + \frac{b-4a}{2b} = \pm\sqrt{\left\{\frac{c}{b} + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2\right\}}$ durch Ausz. der W.

$x = \frac{4a-b}{2b} \pm \sqrt{\left\{\frac{c}{b} + \left(\frac{b-4a}{2b}\right)^2\right\}}$ durch Übertr. d. Glied.

Aus der Gleichung $ay^2 - by - c = cy^2 - ay$ soll $y$ gefunden werden; so ist

$ay^2 - cy^2 + ay - by = c$ durch Übertragung der Glieder,

$y^2\,(a - c) + y\,(a - b) = c$ durch Zerleg. in Factoren,

$y^2 + y\left(\frac{a-b}{a-c}\right) = \frac{c}{a-c}$ durch die Division,

$y^2 + y\left(\frac{a-b}{a-c}\right) + \left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 + \frac{c}{a-c}$ Erg. d. Q.

$y + \frac{a-b}{2a-2c} = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 + \frac{c}{a-c}\right\}}$ Ausz. der Wurzel.

$y = \frac{b-a}{2a-2c} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{a-b}{2a-2c}\right)^2 + \frac{c}{a-c}\right\}}$ übertr. der Glieder.

Es sey endlich aus der Gleichung $ax^{2m} = a^2b - cx^m$ die Größe $x$ zu finden; so ist

$ax^{2m} + cx^m = a^2\,b$ durch Übertragung der Glieder;

$x^{2m} + \frac{c}{a}\,x^m = ab$ durch die Division mit $a$;

$x^{2m} + \frac{c}{a}\,x^m + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 = ab + \left(\frac{c}{2a}\right)^2$ Erg. des Quad.

$x^m + \frac{c}{2a} = \pm\sqrt{\left(ab + \frac{c^2}{4a^2}\right)}$, Ausz. der Quadratwurzel.

$x^m = -\frac{c}{2a} \pm \sqrt{\left(ab + \frac{c^2}{4a^2}\right)}$, Übertragung der Glieder,

$x = \sqrt[m]{\left\{-\frac{c}{2a} \pm \sqrt{\left(ab + \frac{c^2}{4a^2}\right)}\right\}}$ Ausz. der *m*ten Wurzel.

Man sieht aus diesem letzten Beyspiele, daß alle höheren Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe nur in zwey Potenzen erscheinet, und zwar so, daß der eine Exponent der Hälfte des andern gleich ist; als quadratische Gleichungen behandelt werden können.

Wie aus den übrigen verwickelten höheren Gleichungen die unbekannten Größen gefunden werden können, wird weiter unten in der 7ten Vorlesung gezeiget werden.

---

# II. Abschnitt.

## Von den algebraischen Aufgaben, und ihrer Auflösung.

### §. 216.

Eine algebraische Aufgabe ist das Verlangen aus einigen schon bekannten Größen, andere unbekannte, die unter gewissen Bedingungen von jenen abhängen müssen, durch die Rechnung zu finden. Z. B. das Verlangen, eine Zahl zu finden, die um ihre eigene Hälfte vermehrt, die Zahl 12 zum Vorschein bringt, ist eine Aufgabe, worin die Zahl 12 bekannt, und die andere von der verlangten Eigenschaft erst gesucht werden muß. Ingleichen, zwey Zahlen zu finden, die zusammen addiret die Summe 17, und von einander abgezogen, die Differenz 7 zum Vorschein bringen, ist eine Aufgabe, worin zwey Zahlen 17 und 7 bekannt sind, und die andern zwey gefunden werden sollen. Erstere heißt eine Aufgabe mit einer unbekannten Größe, weil nur nach einer Größe gefragt wird; die andere aber ist eine Aufgabe mit 2 unbekannten Größen, weil zwey

Zahlen gefunden werden sollen. Überhaupt heißt es eine Aufgabe mit 1, 2, 3, 4.. unbekannten Größen, wenn in der Aufgabe nach 1, 2, 3, 4.. unbekannten Größen, die in keinem deutlichen Zusammenhange mit einander stehen, gefragt wird.

§. 217.

Eine Aufgabe heißt bestimmt, wenn nur ein einziger Werth für jede zu suchende Größe gefunden werden kann, welcher den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet; können aber deren mehrere gefunden werden, welche die verlangten Eigenschaften haben, so ist es eine unbestimmte Aufgabe. So z. B. sind beyde obenangeführte Aufgaben bestimmt; denn in der ersten kann die gesuchte Zahl nur 8 seyn; und in der andern sind die Werthe der gesuchten Größe nur 12 und 5, weil außer diesen keine andern von der verlangten Eigenschaft gefunden werden können. Hingegen ist folgende Aufgabe: Zwey Zahlen zu finden, die mit einander multiplicirt das Product 12 zum Vorschein bringen, eine unbestimmte Aufgabe, weil verschiedene Zahlen diese Eigenschaft haben, als 3.4, 2.6, 1.12, 24.$\frac{1}{2}$, und so unendlich viele Brüche. Eine Aufgabe hingegen, wo gar kein möglicher Werth gefunden werden kann, welcher der Aufgabe Genüge leistet, heißt eine unmögliche Aufgabe.

§. 218.

Um eine algebraische Aufgabe aufzulösen, pflegt man die Größen, die noch unbekannt sind, mit den letzten Buchstaben des Alphabets $z, y, x, \ldots$ und öfters auch, um die Auflösung allgemein zu machen, die schon bekannten Zahlen mit $a, b, c, \ldots$ zu bezeichnen; sodann ist es nothwendig, daß man die Bedingungen, wie die unbekannten Größen von den bekannten abhängen müssen, wohl überlege, und selbe durch Gleichungen auszudrücken suche, wo hernach die unbekannten Größen aus den Gleichungen leicht nach vorhergehenden §§. zu entwickeln sind. Wie aber aus den gegebenen Bedingungen der Aufgabe, oder aus dem Zusammenhange, den die bekannten und unbekannten Größen untereinander haben müssen, die Gleichungen zu formiren sind, läßt sich gar keine allgemeine Regel geben; es wird

hierzu ein gewisser Grad von Scharfsinn erfordert, den man durch eine fleißige Übung sehr verbessern kann. Es wird aber sehr dienlich seyn, die Auflösung verschiedener Arten von Aufgaben hier aus einander zu setzen, wodurch ein fleißiger Anfänger in den Stand gesetzt wird, verschiedene dergleichen, und auch andere vorkommende Aufgaben geschickt aufzulösen.

### Auflösung der Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

§. 219.

1. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die mit ihrer eigenen Hälfte vermehrt, 12 zur Summe bringt.

Auflösung. Die gesuchte Zahl sey $= x$

so ist die Hälfte $= \frac{x}{2}$

also muß $x + \frac{x}{2} = 12$ seyn, laut Bedingung, woraus $x = 8$ folgt (§. 212).

2. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, daß man, wenn man selbe durch 3 dividiret, eben so viel erhalte, als wenn man 30 von ihr abgezogen hätte.

Auflösung. Die Zahl sey $= x$ diese durch 3 dividirt gibt $\frac{x}{3}$; ziehet man aber von ihr 30 ab, so hat man $x - 30$; also ist $\frac{x}{3} = x - 30$ laut Bedingung; daraus findet man $x = 45$ (nach §. 212).

3. Aufgabe. Es wurde Jemand um seine monathliche Einnahme befragt, und er antwortete: Die Hälfte, das Drittel und das Viertel zusammengenommen, übersteigt die Einnahme selbst um 2 Fl. Wie viel hatte er monathliche Einnahme?

Auflösung. Die monathliche Einnahme sey $= x$ Fl., so ist die Hälfte $\frac{x}{2}$, das Drittel $\frac{x}{3}$, und das Viertel $\frac{x}{4}$, zusammen $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$.

Da dieses um 2 Fl. größer seyn soll, als die ganze Einnahme $x$, so ziehe man 2 davon ab, so wird der Rest der ganzen Einnahme gleich seyn müssen; also ist $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 2 = x$ laut Bedingung; woraus $x = 24$ folgt (§. 212).

4. Aufgabe. Es wurde Jemand gefragt, wie alt er sey? Und er antwortete: Wäre ich noch einmahl so alt, als ich wirklich bin, so hätte ich eben so viel über 100 Jahre, als mir jetzt noch hiervon abgehen. Wie alt war dieser Mann?

Auflösung. Die Anzahl seiner Jahre sey $= x$; also gehen ihm von hundert noch ab $100 - x$; wäre er noch einmahl so alt, so hätte er $2x$; dann hätte er über 100 Jahre $2x - 100$; also ist $100 - x = 2x - 100$; woraus man findet $x = 66\frac{2}{3}$ Jahre.

5. Aufgabe. Ein Vater war bestürzt, daß er schon dreymahl so alt sey, als sein Sohn; doch tröstet er sich damit, daß er nach 20 Jahren nur noch einmahl so alt seyn werde, als sein Sohn. Wie alt war ein jeder von beyden?

Auflösung. Des Sohnes Alter sey $= x$ Jahre; so ist der Vater $3x$ Jahre alt; in 20 Jahren wird der Sohn $x + 20$, und der Vater $3x + 20$ Jahre alt seyn; da aber der Vater alsdann noch einmahl so alt als der Sohn seyn soll, so ist $3x + 20 = 2(x + 20)$, woraus $x = 20$ folgt; es ist daher der Sohn 20, und der Vater 60 Jahre alt.

6. Aufgabe. Ein Frauenzimmer wurde um ihr Alter befragt, und sie antwortete: Meine Mutter hat mich im 40sten Jahre ihres Alters geboren; wenn man nun meine Jahre mit den Jahren meiner Mutter multipliciret, so kommen die Jahre Mathusalems zum Vorschein, der 969 Jahre gelebt hat. Wie alt war jede?

Auflösung. Die Tochter sey $x$ Jahre alt; so ist die Mutter $x + 40$; folglich ist $x \cdot (x + 40) = 969$; woraus $x = -20 + \sqrt{1369} = 17$ (nach §. 215) gefunden wird.

7. Aufgabe. Es wurde Jemand von einigen armen Leuten um ein Almosen gebethen: er wollte jedem 5 Kr. geben, hatte aber um 3 Kr. zu wenig in seinem Beutel; darauf gab er jedem

nur 4 Kr. und da blieben ihm 2 Kr. übrig. Wie viel waren der armen Leute, und wie viel Kreuzer hatte der Mann?

Auflösung. Die Anzahl der Armen sey $= x$; hätte jeder 5 Kr. bekommen, so würde er $5x$ Kr. ausgetheilet haben; da ihm aber 3 Kr. davon fehlten, so war sein Geld $5x - 3$; ferner hat er jedem 4 Kr. gegeben; also hat er ausgetheilet $4x$ Kr., und es blieben ihm 2 Kr. übrig; folglich war sein Geld auch $= 4x + 2$.

Es ist demnach $5x - 3 = 4x + 2$; daraus folgt $x = 5 =$ der Anzahl der Armen, und $5x - 3 = 22 =$ seinem gehabten Gelde in Kreuzern.

8. Aufgabe. Es hat Jemand einen Bedienten gedungen, mit diesem Accord, daß er ihm jährlich eine Livree nebst 150 Fl. geben will: der Bediente blieb nur 8 Monathe im Dienst, und der Herr gab ihm, nebst der Livree, noch 86 Fl. Wie theuer ist die Livree gerechnet worden?

Auflösung. Die Livree koste $x$ Fl. so gebührte dem Bedienten auf ein ganzes Jahr 150 Fl. + $x$ Fl. laut Accord, und auf 8 Monathe $(150 + x).\frac{8}{12}$; denn 12 M. : 8 M. $= (150 + x) :$ $(150 + x) \times \frac{8}{12}$; und da er ihm nebst der Livree nur 86 Fl. gab, so muß $x + 86 = (150 + x).\frac{8}{12}$; woraus $x = 42$ Fl. folget.

9. Aufgabe. Einem Courier, der vor 3 Tagen fort ist, und täglich 10 Meilen macht, wird ein anderer nachgeschickt, der täglich 12 Meilen macht. In wie viel Tagen wird er den ersten einhohlen?

Auflösung. Um diese Aufgabe allgemeiner zu machen, sey die Anzahl der Tage, die der erste Courier voraus hat $= a$,
die Anzahl der Meilen, die er täglich macht $= b$,
die Anzahl der Meilen, die der zweyte macht $= c$,
die Anzahl der Tage, nach denen er den ersten einhohlet $= x$;
so hat der erste schon voraus $a \times b$ Meilen, und während den $x$ Tagen, macht er noch $b \times x$ Meilen; also ist sein ganzer Weg, bis ihn der zweyte einhohlet $= ab + bx$; der zweyte aber macht in $x$ Tagen $cx$ Meilen; und weil er den ersten eingehohlt haben soll, so ist $ab + bx = cx$, woraus $x = \frac{ab}{c - b}$ folgt.

In unserm Beyspiele ist $a = 3$, $b = 10$, $c = 12$, also $x = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$ Tage.

Nach dieser Formel können verschiedene Aufgaben aufgelöset werden. Z. B. es wurde Jemand gefragt, wie viel Uhr es sey; und er antwortete: Ich kann die Abtheilungen der Minuten nicht mehr genau unterscheiden; nur so viel bemerke ich, daß der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 7 und 8 Uhr decke. Wie viel Uhr war es wohl?

Hier ist in unserer Formel $a = 7$; weil um 7 Uhr der Stundenzeiger sich schon 7 Stunden lang von 12 hinweg bewegt hat, der Minutenzeiger aber um 7 Uhr genau auf 12 Uhr wies; $b = 1$, weil der Stundenzeiger in einer Stunde nur eine Stundenabtheilung zurücklegt; $c = 12$, weil der Minutenzeiger in jeder Stunde ganz herum lauft; also ist $x = \frac{7}{11}$ Stunden. Es war demnach $7\frac{7}{11}$ Uhr = 7 Uhr $38\frac{2}{11}$ Minuten.

Ingleichen, ein feindliches Corps ist vor 2 Tagen aufgebrochen, und macht täglich 3 Meilen: man will demselben nachsetzen, um es in 6 Tagen einzuhohlen; wie viel Meilen müssen täglich gemacht werden?

Hier ist in der Formel $a = 2$, $b = 3$, $x = 6$, woraus man findet $c = \frac{b(a+x)}{x} = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$ Meilen.

10. Aufgabe. Zwey Regimenter, welche $a = 80$ Meilen von einander entfernt sind, brachen zugleich auf, und marschiren gegen einander, um ihre Garnisonen zu verwechseln: das erste macht täglich $b = 4$ und das zweyte täglich $c = 3$ Meilen; in wie viel Tagen werden sie einander begegnen?

Auflösung. Die Anzahl der Tage sey $= x$; in dieser Zeit macht das erste Regiment $bx$ Meilen, und das zweyte $cx$ Meilen. Da sie aber einander begegnen, so haben beyde zusammen den ganzen Weg gemacht, folglich ist $bx + cx = a$, woraus $x = \frac{a}{b+c} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$ folget. Sie werden also einander den zwölften Tag begegnen.

**11. Aufgabe.** Vormahls mußte jeder Hauseigenthümer in der Stadt Wien jährlich das $7^{tel}$ seines Zinserträgnisses als Zinssteuer contribuiren; da er aber jetzt das $6^{tel}$ hiervon jährlich zahlen muß, wie viel muß er seine Inwohner steigern, damit er sein voriges Einkommen beybehalte?

Auflösung. Es sey der jährliche Ertrag eines Hauses $= a$ Fl. gewesen: hiervon hat er Zinssteuer entrichtet $\frac{a}{7}$ Fl., folglich ist ihm verblieben $\frac{6a}{7}$ Fl. Er steigert nun seine Inwohner um $x$ Fl.; so ist der Ertrag $a + x$: hiervon die Zinssteuer $\frac{a+x}{6}$; so verbleibt ihm $\frac{5a+5x}{6}$; und da er das nähmliche Einkommen behalten soll, so ist $\frac{6a}{7} = \frac{5a+5x}{6}$, woraus $x = \frac{a}{35}$ folgt. Er muß also jeden Einwohner um den $35^{ten}$ Theil des vorigen Zinses steigern.

**12. Aufgabe.** Ein Vater stirbt und hinterläßt ein Vermögen $a = 70000$ Fl., und eine gewisse Anzahl Kinder: gleich nach des Vaters Tode starben 2 Kinder davon, und durch diesen Umstand bekam jedes Kind um 4000 Fl. mehr, als es bekommen hätte, wenn keines gestorben wäre. Wie viel waren anfänglich Kinder vorhanden?

Auflösung. Ihre Anzahl sey gewesen $= x$; und da 2 davon gestorben, verblieben noch $x - 2$.

Im ersten Falle hätte jedes bekommen $\frac{a}{x}$ Fl. und da 2 gestorben, bekommt jedes $\frac{a}{x-2}$, da aber letzteres um 4000 Fl. mehr seyn soll als das erste, so ist $\frac{a}{x-2} - 4000 = \frac{a}{x}$, eine verwickelte quadratische Gleichung, woraus (nach §. 215) gefunden wird $x = 1 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2000} + 1\right)} = 1 + \sqrt{36} = 7$.

**13. Aufgabe.** Zwey Compagnien werden zu einer Arbeit angestellt: man weiß, daß die erste Compagnie allein in $a = 26$ Tagen, und die zweyte allein in $b = 16$ Tagen mit dieser Ar-

beit fertig würde. Wie viel Tage werden beyde zusammen damit zu thun haben?

Auflösung. Da die erste Compagnie in $a = 26$ Tagen mit der Arbeit allein fertig würde, so macht sie täglich den Bruch $\frac{1}{a} = \frac{1}{26}$ von der ganzen Arbeit; und die zweyte aus der nähmlichen Ursache $\frac{1}{b} = \frac{1}{16}$ der ganzen Arbeit.

Die Anzahl der Tage, so sie brauchen, wenn sie beyde zusammen arbeiten, sey $= x$, so macht die erste Compagnie in $x$ Tagen den Theil $\frac{x}{a}$, und die zweyte den Theil $\frac{x}{b}$ von der ganzen Arbeit; beyde Theile müssen aber die ganze Arbeit ausmachen: folglich ist $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, woraus $x = \frac{ab}{a+b}$ folgt; nähmlich $x = \frac{26 \cdot 16}{26+16} = 9\frac{12}{21}$ Tage.

Auf die nähmliche Art findet man, daß 3 Wasserröhren ein Behältniß, welches die erste Röhre allein in $a$, die zweyte allein in $b$ und die dritte allein in $c$ Stunden anfüllen würde, wenn sie alle drey zusammenfließen, in $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ Stunden anfüllen können.

14. Aufgabe. Zwey Bombardiere werfen aus einer Batterie verschiedene Bomben: der erste hatte schon 50 Würfe gemacht, bis der zweyte zu werfen anfängt, und macht 7 Würfe bis der zweyte deren 5 macht; hingegen braucht der zweyte zu 2 Würfen so viel Pulver als der erste zu 3. Die Frage ist, wie viel Würfe wird der zweyte machen, bis er so viel Pulver verbraucht hat, als der erste?

Auflösung. Die Anzahl der Würfe, so der zweyte machen wird, sey $= x$, so macht der erste während dieser Zeit $\frac{7x}{5}$ Würfe, wegen $5 : 7 = x : \frac{7x}{5}$; also hat der erste in allem $50 + \frac{7x}{5}$ Würfe. Das Pulver, so der zweyte zu einem Wurfe braucht, sey $= a$, so braucht der erste zu jedem Wurfe $\frac{2a}{3}$.

Das ganze verwendete Pulver des ersten ist demnach $\left(50+\frac{7x}{5}\right)\frac{2a}{3}$, und des zweyten $ax$. Weil sie aber gleichviel Pulver verwendet haben sollen, so ist $\left(50+\frac{7x}{5}\right)\frac{2a}{3}=ax$; woraus $x=500$ folget.

15. Aufgabe. Unter $a=100$ Maß Wein, davon jede Maß $b=36$ Kr. werth ist, soll ein anderer Wein, davon jede Maß $c=16$ Kr. werth ist, gemenget werden, damit jede Maß von der Vermischung $d=24$ Kr. werth wird. Wie viel soll von diesem andern Weine genommen werden?

Auflösung. Die Anzahl der Maßen, die von $c$ Kr. Wein darunter gemengt werden müssen, sey $=x$, so wird die ganze Vermischung seyn $a+x$ Maß. Und da jede Maß $d$ Kr. werth seyn soll, so ist der ganze Werth der Vermischung $(a+x)$. $d$ Kr. Da aber vor der Vermischung der Werth des guten Weins $=a\,.\,b$, und des schlechten $x\,.\,c$ Kr. war, so muß $ab+cx=(a+x).d$ seyn; woraus folget $x=\frac{a(b-d)}{d-c}=150$.

Sollte ein Wein mit Wasser gemischt werden, z. B. unter 40 Maß 24 Kr. Wein soll so viel Wasser gemischt werden, daß ein 16 Kr. Wein entstehe, so ist $a=40$, $b=24$, $c=0$, weil das Wasser keinen Werth hat, und $d=16$; also $x=20$.

Wäre aber auch noch $a$ unbekannt; z. B. die Aufgabe wäre also: Man will von zweyerley Weinen, von einem 36, und 16 Kr. Wein, einen mittlern gemischten Wein zu 24 Kr., und zwar 250 Maß zubereiten: wie viel soll von jedem genommen werden?

Hier ist zwar in unserer Formel, $a$ und $x$, die Anzahl der Maßen, des 36 Kr., und des 24 Kr. Weins unbekannt; doch aber ist ihre Summe $a+x=250$ Maß bekannt, weil beyde zusammen $=250$ Maß seyn müssen. Man könnte demnach beyde $a$ und $x$ aus der angeführten Formel auf folgende Art finden:

Weil $x=\frac{a(b-d)}{d-c}$, so ist $d-c:b-d=a:x$

also auch $(d-c)+(b-d):d-c=a+x:a$
und auch $(d-c)+(b-d):b-d=a+x:x$ (§. 187, III);

nähmlich $b - c : d - c = a + x : a$

$36 - 16 : 24 - 16 = 250 : a = 100$

und $b - c : b - d = a + x : x$

$36 - 16 : 36 - 24 = 250 : x = 150.$

Dieses pflegen die practischen Rechenmeister nach der sogenannten Alligationsregel auf nebenstehende Art anzusetzen.

| | | |
|---|---|---|
| 36 | 8 | 100 |
| 24 | 20 | |
| 16 | 12 | 150 |

$20 : 250 = 8 : 100$

$= : = 12 : 150$

Man könnte aber auch letztere Aufgabe durch folgende Benennung auflösen: Es sey der Werth des bessern Weines $36 = b$, der Werth des schlechtern $16 = c$, der Werth einer jeden Maß der Vermischung $24 = d$; die Anzahl der Maßen, so die Vermischung haben soll $= a$, und die Anzahl der Maßen, die man vom bessern Wein hierzu nehmen muß $= x$; so müssen vom schlechtern genommen werden $(a - x)$ Maß, weil beyde zusammen $= a$ seyn müssen. Nun ist vor der Vermischung der Werth des bessern Weines $b \,.\, x$, und der Werth des schlechtern $c \,.\, (a - x)$, also zusammen $bx + c\,(a - x)$; und nach der Vermischung ist der ganze Werth des gemischten Weines $a \,.\, d$, weil jede Maß $d$ Kr., also $a$ Maß $ad$ Kr. kosten müssen; folglich ist $bx + c\,(a - x) = ad$, woraus $x = \frac{a(d-c)}{b-c}$ Maß des bessern Weines folget, und die Anzahl der Maßen $a - x$ des schlechtern Weines ist sodann $= \frac{a(b-d)}{b-c}$. In unserm Beyspiele müssen demnach 100 Maß vom bessern, und 150 vom schlechtern Weine genommen werden.

Diese Auflösung kann auch bey Vermischung der Metalle, Pulver, Feuerwerkssätze, und bey andern chemischen Operationen zuweilen gut angewendet werden. Z. B. ein Silberarbeiter hat zweyerley Silber, ein 15löthiges und ein 10löthiges: er soll ein 5 Mark, oder 2 Pfund 16 Loth schweres Gefäß machen, welches 13löthiges Silber enthält; (man versteht hier unter dem Worte 13löthiges Silber, daß bey einer Mark von 16 Loth nur 13 Loth reines Silber und im übrigen 3 Loth Zu-

satz an Kupfer sich befinden; und so ist auch 15 löthig, 10 löthig ꝛc. zu verstehen). Wie viel muß von jedem genommen werden?

Obige Formel auf dieses Beyspiel angewendet, gibt $a = 2$ Pfund 16 Loth $= 80$ Loth, $b = 15$, $c = 10$, $d = 13$, und daher $x = 48$ Loth vom bessern Silber, vom schlechtern aber $80 - 48 = 32$ Loth, zusammen 80 Loth.

Eben so: Man hat zweyerley Brandröhrensätze; der erste in eine Brandröhre von bestimmter Länge geschlagen, brennt durch $45 = b$ Secunden, und der andere, in eben diese Brandröhre geschlagen, brennt nur durch $20 = c$ Secunden. Man will von diesen zwey Sätzen $12 = a$ Pf. Satz mischen, wovon eben diese Brandröhre verfertigt durch $30 = d$ Secunden brennt. Wie viel muß von jedem genommen werden?

Um sich zu überzeugen, daß auch hier obige Auflösung angewendet werden könne, so bilde man sich ein, daß von 1 Pf. Satz $m$ Brandröhren geschlagen werden können. Die Anzahl Pfunde, die man vom bessern Satze nehmen muß, sey wieder $= x$; also vom schlechtern $a - x$ Pfund. Erstere geben $mx$ Brandröhren, wo jede durch $b$ Sec. also alle durch $mxb$ Sec. brennen würden, wenn sie nach einander angezündet würden; und letztere geben $(a - x)m$ Brandröhren, wo jede durch $c$ Secunden brennet, also alle diese durch $(a - x)\,mc$ Secund. Von der Vermischung aber erhält man $dm$ Brandröhren, wo jede durch $d$ Sec. brennen soll; also alle durch $amd$ Sec; folglich ist $mxb + (a - x)\,mc = amd$, woraus wieder $x = \frac{a(d - c)}{b - c}$ folget. Man müßte demnach $4\frac{4}{5}$ Pf. vom bessern, und $7\frac{1}{5}$ Pf. vom schlechtern Satze nehmen.

16. Aufgabe. Ein Oberfeuerwerksmeister hat unter seinem Commando 20 Unterofficiere, theils Oberfeuerwerker, theils Feuerwerker: er gab jeder Partey 24 Feuerballen zu schnüren; und es ereignete sich, daß jeder Oberfeuerwerker um einen

Feuerballen mehr, als ein Feuerwerker schnüren mußte. Wie viel waren Oberfeuerwerker, und wie viel Feuerwerker?

Auflösung. Die Anzahl der Oberfeuerwerker sey $= x$, so ist die Anzahl der Feuerwerker $= 20 - x$. Ein jeder Oberfeuerwerker mußte demnach $\frac{24}{x}$ Feuerballen, und jeder Feuerwerker $\frac{24}{20 - x}$ Feuerballen schnüren; weil aber die erste Anzahl der Feuerballen um 1 größer seyn soll als die zweyte, so ist $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20 - x}$; hieraus folgt $x = 34 \pm \sqrt{676} = 34 \pm 26$ $= 8$ Oberfeuerwerkern.

Hier sieht man leicht ein, daß das Zeichen — genommen werden müsse: denn würde man das Zeichen + nehmen; so wäre $x = 34 + 26 = 60$, da doch in allem nur 20 Unteroffiziere waren. Man muß deßwegen bey algebraischen Rechnungen das doppelte Zeichen $\pm$ vor den Wurzeln (§. 119, II.) bis zu Ende der Rechnung beybehalten, wo sich dann erst entscheiden läßt, welches von beyden genommen werden kann, um nicht auf falsche Rechnungen geführt zu werden. Folgendes Beyspiel könnte noch zur Warnung dienen.

Man setze die Zahl $1000 = a$, $1 = b$, $1001 = c$

so ist $a + b = c$, (§. 12, Grundsatz 1).

$$a = c - b$$

$$a - c = - b$$

also auch $a^2 - ac = b^2 - bc$, (§. 29, Grundsatz 1).

$$a^2 - ac + \frac{c^2}{4} = b^2 - bc + \frac{c^2}{4}, \text{ (§. 16, Nr. 1);}$$

$$\text{und } a - \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2}, \text{ (§. 137, Nr. 2),}$$

folglich $a = b$, nähmlich $1000 = 1$.

Der Fehler liegt darin, daß die Wurzeln aus beyden Theilen der Gleichung positiv genommen wurden, da doch der zweyte Theil hätte negativ genommen werden sollen, weil das Quadrat von $b$ aus $- b \times - b$ entstanden ist. Es wäre

sodann $a - \frac{c}{2} = -\left(b - \frac{c}{2}\right)$, nähmlich $a - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} - b$ woraus wieder $a + b = c$ ist, wie vorhin.

17. Aufgabe. Ein sterbender Vater vermacht die Verlassenschaft seinen Söhnen auf folgende Art: Der erstgeborne soll zuerst 1000 Fl., dann den 6ten Theil des Überrestes bekommen; von diesem, was der erste überläßt, soll der zweyte Sohn 2000 Fl. nebst dem 6ten Theile des Überrestes nehmen; von dem Reste soll der dritte 3000 Fl. nebst dem 6ten Theile des Überrestes nehmen; und so soll die Theilung fort geschehen, bis die Verlassenschaft erschöpft ist. Es fügte sich aber, daß in dieser Theilung jeder Sohn einen gleich großen Theil bekam: wie viel waren der Söhne? wie viel erhielt jeder? und wie stark war die Verlassenschaft?

Auflösung. Die Verlassenschaft sey $= x$ Fl. so bekömmt der erste $1000 + \frac{x - 1000}{6} = \frac{5000 + x}{6}$; also ließ er übrig $x - \frac{5000 + x}{6} = \frac{5x - 5000}{6}$; hiervon nahm der zweyte $2000 + \left(\frac{5x - 5000}{6} - 2000\right) : 6 = \frac{55000 + 5x}{36}$. Da aber beyde gleichviel haben sollen, so ist $\frac{5000 + x}{6} = \frac{55000 + 5x}{36}$; woraus $x = 25000$ Fl. folget. Es waren demnach 5 Söhne, und jeder erhielt durch die vorgeschriebene Theilung 5000 Fl.

18. Aufgabe. Eine Weibsperson ging mit Eyern in der Stadt hausiren: im ersten Hause verkaufte sie die Hälfte ihrer Eyer, und noch $\frac{1}{2}$ Ey darüber; von dem Reste verkaufte sie im zweyten Hause wieder die Hälfte, mehr $\frac{1}{2}$ Ey, und eben so im dritten Hause; da sie aber aus dem dritten Hause heraus ging, öffnete sie ihren Korb, und fand selben ganz leer; wie viel Eyer hatte sie anfänglich?

Auflösung. Die Anzahl der Eyer, so sie gehabt, sey $= x$, so hat sie im ersten Hause verkauft $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, folglich blieben ihr noch $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; hiervon verkaufte sie im zweyten

Hause $\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$, und es verblieben ihr noch $\frac{x-1}{2} - \left(\frac{x+1}{4}\right) = \frac{x-3}{4}$; hiervon verkaufte sie im dritten Hause $\frac{x-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$; also war ihr Rest $\frac{x-3}{4} - \left(\frac{x+1}{8}\right) = \frac{x-7}{8}$. Da sie aber nun gar nichts mehr im Korbe hatte, so ist $\frac{x-7}{8} = 0$, nähmlich $x - 7 = 0$, und $x = 7$.

19. Aufgabe. Ein Bombardierhauptmann wird gefragt, wie viel er bey seiner Compagnie Oberfeuerwerker, Feuerwerker und Bombardiere habe, und wie viel jeder täglich Löhnung erhalte? Er sagte: ich habe dreymahl so viel Bombardiere, und $\frac{2}{3}$ mahl so viel Oberfeuerwerker, als Feuerwerker; jeder Oberfeuerwerker hat täglich so viele Kreuzer als Feuerwerker, jeder Feuerwerker um 4 Kr. mehr, als Oberfeuerwerker, und jeder Bombardier nur den dritten Theil so viel Kr., als Feuerwerker sind; und die tägliche Löhnung aller dieser Leute beträgt 52 Fl. 48 Kr. Wie viel Oberfeuerwerker, Feuerwerker und Bombardiere hatte dieser Hauptmann, und wie viel Löhnung hatte jeder täglich?

Die Anzahl der Feuerwerker sey $= x$, so ist die Zahl der Oberfeuerwerker $= \frac{2x}{3}$, und der Bombardiere $= 3x$; folglich haben alle Oberfeuerwerker täglich $\frac{2x}{3} \times x = \frac{2x^2}{3}$, alle Feuerwerker $x \times \left(\frac{2x}{3} + 4\right) = \frac{2x^2}{3} + 4x$ und alle Bombardiere $3x \times \frac{x}{3} = x^2$. Es ist demnach $\frac{2x^2}{3} + \frac{2x^2}{3} + 4x + x^2 = 52 \cdot 60 + 48$; daraus folgt $x = -\frac{6}{7} + V\left(\frac{9504}{7} + \frac{36}{49}\right)$ (§. 215) endlich $x = 36$. Er hatte demnach 36 Feuerwerker, 24 Oberfeuerwerker und 108 Bombardiere; jeder Oberfeuerwerker erhielt täglich 36, jeder Feuerwerker 28, und jeder Bombardier 12 Kr.

20. Aufgabe. Zwey legen zusammen in eine Handlung $a$ Fl. = 2000; der erste ließ sein Geld durch $m = 17$ Monathe liegen, und erhielt Einlage sammt Gewinn $b = 1710$ Fl.; und der andere ließ sein Geld durch $n = 12$ Monathe liegen, und erhielt Einlage sammt Gewinn $c = 1040$ Fl. Wie groß war eines jeden Einlage?

Auflösung. Es sey die Einlage des ersten $= x$ Fl.; also ist die Einlage des zweyten $= a - x$; ihr gesammter Gewinn aber ist $= b + c - a$; folglich ist (nach §. 208) $[mx + n(a - x)] : (b + c - a) = mx : \frac{mx\,(b + c - a)}{mx + an - nx}$ = dem Gewinn des ersten. Es ist demnach $\frac{mx\,(b + c - a)}{mx + an - nx} + x = b$, weil der erste an Einlage sammt Gewinn $b$ Fl. erhalten hat. Diese Gleichung gehörig (nach §. 215) aufgelöset, gibt $x = 1200$.

21. Aufgabe. Ein Vater stirbt, und hinterläßt ein Capital von 1100 Fl. nebst 4 Söhnen; nach 10 Monathen wurde das Testament erst eröffnet, und die Kinder hatten in dieser Zeit das Capital sammt den betreffenden Interessen gänzlich verzehret. Auf eben diese Art haben 3 Kinder ein Capital von 1200 Fl. in 15 Monathen aufgezehrt. Die Frage ist, wie lange werden auf diese Art 6 Kinder mit einem Capital von 1650 Fl. auskommen?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Gulden, so 100 Fl. in einem Monathe Zins tragen $= x$, so ist von 1100 Fl. in 10 Monathen das Interesse $110x$; mithin haben im ersten Falle die 4 Söhne in 10 Monathen verzehret $1100 + 110x$ Fl. und jeder hat in einem Monathe verzehret $\frac{1100 + 110x}{10 \cdot 4}$ Fl. Im zweyten Falle haben alle drey Söhne in 15 Monathen $1200 + 12x \cdot 15$ Fl., und folglich hat jeder in einem Monathe $\frac{1200 + 12x \cdot 15}{3 \cdot 15}$ Fl. verzehret. Da sie aber auf gleiche Art gelebt haben sollen, so ist $\frac{1100 + 110x}{40} = \frac{1200 + 12 \cdot 15x}{45}$, woraus $x = \frac{2}{3}$ gefunden wird; folglich hat in jedem Falle ein Kind in einem Monathe $29\frac{1}{3}$ Fl. verzehret. Nun sey die Anzahl der Monathe, da

die 6 Kinder mit 1650 Fl. auskommen $= y$; dieses Capital trägt monathlich $16\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 11$ Fl. Zins, also in $y$ Monathen $11y$ Fl.; daher ist das Capital sammt Interessen $= 1650 + 11y$ Fl. Da aber jedes Kind monathlich $29\frac{1}{3}$ Fl. verzehret, so brauchen 6 Kinder in $y$ Monathen $176y$ Fl.; und da das Capital sammt Interessen verzehret seyn soll, so ist $176y = 1650 + 11y$, woraus $y = 10$ folget.

22. Aufgabe. Es ist Jemand 1000 Fl. $= a$ schuldig, die er aber erst nach verflossenen 18 Monathen $= m$ ohne Interesse zu zahlen verbunden ist; der Gläubiger wünschet aber sogleich bezahlt zu werden; wie viel kann der Schuldner wohl jetzt für diese Schuld geben, wenn der Gläubiger, so wie der Schuldner mit 100 Fl. jährlich 8 Fl. $= c$ gewinnen kann?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Gulden, die für diese Schuld jetzt bezahlt werden können $= x$, so könnte der Gläubiger mit diesen $x$ Fl. in 12 Monathen gewinnen $\frac{8x}{100}$ Fl; denn $100 : 8 = x : \frac{8x}{100}$; und in 18 Monathen gewinnt er $\frac{12x}{100}$, denn $12\text{ M.} : 18\text{ M.} = \frac{8x}{100} : \frac{18 \cdot 8x}{1200} = \frac{12x}{100}$; er hat sodann $x + \frac{12x}{100}$, welches 1000 Fl. betragen soll; folglich ist $x + \frac{12x}{100} = 1000$; hieraus folget $x = 892\frac{6}{7}$ Fl.

23. Aufgabe. Ein Kaufmann ist in drey Terminen folgende Zahlungen zu leisten schuldig, nähmlich nach verflossenen $m$ Monathen $a$ Fl., nach $n$ Monathen $b$ Fl. und nach $r$ Monathen $c$ Fl.; der Gläubiger aber wünschet die ganze Summe $a + b + c$ auf einmahl zu erhalten; nach wie viel Monathen muß die Zahlung geschehen?

Auflösung. Man setze das Geld, so der Kaufmann in einem Monathe mit 100 Fl. gewinnen kann $= p$, so kann er mit $a$ Fl. in $m$ Monathen $\frac{amp}{100}$, mit $b$ Fl. in $n$ Monathen $\frac{bnp}{100}$, und mit $c$ Fl. in $r$ Monathen $\frac{crp}{100}$ gewinnen; mithin ist der

ganze Nutzen, den der Kaufmann noch von diesem ganzen Gelde ziehen kann $= \frac{amp + bnp + crp}{100}$.

Es sey nun die Zeit, nach welcher die Zahlung der ganzen Summe $a + b + c$ auf einmahl geschehen kann $= x$ Monathen, so ist der Nutzen, den der Kaufmann noch in dieser Zeit davon ziehen kann $= \frac{(a + b + c)\,px}{100}$; und weil er in einem wie in dem andern Falle gleichen Nutzen haben soll, so ist $\frac{amp + bnp + crp}{100}$ $= \frac{(a + b + c)px}{100}$, und $am + bn + cr = (a + b + c)\,x$, endlich $x = \frac{am + bn + cr}{a + b + c}$; nähmlich man multiplicire jede einzelne Summe mit der Zeit, in welcher solche zahlbar ist, und dividire die Summe der Producte durch die ganze Schuld, so hat man die Zeit, nach welcher alle Zahlungen auf einmahl geschehen können.

## Auflösung der Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen.

### §. 220.

Wenn in einer Aufgabe nach zweyen, oder mehreren Größen gefragt wird, die in keinem sehr deutlichen Zusammenhange untereinander stehen, so bezeichne man jede unbekannte Größe mit einem besondern Buchstaben, und suche sodann wieder die Bedingungen der Aufgabe durch Gleichungen auszudrücken. Kann man nun aus den Bedingungen der Aufgabe eben so viele Gleichungen ableiten, als man unbekannte Größen angenommen hat, so ist es ein Zeichen, daß die Aufgabe bestimmt sey; reichen hingegen die Bedingungen der Aufgaben nicht zu, so viele Gleichungen ansetzen zu können, als man unbekannte Größen angenommen hat, so ist sodann die Aufgabe unbestimmt. So kann in der unbestimmten Aufgabe (§. 217), zwey Zahlen zu finden, die miteinander multipliciret das Product $a = 12$ zum Vorschein bringen, wenn man eine gesuchte Zahl mit $x$, und die andere mit $y$ benennet,

nur folgende Gleichung angesetzt werden, $xy = a$; weiter läßt sich keine Gleichung aus dieser Bedingung mehr ansetzen. Füget man hingegen zu obiger Bedingung noch diese hinzu: daß die zwey gesuchten Zahlen von einander abgezogen die Differenz $d = 4$ zum Vorschein bringen müssen, so findet noch folgende Gleichung Statt, $x - y = d$; wo $x$ die größere, und $y$ die kleinere gesuchte Zahl vorstellt; und die Aufgabe ist sodann bestimmt.

## §. 221.

Hat man nun aus den Bedingungen der Aufgabe so viele Gleichungen abgeleitet, als unbekannte Größen vorhanden sind, so muß man trachten, mit den Gleichungen solche Veränderungen vorzunehmen, und dieselben so untereinander zu verbinden, daß man zuletzt eine Gleichung erhalte, worin sich nur eine einzige unbekannte Größe befindet, die man daraus finden, und durch die Substitution in den vorigen Gleichungen eine unbekannte Größe nach der andern entwickeln kann.

Die Art aber, wie dieses geschehen kann, ist mannigfaltig, und es wird am besten seyn, wenn eine Art nach der andern in wirklichen Beyspielen gezeigt wird, weil es ohnehin nur auf die Gestalt der Gleichungen selbst ankömmt, welche Art zu wählen ist, damit der Zweck am kürzesten erreicht werde. Aus obigen Gleichungen $xy = a$, und $x - y = d$ können die unbekannten Größen $x$ und $y$ auf folgende Art entwickelt werden:

Man suche aus jeder Gleichung den Werth von einer nähmlichen unbekannten Größe, z. B. von $x$; als wenn $y$ schon bekannt wäre: aus der ersten folgt $x = \frac{a}{y}$, und aus der zweyten $x = d + y$; es ist also auch (§. 12, Nr. 3) $\frac{a}{y} = d + y$, woraus $y = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(a + \frac{d^2}{4}\right)}$ folgt: oder wenn man die für $a$ und $d$ oben angenommenen Werthe setzt, so ist $y = 2$. Diesen Werth substituire man nun in einer der vorhergehenden Gleichungen, so findet man $x = \frac{d}{2} + \sqrt{\left(a + \frac{d^2}{4}\right)} = 6$.

Auf die nähmliche Art kann man bey der Auflösung der Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen verfahren. Z. B. Unter drey Regimenter, die sich in einem Treffen tapfer hielten, sind $a = 1326$ Fl. dergestalt zu theilen, daß von dem Regimente, welches sich am vorzüglichsten auszeichnete, jeder Mann einen Gulden erhalten, und der Überrest unter die Mannschaft der zwey übrigen Regimenter gleich zertheilet werden solle. Wird nun dieser Gulden dem ersten Regimente zuerkannt, so erhält ein jeder Mann der zwey übrigen Regimenter $\frac{1}{2}$ Fl.; gibt man diesen Gulden dem zweyten Regimente, so erhält jeder Mann von den zwey andern Regimentern nur $\frac{1}{3}$ Fl.; fällt endlich dieser Gulden dem dritten Regimente zu, so bekömmt ein jeder von der übrigen Mannschaft gar nur $\frac{1}{4}$ Fl. Wie stark ist jedes dieser drey Regimenter?

Es sey die Anzahl der Mannschaft des ersten Regiments $= x$, des zweyten $= y$, und des dritten $= z$, so erhält im ersten Falle die gesammte Mannschaft des ersten Regiments $x$ Fl., weil jeder Mann einen Gulden erhält; und die sämmtliche übrige Mannschaft der zwey andern Regimenter bekommt $\frac{y+z}{2}$ Fl.; im zweyten Falle bekommt das zweyte Regiment $y$ Fl.; und die übrigen beyden zusammen $\frac{x+z}{3}$ Fl.; und im dritten Falle bekommt das dritte Regiment $z$ Fl. und die sämmtliche übrige Mannschaft $\frac{x+y}{4}$ Fl.; also ist

$$\left.\begin{aligned} x + \frac{y+z}{2} &= a \ldots A \\ y + \frac{x+z}{3} &= a \ldots B \\ z + \frac{x+y}{4} &= a \ldots C \end{aligned}\right\}$$

Weil jedesmahl die ganze Summe $a = 1326$ Fl. genau aufgehen muß.

Aus der Gleichung $A$ folgt $x = a - \left(\frac{y+z}{2}\right)$

Aus der Gleichung $B$ ist $x = 3a - 3y - z$

Und aus der Gleichung $C$ ist $x = 4a - 4z - y$

also auch $a - \left(\frac{y+z}{2}\right) = 3a - 3y - z \ldots D$

und $3a - 3y - z = 4a - 4z - y \ldots E$

Aus der Gleichung $D$ ist $y = \frac{4a-z}{5}$ und aus der Gleichung $E$ ist $y = \frac{3z-a}{2}$, also auch $\frac{4a-z}{5} = \frac{3z-a}{2}$; daraus folgt $z = \frac{13a}{17} = \frac{13 \cdot 1326}{17} = 13 \cdot 78 = 1014$.

Diesen gefundenen Werth von $z$ substituire man in der Gleichung $E$, so ist $y = \frac{3 \cdot 1014 - 1326}{2} = 858$. Diese beyden Werthe von $y$ und $z$ in der Gleichung $A$ substituirt, geben $x = 1326 - \left(\frac{858 + 1014}{2}\right) = 390$. Das erste Regiment hatte daher 390, das zweyte 858, und das dritte 1014 Mann.

Aus den drey Fundamentalgleichungen bey der vorgelegten Aufgabe können die drey unbekannten Größen auch auf folgende Art entwickelt werden.

$$x + \frac{y+z}{2} = a$$

$$y + \frac{x+z}{3} = a$$

$$z + \frac{x+y}{4} = a$$

Man suche den Werth von der einen unbekannten Größe, z. B. von $x$ aus der ersten Gleichung $\left(\text{es ist } x = \frac{2a-y-z}{2}\right)$, und substituire diesen Werth für $x$ in allen übrigen Gleichungen, $5y + z = 4a$, und $7z + y = 6a$; auf diese Art ist die eine unbekannte Größe $x$ hinweggeschaffet, und die Anzahl der Hauptgleichungen um eine vermindert worden.

Sodann suche man wieder aus einer von diesen letztern Gleichungen den Werth für die eine unbekannte Größe (im gegebenen Beyspiele folgt aus der letzten Gleichung $y = 6a - 7z$), und substituire diesen Werth in allen übrigen von diesen letztern

Gleichungen statt der nähmlichen unbekannten Größe (nähmlich $30a - 35z + z = 4a$, woraus $z = \frac{13a}{17}$ folget) so wird auf diese Art auch die zweyte unbekannte Größe hinweggeschaffet und die Anzahl der Hauptgleichungen um zweye vermindert werden. Wenn man auf diese Art fortfährt, daß man nähmlich wieder aus einer von diesen letztern Gleichungen, wenn deren noch mehrere vorhanden wären, den Werth der einen unbekannten Größe suchet, und solchen in allen übrigen dieser letztern Gleichungen statt der nähmlichen unbekannten Größe substituiret, so wird man endlich zu einer Gleichung gelangen, in der sich eine einzige unbekannte Größe befindet; man wird demnach den Werth dieser unbekannten Größe finden können, so wie im angeführten Beyspiele wirklich $z = \frac{13a}{17}$ gefunden wurde.

Wenn einmahl eine unbekannte Größe gefunden ist, so werden die übrigen leicht entwickelt, wenn man den Rückweg geht, das ist, wenn man den gefundenen Werth in einer der vorhergehenden Gleichungen substituiret; nähmlich, wenn man in der Gleichung $y = 6a - 7z$ den gefundenen Werth $\frac{13a}{17}$ für $z$ setzet; so ist $y = \frac{11a}{17}$.

Substituiret man endlich diese beyden Werthe für $y$ und in einer der vorhergehenden Gleichungen $\left(\text{in } x = \frac{2a-y-z}{2}\right)$, so wird auch $x$ gefunden, nähmlich $x = \frac{5a}{17}$. Da nun $a = 1326$ bedeutet, so ist $x = 390$, $y = 858$, und $z = 1014$, wie vorher.

## §. 222.

Diese letzte Auflösung der Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen ist die allgemeinste; doch wird sie gemeiniglich nur damahls angewendet, wenn die unbekannten Größen entweder untereinander multipliciret, oder wenn solche in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben sind. Sollten hingegen die unbekannten Größen weder miteinander multi-

pliciret noch in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben seyn, so können solche durch die bloße Addition und Subtraction entwickelt werden. Auch bedienet man sich zuweilen noch anderer Kunstgriffe, theils um etwas geschwinder zum Ziele zu kommen, bisweilen auch, um verwickelten höheren Gleichungen auszuweichen, wie man aus folgenden Auflösungen einiger Aufgaben ersehen wird.

1. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, die zusammen addirt die Summe $s = 17$, und von einander abgezogen die Differenz $d = 7$ zum Vorschein bringen.

Auflösung. Es sey die größere gesuchte Zahl $= x$
und die kleinere $= y$
so ist $x + y = s$
und $x - y = d$ } laut Beding.

Um hier die unbekannten Größen etwas geschwinder zu finden, addire man beyde Gleichungen zusammen, so erhält man $2x = s + d$; also $x = \frac{s + d}{2} = \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} d$: sodann ziehe man die untere von der obern ab, so erhält man $2y = s - d$, also $y = \frac{s - d}{2} = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} d$. Wenn also zwey Zahlen durch ihre Summe, und durch ihre Differenz bestimmt werden sollen, so ist die größere Zahl gleich der halben Summe mehr der halben Differenz, und die kleinere ist gleich der halben Summe weniger der halben Differenz.

In unserem Beyspiele ist $x = \frac{17}{2} + \frac{7}{2} = 12$, und $y = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = 5$.

2. Aufgabe. Ein Wirth wird gefragt, was er für Weine habe? Er antwortete: 2 Maß von der ersten, 2 Maß von der zweyten, und 1 Maß von der dritten Gattung kosten zusammen 1 Fl.; 2 Maß von der ersten, 3 Maß von der zweyten, und 4 Maß von der dritten Gattung kosten 2 Fl.; 10 Maß von der ersten, 4 Maß von der zweyten und 2 Maß von der dritten

Gattung kosten 3 Fl. Was kostet wohl eine Maß von jeder Gattung?

Auflösung. Es sey der Preis einer Maß von der ersten Gattung $= x$, von der zweyten $= y$, und von der dritten $= z$ Kr. so ist laut Bedingung

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 60 \quad \text{“ “ “ } A \\ 2x + 3y + 4z &= 120 \quad \text{“ “ “ } B \\ 10x + 4y + 2z &= 180 \quad \text{“ “ “ } C \end{aligned}$$

Um die vorhergehende Auflösung mittelst der Subtraction auch hier anwenden zu können, muß man trachten, eine, oder die andere Gleichung so zu verändern, daß durch die Addition oder Subtraction der Gleichungen eine unbekannte Größe nach der andern weggeschafft werde. Dieses könnte hier unter andern auch auf folgende Art geschehen: Man ziehe die Gleichung $A$ von der Gleichung $B$ ab, so verschwindet $x$; ferner multiplicire man die Gleichung $A$ mit 5, damit $x$ in selber den nähmlichen Coefficienten, wie in der Gleichung $C$ erhalte, so ist

$$\begin{aligned} y + 3z &= 60 \quad \text{“ “ } D \text{ durch Subtrac. } A \text{ von } B \\ 6y + 3z &= 120 \quad \text{“ “ } E \text{ durch Subtrac. } C \text{ von } 5A \end{aligned}$$

Weil hier $z$ schon in beyden Gleichungen den nähmlichen Coefficienten hat, so ziehe man $D$ von $E$ ab, so erhält man, $5y = 60$; also $y = 12$. Dieser Werth von $y$ in der Gleichung $D$ substituirt, gibt $z = 16$; und beyde Werthe in $A$ substituirt geben $x = 10$.

3. Aufgabe. Der algebraische Ausdruck $n^4x + n^3y + n^2z + nu$, als eine Function von $n$ (nach §. 57) soll so beschaffen seyn, daß, wenn $n = 1$ gesetzt wird, der ganze Ausdruck ebenfalls $= 1$ sey; setzet man hingegen $n = 2$, so soll 9, für $n = 3$ soll 36, für $n = 4$ soll 100 zum Vorschein kommen. Was müssen wohl die Größen $x$, $y$, $z$, $u$ für Werthe haben?

Auflösung. Man setze in dem gegebenen Ausdrucke einmahl $n = 1$, dann $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, so erhält man folgende 4 Gleichungen:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
x & + & y & + & z & + & u & = & 1 & = & = & = & = & A \\
16x & + & 8y & + & 4z & + & 2u & = & 9 & = & = & = & = & B \\
81x & + & 27y & + & 9z & + & 3u & = & 36 & = & = & = & = & C \\
256x & + & 64y & + & 16z & + & 4u & = & 100 & = & = & = & = & D.
\end{array}
$$

Die unbekannten Größen können wieder auf die vorige Art durch Subtraction am leichtesten entwickelt werden; denn es ist

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
x & + & y & + & z & + & u & = & 1 & \cdot & A \\
15x & + & 7y & + & 3z & + & u & = & 8 & = & E \text{ durch Subtr. } A \text{ von } B \\
65x & + & 19y & + & 5z & + & u & = & 27 & = & F \text{ durch Subtr. } B \text{ von } C \\
175x & + & 37y & + & 7z & + & u & = & 64 & = & G \text{ durch Subtr. } C \text{ von } D
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
14x & + & 6y & + & 2z & = & 7 & = & = & H \text{ durch Subtr. } A \text{ von } E \\
50x & + & 12y & + & 2z & = & 19 & = & = & I \text{ durch Subtr. } E \text{ von } F \\
110x & + & 18y & + & 2z & = & 37 & = & = & K \text{ durch Subtr. } F \text{ von } G
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrr}
36x & + & 6y & = & 12 & \cdot & = & = & = & L \text{ durch Subtr. } H \text{ von } I \\
60x & + & 6y & = & 18 & = & \cdot & = & = & M \text{ durch Subtr. } I \text{ von } K
\end{array}
$$

endlich $24x = 6$ = = = = durch Subtr. $L$ von $M$

woraus $x = \frac{1}{4}$ folget.

Dieser Werth in $L$ substituirt gibt $y = \frac{1}{2}$; beyde Werthe für $x$ und $y$ in $H$ substituirt, geben $z = \frac{1}{4}$; und endlich alle drey Werthe in $A$ substituirt, geben $u = o$. Es ist demnach die gesuchte Function $= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$.

4. Aufgabe. Peter klagte dem Paul, daß er so wenig Geld habe: Du hast nicht Ursache zu klagen, erwiederte Paul; denn wenn du mir einen Gulden gäbest, so hätten wir erst gleichviel; würde ich dir hingegen einen Gulden geben, dann hättest du noch einmahl so viel Geld als ich. Wie viel Gulden hatte jeder Geld?

Auflösung. Die Anzahl der Gulden Peters sey $= x$, und Pauls $= y$. Würde nun Peter dem Paul einen Gulden geben, so hätte Peter $x - 1$, und Paul $y + 1$; und da alsdann beyde gleichviel haben sollen, so ist $x - 1 = y + 1$. Würde hingegen Paul dem Peter 1 Fl. geben, so hätte Peter $x + 1$, und Paul $y - 1$; und weil alsdann Peter noch einmahl so viel,

als Paul haben soll, so ist $x + 1 = 2(y - 1)$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = y + 2$; substituirt man diesen Werth von $x$ in der zweyten Gleichung, so ist $y + 2 + 1 = 2(y - 1)$; woraus $y = 5$ folget; also ist $x = 5 + 2 = 7$.

5. Aufgabe. Zwey Kanoniere haben zusammen 1000 Patronen gefüllet, und gleichviel Pulver verwendet, der erste spricht zum zweyten: Hätte ich so viel Patronen, als wie du gefüllet, so hätte ich 18 Centner Pulver verarbeitet; und der zweyte antwortet: Hätte ich nur so viel Patronen wie du gefüllet, so würde ich nur 8 Centner Pulver verarbeitet haben. Wie viel Patronen hatte jeder gefüllet, und mit wie viel Pulver?

Auflösung. Die Anzahl der Patronen des ersten sey $= x$, und des zweyten $= y$; so ist das verwendete Pulver des ersten nach seiner Aussage $\frac{18x}{y}$ Centner, wegen $y$ Patr.: 18 C. $= x$ Patr.: $\frac{18x}{y}$ Centner; und das verwendete Pulver des zweyten ist nach seiner Aussage $\frac{8y}{x}$ wegen $x$ Patr.: 8 Centner $= y$ Patr.: $\frac{8y}{x}$ Cent. Da aber beyde gleichviel verwendet haben sollen, so ist $\frac{18x}{y} = \frac{8y}{x}$. Ferner ist $x + y = 1000$, weil beyde miteinander 1000 Patronen angefüllet haben sollen. Aus der ersten Gleichung ist $18x^2 = 8y^2$, nähmlich $x = \frac{2y}{3}$; substituirt man diesen Werth in der andern Gleichung, so ist $\frac{2y}{3} + y = 1000$, woraus $y = 600$ folget. Also $x = 1000 - 600 = 400$, und das von jedem verwendete Pulver ist $\frac{18x}{y} = \frac{8y}{x} = 12$ Centner.

Wäre aber die Bedingung der Aufgabe folgender Maßen gestellet: Der erste spricht zum zweyten: Hätte ich jede Patrone mit so viel Pulver gefüllet, wie du die deinigen, so würde ich nur $a = 562\frac{1}{2}$ Pf. Pulver verwendet haben; und der zweyte sagt: Hätte

ich meine Patronen mit so viel Pulver gefüllet, wie du die deinigen, so hätte ich $b = 1562\frac{1}{2}$ Pf. verwendet, so wäre wieder, wenn man die Anzahl der Patronen des ersten mit $x$, und die des zweyten mit $y$ benennet, $x + y = 1000$.

Ferner ist das Pulver, welches der zweyte zu einer Patrone verwendet hat $= \frac{a}{x}$ Pf.; denn es ist nach Aussage des erstern $x$ Patr. : $a$ Pf. $=$ 1 Patr. : $\frac{a}{x}$ Pf.; und nach Aussage des zweyten ist $y$ Patr. : $b$ Pf. $=$ 1 Patr. : $\frac{b}{y}$ Pf. $=$ dem Pulver, welches der erste zu einer Patrone verwendet hat; folglich hat der erste zu allen Patronen $\frac{bx}{y}$ Pf., und der zweyte $\frac{av}{x}$ Pf. verwendet; es ist demnach $\frac{bx}{y} = \frac{av}{x}$, weil beyde gleichviel Pulver verwendet haben sollen. Aus der zweyten Gleichung ist $x = y\sqrt{\frac{a}{b}} = y\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}y$, wenn man für $a$ und $b$ ihre Werthe setzet. Dieser Werth in der ersten Gleichung substituirt gibt $\frac{3}{5}y + y = 1000$, woraus $y = 625$ folget; also ist $x = 1000 - 625 = 375$.

6. Aufgabe. Zwey Wasserröhren haben ein Gefäß von $a = 21$ Eymer mit Wasser angefüllet, indem die erste $b = 2$ Stunden, und die zweyte $c = 3$ Stunden geflossen ist. Ein andersmahl haben eben diese 2 Röhren ein Behältniß von $d = 51$ Eymer angefüllet, da die erste $f = 7$, und die andere $g = 6$ Stunden geflossen ist. Wie viel Stunden werden beyde miteinander fließen müssen, damit selbe ein Behältniß von $h = 100$ Eymer anfüllen?

Hier sieht man leicht ein, daß es nur auf die Menge des Wassers ankömmt, so jede Röhre in einer Stunde gibt. Es sey darum die Menge des Wassers, so die erste Röhre in einer Stunde gibt $= x$ Eymer, so gibt sie in $b$ Stunden $bx$, und in $f$ Stunden $fx$ Eymer. Die Menge des Wassers, so die zweyte Röhre in einer Stunde gibt, sey $= y$, so gibt sie in $c$ Stunden $cy$,

und in $g$ Stunden $gy$ Eymer. Es ist demnach $bx + cy = a$, und $fx + gy = d$. Aus der ersten Gleichung ist $x = \frac{a - cy}{b}$, und aus der zweyten ist $x = \frac{d - gy}{f}$; also auch $\frac{a - cy}{b} = \frac{d - gy}{f}$, woraus $y = \frac{af - bd}{cf - bg} = \frac{21.7 - 2.51}{3.7 - 2.6} = 5$ Eymer, und $x = \frac{21 - 3.5}{2} = 3$ Eymer. Beyde Röhren zusammen geben also $5 + 3 = 8$ Eymer in einer Stunde; folglich brauchen sie, um 100 Eymer zu füllen $\frac{100}{8} = 12\frac{1}{2}$ Stunden.

7. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe von der Summe ihrer Quadrate abgezogen die Differenz $78 = a$, und deren Summe zu ihrem Producte addiret die Zahl 39 $= \frac{a}{2}$ zum Vorschein bringet.

Auflösung. Es sey die größere Zahl $= x$, und die kleinere $= y$; so ist laut Bedingung

$x^2 + y^2 - x - y = a$ = = = = $A$

$xy + x + y = \frac{a}{2}$ = = = = $B$

Wenn man hier, so wie bisher gezeigt worden, arbeiten wollte, so würde man in eine verwickelte Gleichung vom vierten Grade gerathen; jedoch lassen sich aus diesen Gleichungen die unbekannten Größen auf folgende Art bestimmen:

Man multiplicire die Gleichung $B$ mit 2, addire sie sodann einmahl zur Gleichung $A$, und ziehe sie auch von solcher ab, so erhält man durch die Addition

$x^2 + y^2 - x - y + 2xy + 2x + 2y = 2a$

nähmlich $(x + y)^2 + (x + y) = 2a$ = = = = $C$

und durch die Subtraction erhält man

$x^2 + y^2 - x - y - 2xy - 2x - 2y = 0$

nähmlich $(x - y)^2 - 3(x + y) = 0$

oder $(x - y)^2 = 3(x + y)$ = = = = = = $D$

Nun sehe man $(x + y)$ in der Gleichung $C$ für eine einnahmige Größe an, und ergänze das Quadrat, so ist

$(x+y)^2 + (x+y) + (\frac{1}{2})^2 = 2a + \frac{1}{4}$, woraus $(x+y)$ $= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(2a + \frac{1}{4})} = 12$ ist. Diesen Werth substituire man in der Gleichung $D$, so ist $(x-y)^2 = 3 \cdot 12$; also $(x-y)$ $= \sqrt{36} = 6$.

Da nun $x + y = 12$
und $x - y = 6$
so ist $x = 9$, und $y = 3$, (vermög §. 222, Aufg. 1).

Oder auch: man benenne die halbe Summe der zwey gesuchten Zahlen mit $x$, und die halbe Differenz dieser Zahlen mit $y$; so ist (vermög §. 222, Aufg. 1).
die größere gesuchte Zahl $= x + y$
und die kleinere $= x - y$
folglich ist laut Bedingung der Aufgabe
$(x+y)^2 + (x-y)^2 - 2x = a$
nähmlich $2x^2 + 2y^2 - 2x = a$ = = = = $A$
und $(x+y)(x-y) + 2x = \frac{1}{2}a$
nähmlich $x^2 - y^2 + 2x = \frac{1}{2}a$ = = = = = $B$
Multipliciret man nun die Gleichung $B$ mit 2, und addiret selbe zu der Gleichung $A$, so erhält man
$4x^2 + 2x = 2a$,
woraus man durch die Ergänzung des Quadrats findet
$$x = \frac{-1 + \sqrt{(8a+1)}}{4} = \frac{-1+25}{4} = 6.$$

Substituiret man ferner diesen gefundenen Werth in der Gleichung $B$, so ergibt sich $y = 3$; folglich ist die größere gesuchte Zahl $x + y = 6 + 3 = 9$, und die kleinere $x - y$ $= 6 - 3 = 3$ wie vorhin.

8. Aufgabe. Es sind drey Klumpen Metall, jeder aus Gold, Silber und Kupfer zusammen geschmolzen:
im ersten sind 2 Loth Gold, 4 Loth Silber, 8 Loth Kupfer.
im zweyten sind 3 Loth Gold, 9 Loth Silber, 6 Loth Kupfer.
im dritten sind 10 Loth Gold, 5 Loth Silber, 15 Loth Kupfer.

Wie viel Lothe müssen von jedem Klumpen genommen werden, damit man einen vierten Klumpen erhält, worin 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer enthalten sind?

Auflösung. Man nehme vom ersten Klumpen $x$ Loth, vom zweyten $y$ Loth und vom dritten $z$ Loth;

so ist beym ersten $\frac{2x}{14}$ L. Gold, $\frac{4x}{14}$ L. Silber und $\frac{8x}{14}$ L. Kupfer.

beym zweyten $\frac{3y}{18}$ = $\frac{9y}{18}$ = = $\frac{6y}{18}$ =

und beym dritten $\frac{10z}{30}$ = $\frac{5z}{30}$ = = $\frac{15z}{30}$ =

Es ist demnach laut Bedingung $\frac{2x}{14}+\frac{3y}{18}+\frac{10z}{30}=4$ = = $A$

$\frac{4x}{14}+\frac{9y}{18}+\frac{5z}{30}=6$ = = $B$

$\frac{8x}{14}+\frac{6y}{18}+\frac{15z}{30}=9$ = = $C$

woraus $x=7$, $y=6$ und $z=6$ gefunden wird.

9. Aufgabe. Drey spielten miteinander Pharo: im ersten Spiele hatte der erste die Bank; die zwey übrigen setzten jeder die Hälfte ihres Geldes, und sie gewannen; im zweyten Spiele hatte der zweyte die Bank; beyde übrigen setzten die Hälfte ihres Geldes, und gewannen ebenfalls; hiermit übernimmt der dritte die Bank; die zwey übrigen setzten wieder die Hälfte ihres Geldes, und auch hier verlor der Banquier. Am Ende des dritten Spieles zählten sie ihr Geld, und fanden, daß jeder 27 Ducaten hatte. Wie viel hatte wohl jeder im Anfange?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Ducaten, so der erste beym Anfange des ersten Spieles hatte $= x$, jene des zweyten $= y$, und des dritten $= z$; so hat am Ende des ersten Spieles

der erste $x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=\frac{2x-y-z}{2}$ Ducaten.

der zweyte $y+\frac{y}{2}=\frac{3y}{2}$ Ducaten.

der dritte $z+\frac{z}{2}=\frac{3z}{2}$ Ducaten.

---

Am Ende des zweyten Spieles hat

der erste $\frac{2x-y-z}{2}+\frac{2x-y-z}{4}=\frac{6x-3y-3z}{4}$

der zweyte $\frac{3y}{2} - \frac{2x+y+z}{4} - \frac{3z}{4} = \frac{7y-2x-2z}{4}$

und der dritte $\frac{3z}{2} + \frac{3z}{4} = \frac{9z}{4}$

---

Und am Ende des dritten Spieles hat

der erste $\frac{6x-3y-3z}{4} + \frac{6x-3y-3z}{8} = \frac{18x-9y-9z}{8}$

der zweyte $\frac{7y-2x-2z}{4} + \frac{7y-2x-2z}{8} = \frac{21y-6x-6z}{8}$

und der dritte $\frac{9z}{4} - \frac{6x+3y+3z}{8} - \frac{7y+2x+2z}{8} = \frac{23z-4x-4y}{8}$

Es ist demnach $\frac{18x-9y-9z}{8} = 27$ = = = = $A$

$\frac{21y-6x-6z}{8} = 27$ = = = = $B$

$\frac{23z-4x-4y}{8} = 27$ = = = = $C$.

Wenn man die Gleichung $B$ mit 3 multiplicirt, und zu $A$ addirt, so erhält man

$\frac{54y-27z}{8} = 4.27$ = = = = = = $E$.

Wenn man ferner die Gleichung $B$ mit 2, die Gleichung $C$ aber mit 3 multipliciret, und $B$ von $C$ abziehet, so ist

$\frac{81z-54y}{8} = 27$ = = = = = = = $D$.

Endlich $E$ und $D$ zusammen addirt gibt

$\frac{54z}{8} = 5 . 27$; woraus $z = 20$ folget.

Dieser Werth für $z$ in $D$ substituirt gibt $y = 26$; und beyde Werthe in $A$ substituiret, geben $x = 35$. Es hatte demnach im Anfange der erste 35, der zweyte 26, und der dritte 20 Ducaten.

10. Aufgabe. Drey Regimenter werden zu einer gewissen Arbeit angestellet: das erste und zweyte Regiment hat eine eben solche Arbeit gemeinschaftlich in $a = 70$ Tagen, das erste und dritte in $b = 84$ Tagen, und das zweyte und dritte in $c = 140$ Tagen vollendet. Nun ist die Frage, in wie viel Tagen alle

drey Regimenter mit einander diese Arbeit verfertigen werden, und wie viel Tage ein jedes insbesondere dazu verwenden würde.

Auflösung. Es sey die Anzahl der Tage, so das erste Regiment allein zu dieser Arbeit verwenden würde $= x$, des zweyten Regiments $= y$, und des dritten $= z$.

So wird (vermöge §. 219, Aufgabe 13) das erste und zweyte Regiment zusammen zu dieser Arbeit $\frac{xy}{x+y}$ Tage, das erste und dritte zusammen $\frac{xz}{x+z}$, und das zweyte und dritte zusammen $\frac{yz}{y+z}$ Tage brauchen. Es ist demnach $\frac{xy}{x+y} = a$; $\frac{xz}{x+z} = b$; und $\frac{yz}{y+z} = c$; woraus $z = \frac{2abc}{ab+ac-bc} = 420$, $y = \frac{2abc}{ab+bc-ac} = 210$ und $x = \frac{2abc}{bc+ac-ab} = 105$ gefunden wird; und folglich brauchen alle drey Regimenter zusammen $\frac{105.210.420}{105.210+105.420+210.420} = 60$ Tage (vermöge §. 219, Aufg. 13.)

11. Aufgabe. Eine Zahl zu finden, die aus drey Ziffern von solcher Beschaffenheit besteht, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, ohne auf ihren Rang zu sehen $= 104$, das Quadrat aber der mittlern Ziffer um 4 größer sey, als das doppelte Product der beyden äußern; ferner, wenn man von der gesuchten Zahl die Zahl 594 abzieht, so sollen die gesuchten 3 Ziffern, aus welchen die Zahl besteht, in verkehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Die Frage ist nach der Zahl?

Auflösung. Es sey die erste Ziffer links $= x$, die mittlere $= y$, und die letzte $= z$, so ist laut Bedingung

$x^2 + y^2 + z^2 = 104$ . . . . . $A$

$y^2 = 2xz + 4$ . . . . . $B$

$100x + 10y + z - 594 = 100z + 10y + x$ . . . $C$

(vermöge §. 6.)

Aus $C$ findet man $x = \frac{99z + 594}{99} = z + 6$

Dieser Werth in $A$ und $B$ substituirt, gibt

$$z^2 + 12z + 36 + y^2 + z^2 = 104 \quad \ldots\ldots D$$
$$y^2 = 2z^2 + 12z + 4 \quad \ldots\ldots E.$$

Diese Gleichung $E$ von $D$ abgezogen, gibt

$2z^2 + 12z + 36 = 104 - 2z^2 - 12z - 4$, woraus $z = -3 + \sqrt{25} = 2$ folgt. Dieser Werth in der Gleichung $E$ und $C$ substituirt, gibt $y = 6$, und $x = 8$. Es ist demnach die gesuchte Zahl 862.

Folgende Beyspiele wird ein fleißiger Anfänger nunmehr selbst leicht ausarbeiten können.

I. Pythagoras wurde gefragt, wie viel er Schüler habe? er antwortete: die Hälfte studirt die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, und die übrigen, welche sich noch im Stillschweigen üben, sammt den drey Schülern, welche ich eben jetzt angenommen habe, machen den vierten Theil meiner vorgehabten Schüler aus.

II. Eine Heidinn ging in den Tempel Jupiters, und bath, er möchte ihr Geld, das sie bey sich hatte, verdoppeln; Jupiter that es, und sie opferte zur Dankbarkeit 2 Fl. Mit dem Überreste ging sie in den Tempel des Apollo, bath ein gleiches, und opferte abermahl zur Dankbarkeit für die Verdopplung ihres bey sich habenden Geldes 2 Fl.; darauf verfügte sie sich nach Haus, zählte ihr Geld, und fand mit Verwunderung, daß sie der Verdoppelung ungeachtet, nur 1 Fl. habe. Nun ist die Frage wie viel sie im Anfang Geld gehabt habe?

III. Ein Sterbender hinterließ eine schwangere Frau, und ein reines Vermögen $= a$ (z. B. 9000 Fl.). Sein letzter Wille war dieser: gebärst du einen Sohn, so soll derselbe von der Verlassenschaft $m$ mahl so viel als du (z. B. 3 mahl so viel) haben; gebärst du hingegen eine Tochter, so nimm du $n$ mahl so viel wie sie (z. B. 2 mahl so viel). Nun fügte es sich, daß die Frau einen Sohn und eine Tochter gebar. Wie soll nun das Vermögen getheilet werden?

IV. Ein Meister dingt einen Gesellen also auf: für jeden Tag, den du für mich arbeitest, zahle ich dir 7 Groschen: und für jeden Tag den du für deine Geschäfte anwendest, zahlst du

mir für die Kost 3 Groschen. Nach 50 Tagen trat der Gesell aus diesem Dienste; er machte mit seinem Herrn die Abrechnung, und es fügte sich, daß der Gesell vom Meister zwey Gulden zu fordern hatte. Nun ist die Frage, durch wie viel Tage dieser Gesell für seinen Herrn, und durch wie viel Tage er für sich gearbeitet hat?

V. Zwey Bauern säeten miteinander 24 Metzen aus; der erste spricht zum zweyten: wenn mir jeder Metzen so viel wieder bringet, als du gesäest hast, so werde ich 135 Metzen bekommen. Wie viel hatte jeder gesäet?

VI. Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um den dritten Theil; nimmt aber am Ende eines jeden Jahres 1000 Fl. zur Erhaltung seiner Familie hinweg; und wird doch dabey am Ende des dritten Jahres doppelt so reich, als er im Anfange des ersten Jahres war. Wie reich war dieser Kaufmann?

VII. Es hatte Jemand zwey Goldstufen zu verkaufen; er begehrte für jedes Loth des ersten Stückes halb so viel Gulden als das zweyte Stück Lothe wiegt, und die Anzahl dieser Gulden beträgt eben so viel, als beyde Stücke zusammen Lothe haben. Der Käufer nimmt beyde Stücke, und zahlt für jedes Loth eines jeden Stückes eben so viele Gulden, als Lothe in dem Stücke enthalten sind; und nach diesem Vergleiche beträgt die ganze Zahlung 45 Fl. Wie viele Lothe wiegt ein jedes Stück?

VIII. Acht Pferde haben in sieben Wochen eine Wiese von 400 Quadratklaftern dergestalt abgeweidet, daß sie sowohl das Gras, welches im Anfange schon bereits da stand, als auch jenes verzehrten, welches während dieser Zeit hervorwuchs. Auf die nähmliche Art haben 9 Pferde in 8 Wochen eine Wiese von 500 Quadratklaftern abgeweidet. Wie viel Pferde werden auf eben diese Art durch 12 Wochen auf einer Wiese von 600 Quadratklaftern sich ernähren können?

IX. Zwey Größen zu finden, deren Summe, Product und Differenz der Quadrate einander gleich sind.

§. 223.

Bey den verwickelten quadratischen Gleichungen von der Gestalt $x^4 + Ax^2 = B$, und auch in verschiedenen andern Fäl-

len kömmt der Ausdruck $x = \sqrt{(a + \sqrt{b})}$ zum Vorschein; dieser Ausdruck läßt sich noch abkürzen, wenn $(a^2 - b)$ ein vollkommenes Quadrat seyn sollte; es ist nähmlich $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$
$= \sqrt{[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]} \pm \sqrt{[\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b}]}$

Um dieses einzusehen setze man
$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{y} \pm \sqrt{z}$, so ist
$a \pm \sqrt{b} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2 = y \pm 2\sqrt{yz} + z$
nun setze man die irrationalen Glieder des ersten Theils dieser Gleichung, den irrationalen Gliedern des zweyten Theils gleich, und folglich auch die rationalen Glieder den rationalen gleich, so ist $\sqrt{b} = 2\sqrt{yz}$, und $a = y + z$; aus diesen Gleichungen findet man $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}$, und $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}$; es ist demnach
$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]} \pm \sqrt{[\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b)}]}$

Z. B. $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt{(3 + \sqrt{8})} = 1 + \sqrt{2}$
$\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})} = \sqrt{(7 + \sqrt{48})} = 2 + \sqrt{3}$
$\sqrt{(11 - 6\sqrt{2})} = \sqrt{(11 - \sqrt{72})} = 3 - \sqrt{2}$.

## Von der Auflösung der unbestimmten Aufgaben.

### §. 224.

Wenn aus den Bedingungen einer Aufgabe nicht so viele Gleichungen abgeleitet werden können, als unbekannte Größen vorhanden sind, so ist es ein Zeichen, daß die vorgelegte Aufgabe unbestimmt sey; und es können für jede unbekannte Größe mehrere, ja zuweilen unendlich viele Werthe gefunden werden, die theils positiv, theils negativ, ganz, oder gebrochen sind, und die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Art, wie solche gefunden werden, ist folgende: Man schaffe (nach §. 221) durch Verminderung der Gleichungen so viele unbekannte Größen weg, als möglich ist, so wird man zuletzt eine Gleichung erhalten, in welcher sich noch eine unbekannte Größe mehr befindet, als anfangs Gleichungen zu wenig waren. In dieser letzten Gleichung sehe man nur eine einzige Größe für unbekannt an, für die übrigen unbekannten Größen aber nehme man beliebige Werthe an, und bestimme erstere dadurch; diese Werthe substituire man in den vorhergehenden Gleichungen (wie §. 221), so werden

auch die übrigen weggeschafften unbekannten Größen gefunden. Als z. B.

1) Drey Zahlen zu finden, deren Summe = 15, die Summe der ersten und dritten aber der Differenz gleich sey, wenn man die erste von der zweyten abziehet.

Auflösung. Benennet man die erste Zahl mit $x$ die zweyte mit $y$, und die dritte mit $z$, so ist laut Beding

$x + y + z = 15$ = = = = = = $A$

und $x + z = y - x$ = = = = = = $B$

Aus der Gleichung $A$ ist $x = 15 - y - z$, und aus $B$ ist $x = \frac{y - z}{2}$; also auch

$$15 - y - z = \frac{y - z}{2} \quad = \quad = \quad = \quad = \quad C$$

woraus $y = 10 - \frac{1}{3} z$, eine Gleichung, worin noch 2 unbekannte Größen sind; weil aus den Bedingungen der Aufgabe um eine Gleichung zu wenig abgeleitet werden konnte. Man nehme demnach in der Gleichung $C$ für $z$ einen beliebigen positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Werth an, bestimme dadurch $y$, und substituire beyde Werthe in der Gleichung $A$, so läßt sich auch $x$ finden.

Es sey $z = 1, 2, 3, 4, 5,$ = = = $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ =

so ist $y = 9\frac{2}{3}, 9\frac{1}{3}, 9, 8\frac{2}{3}, 8\frac{1}{3},$ = = = $9\frac{5}{6}, 9\frac{8}{9}$ =

und $x = 4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 3, 2\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3},$ = = = $4\frac{2}{3}, 4\frac{7}{9}$ =

2) Vier Zahlen zu finden, deren Summe = 18 ist, und wenn man zu der ersten das zweyfache der zweyten, das dreyfache der dritten, und das vierfache der vierten addirt, so soll 50 zum Vorschein kommen.

Auflösung. Es sey die erste Zahl = $x$, die zweyte = $y$, die dritte = $z$, und die vierte = $u$, so ist laut Beding:

$x + y + z + u = 18$ = = = = $A$.

und $x + 2y + 3z + 4u = 50$ = = = = $B$

Aus der Gleichung $A$ ist $x = 18 - y - z - u$, und aus $B$ ist $x = 50 - 2y - 3z - 4u$; also auch

$18 - y - z - u = 50 - 2y - 3z - 4u$ = $C$

woraus folgt $y = 32 - 2z - 3u$, eine Gleichung, die noch

3 unbekannte Größen enthält, weil aus den Bedingungen der Aufgabe um 2 Gleichungen zu wenig abgeleitet werden konnten. Man nehme demnach in der Gleichung $C$ für $z$ und $u$ willkührliche Werthe an, bestimme daraus $y$, und substituire diese Werthe in $A$, so läßt sich auch $x$ finden. Es sey nun z. B.

$z =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6 , — 1 =
und $u =$ 2, 3, 4, 5, 6, 7 , — 7 =
so ist $y =$ 24, 19, 14, 9, 4, — 1 , + 55 =
und $x =$ — 9, — 6, — 3, 0, 3, 6 , — 29 =

Und so könnte für $z$ und $u$ jeder beliebige andere Werth angenommen werden, wo sich sodann $y$ und $x$ bestimmen läßt, Man sieht aus diesem, daß eine Aufgabe um so unbestimmter ist, je mehr unbekannte Größen in der letzten Gleichung übrig bleiben.

3) Ein Kaufmann ist 100 Fl. schuldig: sein Gläubiger begehrt zweyerley Tuch dafür; die Elle vom ersten kostet 9 Fl., und vom zweyten 7 Fl. Wie viel soll er ihm von jeder Gattung geben?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Ellen von der ersten Gattung $= x$, und von der zweyten $= y$, so muß $9x + 7y = 100$ seyn, woraus $y = \frac{100 - 9x}{7}$ folget; und da keine Gleichung mehr vorhanden ist, so muß wieder für $x$ ein beliebiger Werth angenommen werden. Weil aber hier in dieser Aufgabe keine unbekannte Größe negativ erscheinen darf, so kann $x$ nur so groß angenommen werden, damit $9x < 100$, oder $x < \frac{100}{9}$ ist, weil sonst $y$ negativ ausfallen müßte; setzt man demnach $x =$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,
so ist $y =$ 13, $\frac{87}{7}$, $\frac{78}{7}$, $\frac{64}{7}$, $\frac{55}{7}$, $\frac{46}{7}$, $\frac{37}{7}$, 4, $\frac{19}{7}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{1}{7}$.
Und so könnten auch für $x$ was immer für Brüche angenommen werden, wenn sie nur $\frac{100}{9}$ nicht übersteigen.

4) Es hat Jemand dreyerley Weine: vom ersten kostet die Maß 36 Kr., vom zweyten 24 Kr., und vom dritten 16 Kr.;

er will hiervon einen Eymer mischen, dessen Maß 20 Kr. werth ist. Wie viel kann von jedem genommen werden?

Auflösung. Die Anzahl der Maßen vom ersten sey $= x$, vom zweyten $= y$, und vom dritten $= z$, so ist

$x + y + z = 40$ = = = = = $A$

und $36x + 24y + 16z = 40 . 20$ = = = $B$

Aus der Gleichung $A$ ist $x = 40 - y - z$, und aus $B$ ist $x = \frac{40 . 20 - 24y - 16z}{36} = \frac{200 - 4z - 6y}{9}$; also auch $40 - y - z = \frac{200 - 4z - 6y}{9}$, woraus $y = \frac{160 - 5z}{3}$, und $x = \frac{2z - 40}{3}$, folget. Weil nun hier ebenfalls keine negativen Größen zugelassen werden können, so muß $5z < 160$ oder $z < 32$ angenommen werden, sonst wäre $y = 0$, oder negativ; es muß aber auch $z > 20$, sonst ist $x = 0$, oder negativ. Man setze demnach

$z = 21, 22, 23, 24$ = = = $30, 31$

so ist $y = 18\frac{1}{3}, 16\frac{2}{3}, 15, 13\frac{1}{3}$ = = = $3\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}$

und $x = \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, 2, 2\frac{2}{3}$ = = = $6\frac{2}{3}, 7\frac{1}{3}$

## §. 225.

Es ist aus dem Vorhergehenden zu ersehen, daß bey den unbestimmten Aufgaben unendlich viele Werthe für die unbekannten Größen gefunden werden können, wodurch die Bedingungen der Aufgabe erfüllet werden. Allein bey den meisten Aufgaben wird die Anzahl dieser Werthe ungemein dadurch eingeschränkt, daß die gesuchten Größen nicht nur positiv, sondern auch ganze Zahlen seyn müssen. Hierdurch ereignet sich oft der Fall, daß nur einige wenige, ja zuweilen gar keine Werthe für die unbekannten Größen gefunden werden können, um den Bedingungen der Aufgabe Genüge zu leisten. Die Art, unter solchen Bedingungen alle mögliche Werthe der unbekannten Größen zu finden, zeigen folgende Beyspiele:

1) Es sollen aus 12 Centner Pulver 1000 Stuckpatronen, und zwar die dreypfündigen mit 1, die sechspfündigen mit 2,

und die zwölfpfündigen mit 3 Pfund Pulver gefüllet werden. Wie viel kann wohl von jeder Gattung erzeugt werden?

Auflösung. Es sey die Anzahl der dreypfündigen $= x$, der sechspfündigen $= y$, und der zwölfpfündigen $= z$, so ist

$x + y + z = 1000$ = = = = $A$

und $x + 2y + 3z = 1200$ = = = = $B$.

Zieht man die Gleichung $A$ von $B$ ab, so ist $y + 2z = 200$; also $y = 200 - 2z$. Man sieht aus dieser Gleichung, daß, wenn man für $z$ eine ganze Zahl annimmt, auch $y$, und folglich auch $x$ eine ganze Zahl seyn müsse.

Es sey also $z =$ 1, 2, 3, 4 = 99

so ist $y =$ 198, 196, 194, 192 = 2

und $x =$ 801, 802, 803, 804 = 899

2) Es sind in einem Gußhause zweyerley Kanonenröhre gegossen worden: von der ersten Gattung wiegt jedes 16, und von der zweyten 25 Centner; und doch hat man zur zweyten Gattung um einen Centner Metall weniger verbraucht, als zur ersten. Wie viel waren von jeder Gattung?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Kanonen von der ersten Gattung $= x$, und von der zweyten $= y$, so ist $16x - 1 = 25y$; also $x = \frac{25y+1}{16} = y + \frac{9y+1}{16}$. Weil nun $x$ eine ganze Zahl seyn muß, so kann hier für $y$ nicht jede beliebige Zahl, sondern nur eine solche angenommen werden, daß $\frac{9y+1}{16}$ eine ganze Zahl wird. Man setze demnach $\frac{9y+1}{16} = A$, so ist $y = \frac{16A-1}{9} = A + \frac{7A-1}{9}$ = = A.

Da nun $y$ auch eine ganze Zahl seyn muß, so muß auch $\frac{7A-1}{9}$ eine ganze Zahl seyn. Es sey darum $\frac{7A-1}{9} = B$, so ist

$A = \frac{9B+1}{7} = B + \frac{2B+1}{7}$ = = = = B.

Ferner sey, weil $A$ eine ganze Zahl seyn soll, $\frac{2B+1}{7} = C$,

so ist $B = \frac{7C-1}{2} = 3C + \frac{C-1}{2}$ = = = ℭ.

Und da auch $B$ eine ganze Zahl seyn soll, so sey $\frac{C-1}{2} = D$, so ist $C = 2D + 1$. Da nun kein Bruch mehr übrig ist, so substituire man diesen Werth von $C$ in der Gleichung ℭ, so ist $B = 7D + 3$; dieser Werth von $B$ in der Gleichung ℬ substituirt gibt $A = 9D + 4$; und endlich dieser Werth von $A$ in der Gleichung 𝔄 substituirt, gibt $y = 16D + 7$,
und ferner = = = = = $x = 25D + 11$,
wo für $D$ jede beliebige ganze Zahl gesetzt werden darf. Setzet man darum

$D = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ =
so ist $y = 7, 23, 39, 55, 71, 87$ = } ins unendliche.
und $x = 11, 36, 61, 86, 111, 136$ =

3) Es soll eine gewisse Anzahl von Gulden und Kreuzern, z. B. 4 Fl. 15 Kr. in lauter Siebnern und Siebenzehnern ausgezahlt werden: wie viel Stücke müssen von jeder Gattung gegeben werden?

Auflösung. Es sey die Anzahl der Siebner $= x$, und der Siebenzehner $= y$; so ist $7x + 17y$ Kr. $= 4.60 + 15$ Kr.; nähmlich $7x + 17y = 255$; daraus folgt

$$x = \frac{255 - 17y}{7} = 36 - 2y + \frac{3 - 3y}{7}.$$

Es sey $\frac{3-3y}{7} = A$, so ist $y = \frac{3-7A}{3} = 1 - 2A - \frac{A}{3}$ = 𝔄.

Es sey $-\frac{A}{3} = B$, so ist $A = -3B$. Dieser Werth von $A$ in der Gleichung 𝔄 substituirt, gibt $y = 7B + 1$,
Und ferner = = = = = $x = 34 - 17B$.

Es sey nun $B = 0, 1, 2$
so ist $y = 1, 8, 15$
und $x = 34, 17, 0$

Die Zahlung kann demnach nur auf zweyerley Art geschehen; entweder mit 34 Siebnern und 1 Siebenzehner; oder mit 17 Siebnern und 8 Siebenzehnern.

4) Peter ist dem Paul 12 Kr. schuldig; sie haben keine andern Münzen, als Siebner und Siebenzehner. Wie soll Peter den Paul bezahlen?

Auflösung. Der Peter gebe dem Paul $x$ Siebner, dagegen gebe Paul dem Peter $y$ Siebenzehner zurück; da nun die Schuld getilget seyn soll, so ist $7x = 17y + 12$.

Hieraus ist $x = \frac{17y + 12}{7} = 2y + 1 + \frac{3y + 5}{7}$.

Es sey $\frac{3y+5}{7} = A$ so ist $y = \frac{7A-5}{3} = 2A - 1 + \frac{A-2}{3}$ = A.

Es sey $\frac{A-2}{3} = B$, so ist $A = 3B + 2$. Dieser Werth von $A$ substituirt gibt $y = 7B + 3$

und ferner = = $x = 17B + 9$

Es sey nun $B = 0, 1, 2, 3$ = $-1, -2, -3$

so ist $y = 3, 10, 17, 24$ = $-4, -11, -18$

und $x = 9, 26, 43, 60$ = $-8, -25, -42$

Die negativen Zeichen zeigen an, daß die Zahlung verkehrter Maßen geschehen könne, indem z. B. Peter dem Paul 4 Siebenzehner gibt, und von selbem 8 Siebner zurück erhält. Die Zahlungen können in beyden Fällen auf unendlich viele Arten geschehen.

Da ein Siebner und ein Siebenzehner zusammen 24 Kr. betragen, und jede gerade Anzahl der Gulden, in Kreuzern ausgedrückt, sich durch 24 Kr. genau theilen läßt; so kann jede gerade Anzahl der Gulden in gleichviel Siebnern und Siebenzehnern ausgezahlt werden. Denn es sey $a$ eine gerade Zahl der Gulden, so ist $\frac{a.60}{24} = \frac{a.6.10}{6.4} = \frac{a.10}{4}$ = einer ganzen Zahl; woraus die Regel fließt: daß man an die Zahl der Gulden, welche in Siebnern und Siebenzehnern auszuzahlen ist, eine Null anhängen, und hernach durch 4 dividiren soll, so wird der Quotient die Anzahl der Siebner und Siebenzehner anzeigen. Wenn z. B. 6 Fl. auszuzahlen wären, so ist $\frac{60}{4} = 15$ Siebner, und eben so viel Siebenzehner. Wäre aber eine unge-

rade Anzahl der Gulden in Siebnern und Siebenzehnern auszuzahlen, so kann solches zwar auf die nähmliche Art erhalten werden; weil aber die Division mit 4 da nicht genau aufgeht, sondern allezeit ein halbes von 24 Kreuzern noch zu zahlen übrig bleibt, so muß solches nach der vorigen Aufgabe durch die Umtauschung geschehen. Z. B. es wären 7 Fl. auf diese Art zu bezahlen, so ist $\frac{70}{4} = 17\frac{1}{2}$; wegen dieses Restes zieht man von dem Quotienten 17 einmahl 3 ab, so hat man 14 Siebenzehner, und sodann addire man 9 hinzu, so hat man 26 Siebner; oder man vermehre den Quotienten um 4, so erhält man die Siebenzehner, und vermindere denselben um 8, so hat man die Siebner.

5) Eine Zahl zu finden, welche durch 2 dividirt 1, durch 3 dividirt 2, und durch 4 dividirt 3 übrig läßt.

Auflösung. Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so müssen die drey Ausdrücke $\frac{x-1}{2}$, $\frac{x-2}{3}$, $\frac{x-3}{4}$ ganze Zahlen seyn. Man setze demnach den ersten Ausdruck $\frac{x-1}{2} = A$, so ist $x = 2A + 1$ = = = = = = = A. Diesen Werth substituire man in den zweyten Ausdruck statt $x$, so muß $\frac{2A+1-2}{3}$ eine ganze Zahl seyn. Es sey $\frac{2A-1}{3} = B$, so ist $A = \frac{3B+1}{2} = B + \frac{B+1}{2}$ = = B. Es sey $\frac{B+1}{2} = C$, so ist $B = 2C - 1$.

Dieser Werth in der Gleichung B substituirt gibt $A = 3C - 1$; und dieser Werth in der Gleichung A substituirt gibt $x = 6C - 1$ = = = = = = = = = C.

Diesen Werth für $x$ substituire man in den dritten Ausdruck $\frac{x-3}{4}$, so muß $\frac{6C-1-3}{4} = \frac{6C-4}{4} = C - 1 + \frac{C}{2}$ eine ganze Zahl seyn; man setze $\frac{C}{2} = D$; so ist $C = 2D$.

Setzet man nun diesen Werth für $C$ in der Gleichung C, so ist endlich $x = 12\ D - 1$.

Setzet man nun $D =$ 1, 2, 3 = = = =
so ist $x =$ 11, 23, 35 = = = =

Es ist aus diesem hinlänglich zu ersehen, wie man in dergleichen Fällen zu verfahren habe; nur ist noch zu erinnern, daß, wenn in einer solchen Gleichung die Coefficienten von $x$ und $y$ einen gemeinschaftlichen Factor haben, welchen das übrige Glied in der Gleichung nicht mit gemein hat, und folglich die Gleichung sich nicht mehr abkürzen läßt, sich die unbekannten Größen $x$ und $y$ in ganzen Zahlen nicht finden lassen. Denn es sey in der allgemeinen Gleichung $Ax + B = Cy$, wo $A$, $B$, $C$. ganze Zahlen vorstellen, $A$ und $C$ durch $a$ theilbar, nähmlich $\frac{A}{a} = D$, und $\frac{C}{a} = E$; $B$ aber sey durch $a$ nicht theilbar, so ist $Dx + \frac{B}{a} = Ey$, und $\frac{B}{a} = Ey - Dx$. Wären nun $x$ und $y$ ganze Zahlen, so sind auch $Dx$ und $Ey$ ganze Zahlen, und folglich auch ihre Differenz eine ganze Zahl, welches aber hier nicht ist, da $B$ durch $a$ nicht theilbar ist. So z. B. lassen sich aus der Gleichung $9x = 15y - 4$ die unbekannten Größen $x$ und $y$ nicht in ganzen Zahlen bestimmen, weil man zuletzt den Ausdruck erhält $A = \frac{6B - 4}{3} = 2B - \frac{4}{3}$. Wohl aber lassen sich aus der Gleichung $9x = 15y - 6$ die Größen $x$ und $y$ in ganzen Zahlen finden, weil die Gleichung durch 3 abgekürzt $3x = 5y - 2$ gibt, wo die Coefficienten von $x$ und $y$ keinen gemeinschaftlichen Factor mehr haben.

6. Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder ein vollkommenes Quadrat ist.

Auflösung. Es sollen die Zahlen $x^2$, $y^2$, und $x^2 + y^2 = z^2$ seyn. Es sey nun $z = A + y$, so ist $x^2 + y^2 = A^2 + 2Ay + y^2$ nähmlich $x^2 = A^2 + 2Ay$, woraus $y = \frac{x^2 - A^2}{2A}$ ist, und also $z = \frac{x^2 + A^2}{2A}$.

Nun kann für $x$ und $A$ jeder beliebige Werth angenommen werden, wodurch sich $y$ und $z$ bestimmen lassen; nur muß, wenn die drey Quadrate lauter ganze Zahlen seyn sollen, $x$ ein vielfaches von $A$, und $x + A$ eine gerade Zahl seyn. Es sey z. B.

$A = 1, 1, 1 = 2, 2 = 3, 3$
und $x = 3, 5, 7 = 4, 6 = 9, 15$
so ist $y = 4, 12, 24 = 3, 8 = 12, 36$
und $z = 5, 13, 25 = 5, 10 = 15, 39$

7. Drey Zahlen von solcher Eigenschaft zu finden, daß sowohl die Summe von allen dreyen, als auch von jeden zwey zusammen genommen eine vollkommene Quadratzahl sey.

Auflösung. Setzet man die drey gesuchten Zahlen $= x, y, z$, und die Wurzeln der vier Quadratzahlen $u, r, s, t$, so hat man

$x + y + z = u^2$
$x + y = r^2$
$x + z = s^2$
$y + z = t^2$

vier Gleichungen, und sieben unbekannte Größen, wodurch sich in diesem Falle nichts bestimmen läßt.

Da nun diese Aufgabe so sehr unbestimmt ist, so setze man noch einige willkührliche Bedingungen hinzu, aber doch so, daß die Aufgabe noch immer unbestimmt verbleibe. Man setze z. B., daß die Wurzel $r$ um 1 kleiner als $u$, und $s$ um 1 kleiner als $r$ sey; so erhält man folgende Gleichungen:

$x + y + z = u^2 = = = = = = = A$
$x + y = (u - 1)^2 = u^2 - 2u + 1 = = B$
$x + z = (u - 2)^2 = u^2 - 4u + 4 = = C$
$y + z = t^2$

daraus folgt $z = 2u - 1$
$y = 4u - 4$
$x = u^2 - 6u + 5 = (u - 2)^2 - (2u - 1)$
$t = \sqrt{\ }(6u - 5)$.

Und nun muß man suchen eine solche Zahl für $u$ anzunehmen, daß $\sqrt{\ }(6u - 5)$ eine vollkommene Quadratzahl wird. Setzet man $u = 5$, so ist auch $t = 5$, und daher $z = 9$, $y = 16$, und $x = 0$; setzet man aber $u = 9$, so ist $t = 7$, $z = 17$, $y = 32$, und auch $x = 32$; setzet man ferner $u = 21$, so ist $t = 11$, $z = 41$, $y = 80$, und $x = 320$. Man kann auch

für $u$ gebrochene Zahlen setzen; z. B. $u = \frac{3}{2}$, so ist $t = 2$, $z = 2$, $y = 2$, und $x = -\frac{7}{4}$, u. s. w.

8. Zwey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Differenz der Würfel der Differenz der Wurzeln gleich sey.

Auflösung. Es sey die eine Zahl $= x$, und die andere $= y$, so ist vermöge Bedingung $x^3 - y^3 = x - y$; daraus folgt durch die Division $x^2 + xy + y^2 = 1$, und durch fernere Reduction $y = \frac{-x + \sqrt{(4 - 3x^2)}}{2} = A$.

Um diesen Ausdruck rational zu machen, setze man $\sqrt{(4 - 3x^2)} = nx - 2$, so ist $4 - 3x^2 = n^2x^2 - 4nx + 4$; daraus folgt $x = \frac{4n}{n^2 + 3}$.

Setzt man ferner diesen Werth für $x$ in $A$, so ist $y = \frac{n^2 - 2n - 3}{n^2 + 3}$. Und nun kann man für $n$ jeden beliebigen Werth annehmen, z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..... und dadurch $x$ und $y$ bestimmen; für $n = 6$, ist $x = \frac{8}{13}$, und $y = \frac{7}{13}$.

Mehrere hierher gehörige analytische Untersuchungen findet man in Herrn L. Eulers vollständ. Anleit. zu Algebra II Th.

## §. 226.

Es gibt Aufgaben, welche bestimmt zu seyn scheinen, und doch wirklich unbestimmt sind; z. B. drey Zahlen zu finden, wo die Summe der ersten und zweyten $= 40$, die Summe der zweyten und dritten $= 100$, und die Differenz der dritten und ersten $= 60$ sey. Benennet man die drey Zahlen mit $x$, $y$, $z$, so ist laut Bedingung

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ y + z &= 100 \\ \text{und } z - x &= 60 \end{aligned}$$

wo es scheinet, daß die Aufgabe bestimmt sey, weil eben so viele Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Allein die letzte Bedingung zeiget keine neue Eigenschaft der unbekannten Größen an, sondern wiederhohlt nur dasjenige, was die zwey ersten Bedingungen ausgedrückt haben; denn man darf nur die erste Gleichung von der zweyten abziehen, so hat man die dritte;

folglich ist diese Aufgabe unbestimmt, und man findet nach (§. 224) die Werthe der unbekannten Größen

$x = 1, 2, 3, 4, 5 \quad = \quad = \quad = 39$
$y = 39, 38, 37, 36, 35 \quad = \quad = \quad = 1$
$z = 61, 62, 63, 64, 65 \quad = \quad = \quad = 99$

## §. 227.

Endlich gibt es Aufgaben, deren Auflösung unmöglich ist, das ist, wo für die unbekannten Größen gar keine Werthe gefunden werden können, um den Bedingungen Genüge zu leisten. Dieses ereignet sich entweder, wenn die Bedingungen der Aufgabe sich selbst widersprechen, oder auch wenn die Aufgabe rationale, positive, oder ganze Zahlen fordert, und doch nur irrationale, negative, oder gebrochene von der verlangten Eigenschaft gefunden werden können. Sowohl eines als das andere erfährt man (wo die Unmöglichkeit nicht ohnehin schon aus den Bedingungen klar in die Augen fallen sollte), wenn man aus den Gleichungen entweder etwas ungereimtes, oder für den Werth einer unbekannten Größe eine unmögliche Wurzel (§. 119, III.), oder auch einen negativen oder gebrochenen Werth findet, den die Natur der Sache nicht zuläßt.

### Beyspiele.

1. Aufgabe. Drey Zahlen zu finden, wo die Summe der ersten und zweyten = 28, die Summe der zweyten und dritten = 30 und die Differenz, wenn die dritte von der ersten abgezogen wird, = 15 sey.

Auflösung. Benennet man die drey Zahlen mit $x, y, z$, so ist laut Bedingung $x + y = 28$, $y + z = 30$, und $x - z = 15$. Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweyten, so ist $z - x = 2$; und diese Gleichung zu der dritten addirt gibt $x - z + z - x = 17$, nähmlich $0 = 17$, welches ungeräumt ist; und folglich ist diese Aufgabe unmöglich.

2. Aufgabe. Es kauft Jemand einige Ellen Tuch, und gibt für jede Elle eben so viele Gulden, als Ellen Tuch da sind;

er verkauft sie wieder, und bekommt für alle Ellen zweymahl so viele Gulden als Ellen da waren, und gewinnt bey diesem Handel 5 Fl. Wie viel Ellen waren es?

Auflösung. Es sey $x$ = der Anzahl Ellen Tuch, so ist seine Auslage $= x^2$, und die Einnahme $= 2x$, folglich ist laut Beding. $x^2 = 2x - 5$, woraus man findet, $x = 1 \pm \sqrt{-4}$. Die Aufgabe ist demnach unmöglich.

3. Aufgabe. In einem Zeughause sind dreymahl so viel Kanonen, als Pöller; und als man 5 Kanonen und 3 Pöller wegführte, so blieben nur noch halb so viel Pöller als Kanonen.

Auflösung. Es sey die Anzahl der Pöller $= x$, so ist die Anzahl der Kanonen $= 3x$; und nachdem 5 Kanonen und 3 Pöller weggeführt wurden, blieben noch $x - 3$ Pöller und $3x - 5$ Kanonen. Es ist also laut Beding $\frac{3x-5}{2} = x - 3$, woraus $x = -1$ folgt. Da aber hier keine negative Zahl Statt finden kann, so ist die Aufgabe unmöglich.

4. Aufgabe. Zwanzig Personen, theils Männer, theils Weiber, waren in einer Gesellschaft, es waren aber 5 Männer mehr als Weiber. Wie viel waren Männer und wie viel Weiber?

Auflösung. Benennet man die Anzahl der Männer mit $x$, und die Anzahl der Weiber mit $y$, so ist $x = 12\frac{1}{2}$, und $y = 7\frac{1}{2}$. Weil aber hier kein Bruch zugelassen werden kann, so ist die Aufgabe ebenfalls unmöglich.

## §. 228.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe als Exponent erscheinen sollte, so läßt sie sich nach den bisher gegebenen Gründen nicht anders, als durch Versuchen (tentando) bestimmen. Z. B. wenn in der Gleichung $a^x = b$ die Größen $a$ und $b$ in Zahlen bekannt wären, so läßt sich daraus die unbekannte Größe $x$ auf folgende Art finden:

1) Man erhebe $a$ nach und nach zu ihren Potenzen, welche Arbeit erspart wird, wenn man mit einer Potenzentafel versehen ist; gelangt man nun auf diese Art an eine Potenz von $a$,

welche genau so groß, als $b$ ist, so ist die gesuchte Zahl $x$ dem dadurch bekannt gewordenen Exponenten dieser Potenz gleich, und daher ist $x$ in einem solchen Falle eine ganze Zahl. Es sey z. B. $a = 14$ und $b = 537824$, nähmlich es sey aus der Gleichung $14^x = 537824$ die unbekannte Größe $x$ zu suchen, so findet man, daß $(14)^5 = 537824$ sey, und daher ist $x = 5$.

2) Findet man aber bey der Gleichung $a^x = b$ keine Potenz von $a$, welche vollkommen genau $= b$ wäre, so ist die unbekannte Zahl $x$ gleich dem Exponenten der nächst kleinern Potenz, mehr einem Bruche, der sich auf nachstehende Art bestimmen läßt.

Es sey in der Gleichung $a^x = b$, wenn $x$ nach Nr. 1 sich nicht als eine ganze Zahl angeben läßt, $m$ der Exponent der nächst kleinern Potenz von der Wurzel $a$, so daß $a^{m+1} > b$, und $a^m < b$ sey; und die Zahl $b$, durch diese nächst kleinere Potenz $a^m$ dividirt, gebe den Quotienten $c$.

Ferner sey $n$ der Exponent der nächst kleinern Potenz vom gefundenen Quotienten $c$ als Wurzel betrachtet, wo nun die vorige Wurzel $a$ als eine Potenz angesehen wird; es sey nähmlich $c^n < a$, $c^{n+1} > a$, wenn nicht $c^n = a$ seyn sollte. Sodann wird $a$ durch $c^n$ dividiret, um auf solche Art die fernern nächst kleinern Exponenten $p$, $q$, $r$ u. s. w. zu erhalten; und daraus läßt sich in der angeführten Gleichung der Werth für die unbekannte Größe $x$ mittelst der dadurch bekannt gewordenen Exponenten $m$, $n$, $p$, $q$, $r$ ꝛc. auf folgende Art durch einen zusammenhängenden Bruch angeben:

$b : a^m = c$
$a : c^n = d$
$c : d^p = e$
$d : e^q = f$
$e : f^r = \text{ꝛc.}$

$$x = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \text{ꝛc.}}}}}$$

Z. B. in der vorgelegten Gleichung $a^x = b$, sey $a = 27$, und $b = 177147$, wo $x$ gesucht werden soll,

so ist $177147 : (27)^3 = 9$; daher $m = 3$

$27 : (9)^1 = 3$ $n = 1$

$9 : (3)^2 = 1$ $p = 2$

und folglich $x = 3 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 3\frac{1}{3}$.

Eben so läßt sich aus der Gleichung $(512)^x = 33554432$ der Exponent $x$ bestimmen,

denn es ist $33554432 : (512)^2 = 128$; daher $m = 2$

$512 : (128)^1 = 4$ $n = 1$

$128 : (4)^3 = 2$ $p = 3$

$4 : (2)^2 = 1$ $q = 2$

und folglich $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = 2\frac{7}{9}$.

Daß dieses angeführte Verfahren, den unbekannten Exponenten zu finden richtig sey, erhellet aus folgender Betrachtung:

In der Gleichung $a^x = b$ ist vermöge Voraussetzung $a^m < b$, und $a^{m+1} > b$, daher kann nur $x = m + \frac{1}{y}$ seyn; und es ist sodann $a^{m + \frac{1}{y}} = b$, nähmlich $a^m . a^{\frac{1}{y}} = b$, und $a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^m}$.

Setzet man nun den Quotienten $\frac{b}{a^m} = c$, so ist auch $a^{\frac{1}{y}} = c$, und $c^y = a$. Es sey nun wieder $c^n < a$, und $c^{n+1} > a$; daher kann $c^{n + \frac{1}{z}} = a$ seyn; und es ist sodann $y = n + \frac{1}{z}$, wegen $c^y = a$; wo nun auch aus der Gleichung $c^{n + \frac{1}{z}} = a$ oder $c^n . c^{\frac{1}{z}} = a$ wieder folgt, $\frac{a}{c^n} = c^{\frac{1}{z}} = d$, und $d^z = c$. Es

sey nun wieder $d^p < c$, und $d^{p+1} > c$; also ist $d^p + \frac{1}{u} = c$, und $z = p + \frac{1}{u}$; ferner sey $\frac{c}{d^p} = e$, so ist $d^{\frac{1}{u}} = e$, und $e^u = d$, wo nun $u = q + \frac{1}{r}$ sey u. s. w. Substituirt man nun den Werth $q + \frac{1}{r}$ statt $u$ in der Gleichung $z = p + \frac{1}{u}$, so ist $z = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}$; dieser Werth in der Gleichung $y = n + \frac{1}{z}$ für $z$ gesetzt gibt

$$y = n + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}}; \text{ und also } x = m + \frac{1}{n + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}}}$$

weil $x = m + \frac{1}{y}$ ist.

Wenn man durch dieses Verfahren auf einen Quotienten gelanget, der genau $= 1$ ist, so ist dadurch die Arbeit geendigt, und der gesuchte Exponent $x$ läßt sich in einem solchen Falle völlig genau angeben. Wenn hingegen niemahls ein Quotient genau $= 1$ seyn kann, so hat der gesuchte Exponent $x$ entweder einen irrationalen, oder auch einen transcendenten Werth, von solcher Beschaffenheit nähmlich, daß man ihn weder durch ganze, noch durch gebrochene Zahlen, und auch nicht durch Wurzelgrößen genau angeben kann; nur durch eine hinlängliche Annäherung kann man einen solchen Exponenten bestimmen, und zwar wenn man das angeführte Verfahren so weit fortsetzt, bis man auf einen Quotienten gelanget, der schon ziemlich nahe $= 1$ ist.

Es sey z. B. $10^x = 625$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| so ist | $625 : (10)^2$ | $= 6{,}25$ | $m = 2$ | |
| | $10 : (6{,}25)^1$ | $= 1{,}6$ | $n = 1$ | |
| | $6{,}25 : (1{,}6)^3$ | $= 1{,}52587$ | $p = 3$ | |
| | $1{,}6 : (1{,}52587)^1$ | $= 1{,}04857$ | $q = 1$ | |
| | $1{,}52587 : (1{,}04857)^8$ | $= 1{,}04404$ | $r = 8$ | |
| | $1{,}04857 : (1{,}04404)^1$ | $= 1{,}00433$ | $s = 1$ | |
| | $1{,}04404 : (1{,}00433)^9$ | $= 1{,}00416$ | $t = 9$ | |
| | $1{,}00433 : (1{,}00416)^1$ | $= 1{,}00016$ | $u = 1$ | |

| | 1, | 3, | 1, | 8, | 1, | 9, | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$, | $\frac{3}{4}$, | $\frac{4}{5}$, | $\frac{35}{44}$, | $\frac{39}{49}$, | $\frac{386}{485}$, | $\frac{425}{534}$ |

nähmlich $x = 2\frac{4}{5}\frac{2}{3}\frac{5}{4} = 2{,}7958801$.

Es wäre überflüssig, diese Untersuchung weiter auszuführen, weil in der Folge die unbekannten Exponenten mittelst der Logarithmen viel leichter zu bestimmen seyn werden.

# Sechste Vorlesung.

## Von den Reihen und ihrer Anwendung.

### I. Abschnitt.

### Von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

#### Von den Reihen überhaupt.

§. 229.

Eine Folge von Größen, welche nach einem bekannten Gesetze wachsen, oder abnehmen, wird überhaupt eine Reihe, oder Progression, und zwar im ersten Falle eine steigende, und im andern eine fallende Reihe genannt. Die Größen, welche die Reihe bilden, heißen die Glieder der Reihe. So z. B. ist 1, 2, 4, 8, 16 eine steigende Reihe von 5 Gliedern, wo die Glieder nach einem solchen Gesetze wachsen, daß jedes nachfolgende Glied doppelt so groß ist, als das nächst vorhergehende. Hingegen ist 24, 18, 12, 6 eine fallende Reihe von 4 Gliedern, wo jedes nachfolgende Glied aus dem nächst vorhergehenden entsteht, wenn man solches um die Differenz 6 vermindert.

Eine Reihe, deren Glieder nach dem einmahl bekannten Gesetze ohne Ende fortlaufen, wird eine unendliche Reihe genannt. So ist z. B. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, .... und so ohne Ende fort, eine unendliche Reihe. Wenn aber die Reihe irgendwo, z. B. mit 1000 Gliedern, oder wo immer aufhört, so ist sie eine endliche Reihe.

## §. 230.

Es ist aus diesem zu ersehen, daß, wenn einmahl das Gesetz einer Reihe bekannt ist, die Reihe nach Belieben fortgesetzt, und das sovielte Glied der Reihe, als man will, bestimmet werden könne; wie auch, daß man die Summe von jeder Anzahl Glieder der Reihe durch die Addition finden könne. Allein wie beschwerlich wäre es nicht, wenn man, um z. B. das tausendste Glied einer Reihe zu bestimmen, vorher alle 999 Glieder entwickeln müßte? Noch beschwerlicher wäre es 1000 Glieder (nach §. 17) zu addiren, um die Summe einer solchen Reihe von 1000 Gliedern zu erhalten.

Es ist deßwegen nothwendig, daß man bey jeder vorkommenden Reihe einen solchen algebraischen Ausdruck, nähmlich eine Function von $n$ (§. 57) ausfindig mache, welche so beschaffen ist, daß man, wenn in der Function $n = 1$ gesetzet wird, dadurch das erste Glied der Reihe erhalte; wenn man $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ꝛc. setzet, dadurch auch das zweyte, dritte, vierte Glied der Reihe zum Vorschein komme. Eine solche Function von $n$, welche diese Eigenschaft hat, wird deßwegen das allgemeine, oder das $n^{te}$ Glied der Reihe genannt. So z. B. ist in der Reihe 2, 5, 8, 11, 14 . . . das allgemeine Glied $= (3n - 1)$; denn man setze nur nacheinander $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, u. s. w. so erhält man das erste, zweyte, dritte, vierte Glied der angeführten Reihe. Eben so sind

| in den Reihen | | | | | | | die $n^{ten}$ Glieder |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 5, | 10, | 15, | 20, | 25 | = = = | $5n$ |
| II. | 4, | 7, | 10, | 13, | 16, 19 | = = = | $3n + 1$ |
| III. | 1, | 4, | 9, | 16, | 25 | = = = | $n^2$ |
| IV. | 1, | 3, | 6, | 10, | 15, 21 | = = = | $\frac{n^2 + n}{2}$ |
| V. | 3, | 6, | 12, | 24, | 48 | = = = | $3 . 2^{n-1}$. |

Auf gleiche Weise muß man auch bey jeder Reihe eine andere algebraische Function von $n$ aufsuchen, welche eine solche Eigenschaft hat, daß, wenn man in der Function nacheinander $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ u. s. w. setzet, dadurch die Summe von einem, von zwey, von drey, von vier Gliedern ꝛc. der

Reihe zum Vorschein komme; eine solche Function von $n$ wird die Summenformel von $n$ Gliedern, oder das summatorische Glied der Reihe genannt.

So z. B. ist in der Reihe 2, 5, 8, 11, 14 . . . . die Summenformel $\frac{3n^2 + n}{2}$; denn setzt man in dieser Formel $n = 1$, so erhält man bloß das erste Glied 2; setzt man ferner $n = 2$, sodann $n = 3$, $n = 4$ u. s. w., so erhält man 7, 15, 26, 40 u. s. w. für die Summe von 2, 3, 4, 5 Gliedern der Reihe.

Eben so sind die Summenformeln der fünf obenangeführten Reihen folgende: $\frac{5n^2 + 5n}{2}$ bey I.; $\frac{3n^2 + 5n}{2}$ bey II.; $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ bey III.; $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ bey IV.; $3(2^n - 1)$ bey V.; weil jede dieser Formeln so beschaffen ist, daß sie die Summe so vieler Glieder der betreffenden Reihe zum Vorschein bringet, als man die Größe $n$ Einheiten gelten läßt.

## §. 231.

Wäre in einer Reihe die Summenformel, als eine Function von $n$ schon bekannt, so läßt sich das $n^{te}$ Glied leicht daraus bestimmen. Denn man setze nur $n - 1$ in der Summenformel statt $n$, so wird man die Summe von $(n - 1)$ Gliedern haben; zieht man sodann diese Summe von $(n - 1)$ Gliedern ab, so wird auf diese Art das $n^{te}$ Glied erhalten, weil die erste Summe von $n$ Gliedern um dieses $n^{te}$ Glied größer ist, als die zweyte Summe von $(n - 1)$ Gliedern. Z. B. in der Reihe 3, 7, 11, 15, 19 . . . . ist die Summe von $n$ Gliedern $= 2n^2 + n$; folglich ist die Summe von $(n - 1)$ Gliedern $= 2(n - 1)^2 + (n - 1) = 2n^2 - 3n + 1$; zieht man nun diese Summe von der Summe von $n$ Gliedern ab, so ist $(2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1) = 4n - 1$ = dem $n^{ten}$ Gliede dieser Reihe.

Diese Regel aus der Summenformel von $n$ Gliedern das allgemeine Glied abzuleiten, ist überall anwendbar, sobald bey was immer für einer Reihe das summatorische Glied für bekannt angenommen wird. Allein gemeiniglich wird aus dem bekannten Gesetze der Reihe zuerst das $n^{te}$ Glied, und aus die-

sem sodann die Summenformel bestimmet. Wie aber dieses zu geschehen habe, muß bey jeder Gattung der Reihen insbesondere gezeiget werden.

## Von den arithmetischen Reihen.

### §. 232.

Eine Reihe, in welcher gleiche Differenzen erhalten werden, wenn man jedes vorhergehende Glied von dem nächst darauffolgenden abziehet, wird eine arithmetische Reihe genannt. Z. B. 1, 4, 7, 10, 13, . . . ingleichen 12, 10, 8, 6 . . . sind arithmetische Reihen, weil in beyden die Differenzen beständig sind. In der ersten Reihe ist die beständige Differenz = 3, und in der zweyten = — 2. Man sieht hieraus, daß bey einer arithmetischen Reihe nur zwey Glieder, oder das erste Glied, und die Differenz hinreichen, um die Reihe so weit als beliebig ist, fortsetzen zu können.

Es sey nun das erste Glied einer arithmetischen Reihe = $a$, und die Differenz = $d$, in der Bedeutung, daß jedes vorhergehende Glied vom nächstfolgenden abgezogen werde, so ist das zweyte Glied = $a + d$; daraus folgt das dritte Glied der Reihe = $a + 2d$; ferner das vierte = $a + 3d$, das fünfte = $a + 4d$ u. s. w. Es kann daher jede sowohl steigende, als auch fallende arithmetische Reihe von gleichen Differenzen durch nachstehende Formel vorgestellet werden:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stelle | 1, | 2, | 3, | 4, | = | = | = $n$ |
| Reihe | $a$, | $(a + d)$, | $(a + 2d)$, | $(a + 3d)$, | = | = | $t$ |
| Differenz | | $d$, | $d$, | $d$, | | | |

allwo $d$ bey einer steigenden Reihe eine positive, und bey einer fallenden eine negative Größe bedeutet. Z. B. man setze in dieser Formel $a = 1$ und $d = 3$, so hat man die erste obenangeführte Reihe 1, 4, 7, 10, 13, 16 . . .; setzt man aber $a = 12$, und $d = -2$, so kömmt die zweyte obenangeführte Reihe 12, 10, 8, 6, 4 . . . zum Vorschein.

Das $n^{te}$ oder allgemeine Glied = $t$ in der angeführten Formel einer arithmetischen Reihe ist leicht aus dem Gesetze zu bestimmen, nach welchem die Glieder aufeinander folgen. Denn

da jedes Glied der Reihe, z. B. das 4te aus $a$ und aus so vielen $d$ (aus $3d$) besteht, als demselben Glieder vorhergehen, so ist das $n^{te}$ oder allgemeine Glied, wenn man solches mit $t$ bezeichnet

I. $t = a + (n - 1)\,d$.

Nähmlich das $n^{te}$ Glied einer jeden arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen wird erhalten, wenn man zum ersten Gliede $a$, die mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder $(n - 1)$ multiplicirte Differenz $d$ hinzusetzet. Z. B. in der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 . . . ist das $n^{te}$ Glied $= 1 + 1\,(n - 1) = n$; wegen $a = 1$, und $d = 1$; das $n^{te}$ Glied der ungeraden natürlichen Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . ist $t = 1 + 2\,(n - 1) = 2n - 1$, wegen $a = 1$ und $d = 2$; das $n^{te}$ Glied der Reihe der geraden natürlichen Zahlen 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . . ist $t = 0 + 2\,(n - 1) = 2n - 2$, wegen $a = 0$ und $d = 2$; und in der obenangeführten Reihe 12, 10, 8, 6, . . . ist das $n^{te}$ Glied $t = 12 - 2\,(n - 1) = 14 - 2n$, wegen $a = 12$, $d = -2$.

Um nun auch die Summe von jeder beliebigen Anzahl der Glieder in der angeführten allgemeinen Formel der arithmetischen Reihen zu finden, bezeichne man indessen die Summe von fünf Gliedern mit $s$; so ist, wenn die Reihe einmahl gerade, und sodann verkehrt geschrieben wird;

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)$$
$$s = (a + 4d) + (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a$$

folglich auch durch die Addition der zwey Gleichungen

$$2s = (2a + 4d) + (2a + 4d) + (2a + 4d) + (2a + 4d) + (2a + 4d) = (2a + 4d) \times 5,$$

wo $(2a + 4d) = a + (a + 4d)$ ist;

und endlich $s = (2a + 4d) \times \frac{5}{2}$.

Nähmlich die Summe von allen fünf Gliedern wird erhalten, wenn man die Summe aus dem ersten und fünften Gliede mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret. Eben so findet man die Summe von jeder andern beliebigen Anzahl der Glieder bey der nähmlichen Reihe.

Es wird daher bey jeder arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen die Summe aller Glieder erhalten, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret.

Bezeichnet man nun bey einer solchen arithmetischen Reihe die Summe von $n$ Gliedern mit $s$, und das $n^{te}$, oder letzte Glied, wie oben, mit $t$, wenn die Reihe mit dem $n^{ten}$ Gliede aufhört, so ist die zweyte Fundamentalgleichung folgende:

$$\text{II. } s = (a + t) \cdot \frac{n}{2}.$$

Setzet man aber für $t$ in II. den Werth aus I., so ist das summatorische Glied $s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$

wodurch sich aus dem $1^{sten}$ Gliede, und aus der Differenz bey jeder arithmetischen Reihe für jede gegebene Anzahl der Glieder die Summe bestimmen läßt. So z. B. ist bey der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... die Summe von $n$ Gliedern $s = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Eben so ist in der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 ... die Summe von $n$ Gliedern $s = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2} = n^2$.

§. 233.

Das summatorische Glied für jede arithmetische Reihe von gleichen Differenzen kann man auch unmittelbar aus dem allgemeinen Gliede $a + dn - d$ auf folgende Art ableiten:

Man kann sich vorstellen, daß die Summe von $n$ Gliedern erhalten werde, wenn das allgemeine Glied $a + dn - d$ mit irgend einer Function von $n$, die $fn$ heißen mag, multipliciret wird. Es kann demnach das summatorische Glied

$$s = (a + dn - d) \times fn = df \cdot n^2 + (af - df) \cdot n$$

gesetzet werden, wo $f$ von solcher Beschaffenheit gedacht wird, daß diese Gleichung richtig sey. Ferner sey $df = A$, und $(af - df) = B$, so ist auch das summatorische Glied

$$s = An^2 + Bn \quad = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad \mathfrak{A}.$$

Setzet man nun in dieser Formel $n = 1$, so erhält man die

Summe von einem Gliede $= A + B$; setzet man aber $n = 2$, so erhält man die Summe von zwey Gliedern $4A + 2B$.

Es ist aber in der Reihe $a$, $(a + d)$, $(a + 2d)$, $(a + 3d)$... die Summe von einem Gliede $= a$, und die Summe von zwey Gliedern $= 2a + d$; folglich ist $A + B = a$, und $4A + 2B = 2a + d$; daraus folgt $A = \frac{1}{2}d$ und $B = a - \frac{1}{2}d$. Substituirt man nun diese Werthe in der obenangenommenen Summenformel $\mathfrak{A}$, so ist

$$s = \tfrac{1}{2}dn^2 + (a - \tfrac{1}{2}d)n = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$$ wie vorhin.

Anmerkung. Daß die Summenformel

$$s = An^2 + Bn$$

ganz richtig mit jeder arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen zusammen gehöre, erhellet auch daraus.

Man setze in dieser Formel $n - 1$ statt $n$, so erhält man die Summe von $n - 1$ Gliedern, die $s^1$ heißen mag, nähmlich:

$$s^1 = A(n-1)^2 + B(n-1) = An^2 - 2An + A + Bn - B.$$

Subtrahirt man ferner $s^1$ von $s$, so erhält man (vermöge §. 231), das allgemeine Glied $s - s^1 = t$ derjenigen Reihe, welche mit dem angenommenen summatorischen Gliede $s = An^2 + Bn$ zusammen gehöret, nähmlich:

$$t = 2An - A + B.$$

Substituirt man endlich in diesem allgemeinen Gliede $n = 1$, sodann $n = n2$, $= 3$, $n = 4$ u. s. w., so entstehet folgende Reihe:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Stellen | 1, | 2, | 3, | 4 = |
| Reihe | $(A + B)$, | $(3A + B)$, | $(5A + B)$, | $(7A + B)$ |
| Differenzen | | $2A$, | $2A$, | $2A$ |

wodurch auch jede arithmetische Reihe von gleichen Differenzen vorgestellet werden kann. Daher gehöret das angenommene summatorische Glied ganz richtig mit jeder arithmetischen Reihe von gleichen Differenzen zusammen.

## §. 234.

Durch Hülfe der im §. 232 angeführten zwey Fundamentalformeln $t = a + (n - 1)d$ und $s = \frac{1}{2}n \times (a + t)$ lassen sich sehr viele in der Mathematik und im gemeinen Leben vorkom-

mende Aufgaben auflösen. Weil aber hier nur zwey Gleichungen vorhanden sind, in welchen sich 5 verschiedene Größen befinden, als das erste Glied $a$, das letzte Glied $t$, die Anzahl der Glieder $n$, die Differenz $d$, und die Summe $s$; so müssen drey davon aus den Bedingungen der Aufgabe jederzeit bekannt seyn, wodurch sich sodann die übrigen zwey (nach §. 221) finden lassen; im Gegentheile wäre die Aufgabe unbestimmt. Und da sich jede dieser 5 Größen auf viererley Art, und zwar jedesmahl durch drey andere Größen ausgedrückt, aus den zwey Fundamentalformeln finden läßt; so können diese Werthe zum voraus entwickelt, und auf folgende Art in eine Tafel eingetragen werden, damit man bey einer vorkommenden Aufgabe die passende Formel für die unbekannte Größe alsogleich finden könne.

| Zu such. | ge= geben | N. | Formeln. | Diese Formeln erhält man. |
|---|---|---|---|---|
| $t$ | $a,d,n$ | 1 | $t = a + dn - d$ | Vermöge §. 232. I. |
| | $a,n\ s$ | 2 | $t = \frac{2s}{n} - a$ | Aus §. 232. II. |
| | $d\ n,s$ | 3 | $t = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| | $a,d\ s$ | 4 | $t = -\frac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2)}$ | Den Werth von $n$ aus I. in II. substit. |
| $s$ | $a,n,t$ | 5 | $s = \frac{1}{2}n(a + t)$ | Vermöge §. 232. II. |
| | $a,d,n$ | 6 | $s = an + \frac{dn}{2}(n - 1)$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |
| | $a,d,t$ | 7 | $s = \frac{a + t}{2} + \frac{(t + a)(t - a)}{2d}$ | Den Werth von $n$ aus I. in II. substit. |
| | $l,d,n$ | 8 | $s = tn - \frac{nd}{2}(n - 1)$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |

| Zu such. | gegeben | N. | Formeln. | Diese Formeln erhält man. |
|---|---|---|---|---|
| | $a,t,n$ | 9 | $d = \frac{t-a}{n-1}$ | Aus I. |
| | — | — | — | — |
| | $a,n,s$ | 10 | $d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |
| $d$ | — | — | — | — |
| | $a,t,s$ | 11 | $d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-t-a}$ | Den Werth von $n$ aus I. in II. substit. |
| | — | — | — | — |
| | $t,n,s$ | 12 | $d = \frac{2nt-2s}{n(n-1)}$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| | $a,t,d$ | 13 | $n = 1 + \frac{t-a}{d}$ | Aus I. |
| | — | — | — | — |
| | $a,t,s$ | 14 | $n = \frac{2s}{a+t}$ | Aus II. |
| $n$ | — | — | — | — |
| | $a,d,s$ | 15 | $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)}$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |
| | $t,d,s$ | 16 | $n = \frac{1}{2} + \frac{t}{d} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{d^2} + \frac{t}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}\right)}$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| | $t,d,n$ | 17 | $a = t + d - dn$ | Aus I. |
| | — | — | — | — |
| | $t,n,s$ | 18 | $a = \frac{2s}{n} - t$ | Aus II. |
| $a$ | — | — | — | — |
| | $t,d,s$ | 19 | $a = \frac{1}{2}d + \sqrt{(t^2 + dt + \frac{d^2}{4} - 2ds)}$ | Den Werth von $n$ aus I. in II. substit. |
| | — | — | — | — |
| | $d,n,s$ | 20 | $a = \frac{s}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |

## §. 235.

## Einige hieher gehörige Aufgaben.

I. Es spielt Jemand Pharo, und setzt das erste Mahl einen Gulden, das zweyte Mahl 3, das dritte Mahl 5, das vierte Mahl 7 Fl., und nach diesem Gesetze weiter fort. Die Frage ist, wie viel wird er das 30ste Mahl, und wie viel insgesammt setzen müssen, wenn er bis dahin immer verspielet?

Die erste Frage wird durch die erste Formel $t = a + d(n-1) = 59$, und die andere Frage wird durch die 6te Formel $s = an + \frac{nd}{2}(n-1) = 900$ Fl. beantwortet; weil hier $a = 1$, $d = 2$, und $n = 30$ gegeben sind, und im ersten Falle nach $t$, im andern aber nach $s$ gefragt wird.

II. Es ist aus Versuchen bekannt, daß ein freyfallender Körper in der ersten Secunde beynahe 15 pariser Fuß, und in jeder darauf folgenden Secunde um 30 Fuß mehr, als in der nächst vorhergehenden zurücklege. Nun ist ein Körper von einem Thurme 960 Fuß hoch herunter gefallen: wie viel Zeit hat er wohl dazu gebraucht?

Dieses zeigt die 15te Formel $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} + \frac{1}{4} - \frac{a}{d}\right)} = 8$ Sec.; weil hier $a = 15$, $d = 30$, und $s = 960$ gegeben sind, und nach der Anzahl der Glieder $n$ gefragt wird.

Eben so läßt sich auch, wenn die Dauerzeit des freyen Falles $n = 8$ Secunden aus einer Beobachtung für bekannt angenommen wird, mittelst der 6ten Formel die Höhe des Thurmes $s = 960$ Fuß berechnen.

III. Unter 5 Kanoniere, welche auf die Scheibe schießen, sollen 35 Fl. dergestalt vertheilt werden, daß der vorzüglichste aus ihnen 11 Fl., von den übrigen aber jeder etwas erhalten soll, und zwar so, daß jeder minder vorzügliche immer um gleich viel Gulden weniger erhalte, als der nächst vorhergehende. Nun ist die Frage, wie viel bekommt der schlechteste und um wie viel bekommt jeder folgende mehr?

Die erste Frage beantwortet die 18^te Formel $a = \frac{2s}{n} - t = 3$, und die andere Frage beantwortet die 12^te Formel $d = \frac{2nt - 2s}{n(n-1)} = 2$, weil hier $s = 35$, $n = 5$ und $t = 11$ gegeben sind, und im ersten Falle $a$, im andern aber $d$ gesucht wird.

IV. Es setzt jemand einen Groschen in die Lotterie, und da er das erste Mahl nicht gewinnt, so setzt er das zweyte Mahl zwey Groschen, das dritte Mahl drey Groschen u. s. w. immer um einen Groschen mehr. Da aber die Lotterie einen einzelnen Treffer 14fach zurück bezahlt, so ist die Frage, wie vielmahl kann solcher auf diese Art spielen, damit er durch einen Treffer doch noch all sein gesetztes Geld zurück erhalte.

Da er das erste Mahl 1, das zweyte Mahl 2, das dritte Mahl drey Groschen setzt u. s. w, so setzt er das $n^{te}$ Mahl $n$ Groschen, und wenn er da trifft, so bekommt er $14n$ Groschen zurück; er hat aber in Allem gesetzt $\frac{1}{2} n (1 + n)$; folglich ist $\frac{1}{2} n (1 + n) = 14n$, wenn er nichts gewinnen, noch verspielen soll. Hieraus ist $n = 27$ mahl.

V. Eine Compagnie Soldaten wurde wegen Bestürmung einer Festung dergestalt belohnet, daß derjenige Mann, welcher den Wall am ersten erstiegen, eine gewisse Summe Geld bekam, der zweyte etwas weniger, der dritte wieder um eben so viel weniger u. s. w. Als das Geld ausgetheilet wurde, konnten zwey dieser Soldaten wegen Blessuren nicht gegenwärtig seyn; man gab daher deren Antheil zweyen ihrer Cameraden. Diese zwey steckten sowohl ihr eigenes erhaltenes Geld, als auch jenes ihrer zwey Cameraden in einen einzigen Sack zusammen, und wußten in der Folge, bey der Vertheilung nicht mehr, was jedem gebühre. Der eine hatte für sich und seinen Cameraden 92 Fl. erhalten, und erinnerte sich noch, daß er der zweyte und sein blessirter Camerad der siebente gewesen sey; der andere hatte für sich und seinen Cameraden 71 Fl. erhalten, und wußte, daß er der eilfte, sein Camerad aber der vierte gewesen sey. Nun ist die Frage, was jedem dieser vier Soldaten gebühre?

Da hier eigentlich weder das erste Glied, noch die Differenz der Reihe bekannt ist, so sey der Theil, welchen der allererste bekommen soll $= x$, und die Differenz, um welche jeder nachfolgende weniger bekommen soll, als sein vorhergehender, sey $= y$; so bekommt der zweyte $x - y$, der dritte $x - 2y$, der vierte $x - 3y$, der siebente $x - 6y$ und der eilfte $x - 10y$. Es haben aber der zweyte und siebente zusammen 92 Fl. und der vierte und eilfte zusammen 71 Fl. erhalten;

folglich ist $x - y + x - 6y = 92$

und $x - 3y + x - 10y = 71$

daraus folgt $x = 58\frac{1}{4}$, und $y = 3\frac{1}{2}$. Es bekam demnach der zweyte $54\frac{3}{4}$ Fl., der vierte $47\frac{3}{4}$ Fl., der siebente $37\frac{1}{4}$ Fl., und der eilfte $23\frac{1}{4}$ Fl.

VI. Es läßt Jemand einen Brunnen graben, mit diesem Accord, daß er für die erste Klafter 5 Fl. für die zweyte 11 Fl. für die dritte 17 Fl., und so für jede folgende Klafter, weil die Arbeit immer beschwerlicher wird, um 6 Fl. mehr als für die nächstvorhergehende zahlen wolle. Der Brunnenmeister bringt einen Brunnen zu Stande, welcher $2\frac{1}{2}$ Klafter tief ist. Wie viel gebührt ihm dafür Bezahlung?

Da die Zahlungen der ganzen Klaftern in einer arithmetischen Reihe steigen, so müssen auch jene für die halben Klaftern in eben einer solchen Reihe steigen. Es sey nun die Gebühr für die erste halbe Klafter $= x$ Fl., und die Differenz $= y$, um welche für jede nachfolgende halbe Klafter mehr bezahlt werden muß, als für die vorhergehende; so kostet die zweyte halbe Klafter $x + y$, die dritte $x + 2y$, die vierte $x + 3y$, und die fünfte $x + 4y$. Da aber laut Accord für die erste Klafter 5 Fl. und für die zweyte 11 Fl. bezahlt werden muß, so ist $x + (x + y) = 5$, und $(x + 2y) + (x + 3y) = 11$; daraus folgt $x = \frac{7}{4}$, und $y = \frac{6}{4}$. Es gebührt demnach dem Brunnenmeister

$$\frac{7}{4} + \frac{13}{4} + \frac{19}{4} + \frac{25}{4} + \frac{31}{4} = \frac{31 + 7}{4} \cdot \frac{5}{2} = 23\frac{3}{4} \text{ Fl.}$$

Das nähmliche erhält man, wenn man in der Formel $s = an + \frac{dn}{2}(n-1)$, $a = 5$, $d = 6$ und $n = 2\frac{1}{2}$ setzet.

## Von arithmetischen Reihen des zweyten, dritten, vierten Ranges u. s. w. und deren Anwendung.

### §. 236.

Die arithmetischen Reihen, wovon bisher gehandelt wurde, pflegt man auch arithmetische Reihen des ersten Ranges zu nennen, weil die ersten Differenzen der Glieder beständig sind. Es gibt aber auch Reihen, wo man bey der Subtraction der Glieder noch keine gleiche Differenzen, sondern eine arithmetische Reihe des ersten Ranges erhält, und wo folglich erst die zweyten Differenzen der Glieder beständig sind. Z. B. bey der Reihe der natürlichen Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36 . . . sind die ersten Differenzen der Glieder = 3, 5, 7, 9, 11 . . . und die zweyten Differenzen sind alle einander gleich; nähmlich = 2.

Solche Reihen, bey denen die zweyten Differenzen der Glieder gleich sind, werden überhaupt arithmetische Reihen des zweyten Ranges genannt. Man sieht hieraus, daß zu einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges drey Glieder gegeben seyn müssen, um die Reihe sodann fortsetzen zu können. Z. B. wenn die ersten drey Glieder einer solchen Reihe 4, 7, 12, gegeben werden, so sind die ersten Differenzen 3, 5, und die zweyte Differenz, welche hier unveränderlich seyn soll, ist = 2; folglich ist die Reihe der ersten Differenzen = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . . und endlich die vorgelegte Reihe = 4, 7, 12, 19, 28, 39 . . . von der Beschaffenheit, daß 19 = 12 + 7, 28 = 19 + 9, 39 = 28 + 11 sey u. s. w.

### §. 237.

Es sey nun das erste Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges = $e$, und die ersten Differenzen sollen seyn = $a$, $(a+d)$, $(a+2d)$, $(a+3d)$ u. s. w., so haben wir folgende allgemeine Formel, wodurch jede arithmetische Reihe des zweyten Ranges vorgestellet werden kann:

$1^{tes} = e$

$2^{tes} = e + a$

$3^{tes} = e + a + (a + d)$

$4^{tes} = e + a + (a + d) + (a + 2d)$

$5^{tes} = e + a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d)$

$6^{tes} = e + a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + (a + 4d)$

$n^{tes} = e + a + (a + d) + \ldots + [a + (n - 2)d]$.

Daraus ist zu ersehen, daß jedes Glied der Reihe aus dem ersten Gliede $e$, mehr der Summe so vieler Glieder der arithmetischen Reihe des ersten Ranges bestehe, als Glieder in der Reihe demselben vorhergehen. Es besteht also auch das $n^{te}$ Glied aus dem ersten Gliede $e$, mehr der Summe von $(n - 1)$ Gliedern der arithmetischen Reihe des ersten Ranges, nähmlich das $n^{te}$ Glied der angeführten arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, wenn solches $= t$ gesetzet wird, ist (vermöge §. 234, Nr. 6)

$$t = e + \frac{2a(n-1) + d(n-1)^2 - d(n-1)}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dn^2 + (a - \tfrac{3}{2}d)\,n + (e + d - a).$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}d = P$, $(a - \frac{3}{2}d) = Q$, $(e + d - a) = R$, so ist das allgemeine Glied einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges durch nachstehende Formel sehr einfach ausgedrückt;

$t = Pn^2 + Qn + R$.

Die Coefficienten $P$, $Q$, $R$ können bey einer jeden gegebenen arithmetischen Reihe des zweyten Ranges jederzeit sehr leicht bestimmt werden, und zwar auf folgende Art: Man setze in der angeführten Formel $n = 1$, sodann $n = 2$, und endlich $n = 3$, so erhält man dadurch das erste, zweyte und dritte Glied der Reihe; da ferner diese drey Glieder in einer vorgelegten Reihe schon bekannt sind, so hat man nun auf diese Art drey Gleichungen, woraus sich die drey unbekannten Größen $P$, $Q$, $R$ entwickeln lassen.

Es sey z. B. das $n^{te}$ Glied der Reihe 35, 26, 20, 17 ... zu bestimmen, so setze man in der angeführten allgemeinen Formel des $n^{ten}$ Gliedes $n = 1$; dadurch ist $P + Q + R = 35$ als das erste Glied; sodann setze man $n = 2$, so ist $4P + 2Q + R$

$= 26$ als das zweyte Glied; endlich setze man $n = 3$, so ist $9P + 3Q + R = 20$ als das dritte Glied. Aus diesen drey Gleichungen findet man $P = \frac{3}{2}$, $Q = -\frac{27}{2}$, $R = 47$; folglich ist das $n^{te}$ Glied in der angeführten Reihe $t = \frac{3}{2}n^2 - \frac{27}{2}n + 47$.

Man kann auch überhaupt das erste Glied einer solchen Reihe $= a$, das zweyte $= b$, und das dritte $= c$ setzen; sodann ist vermöge der angeführten Formel

$$\begin{aligned} P + Q + R &= a \text{ für } n = 1 \\ 4P + 2Q + R &= b \quad " \quad = 2 \\ 9P + 3Q + R &= c \quad " \quad = 3 \end{aligned}$$

daraus folgt $P = \frac{a + c - 2b}{2}$, $Q = \frac{8b - 5a - 3c}{2}$,

$$\text{und } R = \frac{6a + 2c - 6b}{2}$$

und folglich ist das allgemeine, oder $n^{te}$ Glied

$$t = \frac{(a + c - 2b)n^2 + (8b - 5a - 3c)n + (6a + 2c - 6b)}{2}.$$

## §. 238.

Da wir einmahl das allgemeine Glied

I. $t = Pn^2 + Qn + R$

einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges kennen, so wird es nicht mehr schwer seyn, auch das summatorische Glied für jede solche Reihe anzugeben. Man kann nähmlich hier eben so, wie im §. 233 sich vorstellen, daß aus dem allgemeinen Gliede $= Pn^2 + Qn + R$ das summatorische Glied erhalten werde, wenn man ersteres mit irgend einer Function von $n$, die $Fn$ heißen mag, multipliciret; man kann nähmlich setzen, es sey hier das summatorische Glied

$$s = FP\,n^3 + FQ\,n^2 + FR\,n$$

wo $Fn$ von solcher Beschaffenheit gedacht wird, daß diese Gleichung richtig sey.

Setzet man ferner $FP = A$, $FQ = B$, und $FR = C$, so kann man auch sagen, es sey in jeder arithmetischen Reihe des zweyten Ranges das summatorische Glied

II. $s = An^3 + Bn^2 + Cn$,

wo die unbestimmten Coefficienten $A$, $B$, $C$ bey jeder gegebenen Reihe dieser Art, eben so wie vorhin die Coefficienten $P$, $Q$, $R$ des allgemeinen Gliedes, aus den drey ersten gegebenen Gliedern der Reihe bestimmet werden.

Es sey z. B. für die Reihe

35, 26, 20, 17, 17, 20, 26 = = =

das summatorische Glied zu bestimmen, so setze man in der letztangeführten allgemeinen Formel II. des summatorischen Gliedes $n = 1$; und es ist sodann

$$A + B + C = 35$$

als die Summe des ersten Gliedes. Darauf setze man $n = 2$, so ist

$$8A + 4B + 2C = 61$$

als die Summe des ersten und zweyten Gliedes. Endlich setze man $n = 3$, so ist

$$27A + 9B + 3C = 81$$

als die Summe des ersten, zweyten und dritten Gliedes; nähmlich $35 + 26 + 20 = 81$; daraus folgt $A = \frac{1}{2}$, $B = -6$, und $C = \frac{81}{2}$; folglich ist für die gegebene Reihe das summatorische Glied

$$s = \tfrac{1}{2} n^3 - 6n^2 + \tfrac{81}{2} n.$$

Setzt man auch hier allgemein das erste Glied jeder Reihe dieser Art $= a$, das zweyte $= b$, und das dritte $= c$; so ist wieder

$$A + B + C = a \quad \text{für } n = 1$$
$$8A + 4B + 2C = a + b \quad = = = 2$$
$$27A + 9B + 3C = a + b + c = = = 3$$

daraus folgt

$$A = \frac{a + c - 2b}{6}, \quad B = \frac{9b - 6a - 3c}{6}, \quad \text{und } C = \frac{11a + 2c - 7b}{6};$$

folglich ist

$$s = \left(\frac{a + c - 2b}{6}\right) n^3 + \left(\frac{9b - 6a - 3c}{6}\right) n^2 + \left(\frac{11a + 2c - 7b}{6}\right) n.$$

Anmerkung. Daß das angeführte summatorische Glied

$$s = An^3 + Bn^2 + Cn$$

ganz richtig mit jeder arithmetischen Reihe des zweyten Ranges

zusammen gehöre, kann man auch hier, (so wie im §. 233, Anmerkung) mittelst des §. 231, erweisen.

## §. 239.

Wenn man die Glieder folgender Reihe

I. $1, 1 + d, 1 + 2d, 1 + 3d, 1 + 4d$ = nach und nach addiret, so erhält man nachstehende arithmetische Reihe des zweyten Ranges

II. $1, 2 + d, 3 + 3d, 4 + 6d, 5 + 10d, 6 + 15d$ = = deren allgemeines Glied $t = \frac{1}{2} dn^2 + (1 - \frac{1}{2} d)n$, und die Summe $s = \frac{1}{6} dn^3 + \frac{1}{2} n^2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} d)n$ (§. 237 und 238) ist.

Setzet man nun in der Reihe II. $d = 1$, sodann $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$ u. s. w., so erhält man folgende Reihen:

1) 1, 3, 6, 10, 15, 21 = = =
2) 1, 4, 9, 16, 25, 36 = = =
3) 1, 5, 12, 22, 35, 51 = = =
4) 1, 6, 15, 28, 45, 66 = = u. s. w.

welche überhaupt Reihen der Polygonal- oder vieleckigen Zahlen genannt werden, weil sich die Einheiten ihrer Glieder in regelmäßige Vielecke ordnen lassen. Und zwar insbesondere heißen die Glieder der Reihe 1), dreyeckige Zahlen, oder Triangularzahlen, weil sich deren Einheiten folgender Maßen in Dreyecke ordnen lassen

1, 3, 6, 10, u. s. w.

Die Glieder der Reihe 2), heißen aus der nähmlichen Ursache viereckige- oder Quadratzahlen (auch Tetragonalzahlen), weil sich ihre Einheiten in regelmäßige Vierecke gleichförmig vertheilen lassen.

Und so heißen weiter die Glieder der Reihe 3), fünfeckige- oder Pentagonalzahlen u. s. w.

Summirt man nun wieder die Glieder dieser Polygonalzahlen nach der Ordnung, so hat man folgende Reihen:

*a*) 1, 4, 10, 20, 35, 56 = = =
*b*) 1, 5, 14, 30, 55, 91 = = =
*c*) 1, 6, 18, 40, 75, 126 = = =
*d*) 1, 7, 22, 50, 95, 161 = = =

deren Glieder wieder überhaupt Pyramidalzahlen genannt werden; weil man sich einbilden kann, daß gleichsam Pyramiden oder Spitzsäulen entstehen, wenn man die obenbemeldeten Polygonalzahlen nach der Ordnung, wie sie summirt werden, so übereinander leget, daß die kleinern immer auf die nächstgrößern der nähmlichen Gattung zu liegen kommen. Eben deßwegen heißen auch die Glieder der Reihe *a*), die dreyeckigen Pyramidalzahlen, der Reihe *b*), die viereckigen, der Reihe *c*), die fünfeckigen Pyramidalzahlen u. s. w.

§. 240.

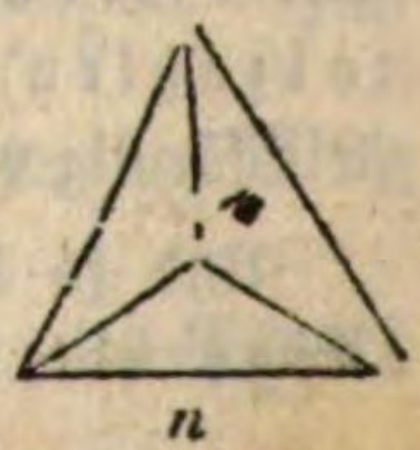
Aus den Kugeln von gleicher Größe lassen sich sowohl dreyals auch viereckige Pyramiden auf obige Art wirklich schlichten, wie man sie in den Zeughäusern überall antrifft. Die Anzahl der Kugeln $= t$, welche in der $n^{ten}$ Lage von oben abwärts gezählt, sowohl bey der einen als der andern Pyramide liegen, läßt sich demnach aus dem $n^{ten}$ Gliede $t = \frac{1}{2} dn^2 + (1 - \frac{1}{2} d)n$, und so auch die Anzahl der Kugeln der ganzen Pyramide von $n$ Lagen durch die Summenformel $s = \frac{1}{6} dn^3 + \frac{n^2}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} d)n$ bestimmen, allwo bey der dreyeckigen Pyramide $d = 1$, und bey der viereckigen $d = 2$ ist. Es ist also bey der dreyeckigen Pyramide die Anzahl der Kugeln in der $n^{ten}$ Lage

$$t = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

und die Summe der ganzen Pyramide von $n$ Lagen, nähmlich die Anzahl aller Kugeln

$$s = \frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$$

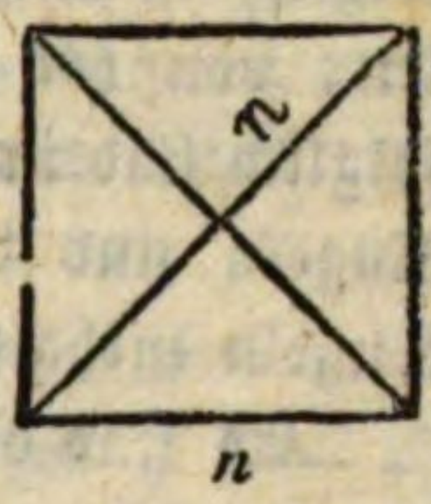
Z. B. in einer dreyeckigen Pyramide von 20 Lagen liegen unten auf der Erde $\frac{20.21}{2} = 210$,



und in der ganzen Pyramide $\frac{20.21.22}{2.3} = 10.7.22 = 1540$ Kugeln.

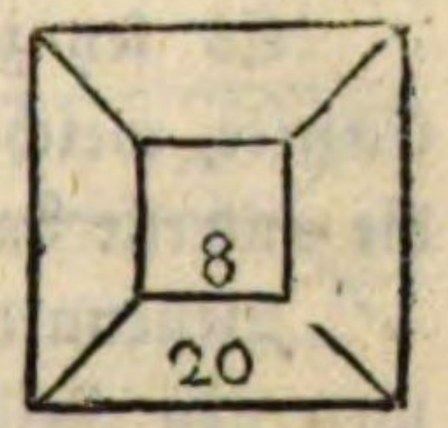
Bey der viereckigen Pyramide liegen in der $n^{ten}$ Lage $t = n^2$, und in der ganzen Pyramide von $n$ Lagen

$$s = \frac{n.(n+1).(n+n+1)}{2.3}$$




Z. B. in einer viereckigen Pyramide von 20 Schichten liegen unten auf der Erde 400, und in der ganzen Pyramide $\frac{20.21.41}{2.3} = 10.7.41$ $= 2870$ Kugeln.

Da bey dergleichen Pyramiden die Anzahl der Kugeln, welche auf einer Seite der Grundfläche in einer Zeile liegen, immer der Anzahl der Lagen gleich ist; so ist es auch leicht, die Anzahl der Kugeln zu bestimmen, welche in einer unvollständigen Pyramide liegen. Denn man darf nur die Pyramide so berechnen, als wenn sie ganz wäre, sodann auch den abgängigen Theil bestimmen, und solchen von der ganzen Pyramide abziehen, so gibt der Rest die Anzahl der Kugeln der abgestutzten Pyramide.




Es sey z. B. bey einer viereckigen abgestutzten Pyramide die unterste Reihe 20, und die obere Reihe 8 Kugeln, so ist die Anzahl der Kugeln, wenn die Pyramide ganz wäre $= \frac{20.21.41}{2.3} = 2870$; da aber oben eine Pyramide fehlt, bey welcher zur untersten Seite 7, und folglich in allen $\frac{7.8.15}{2.3} = 140$ Kugeln gehören, so bleibt der Inhalt der abgestutzten Pyramide $2870 - 140 = 2730$ Kugeln.

## §. 241.

Wenn viele Kugeln zu schlichten sind, so werden sie gemeiniglich in lange Haufen, deren Grundflächen Rechtecke sind, übereinander geschlichtet, so daß oben eine einzige Zeile von Kugeln zu liegen kommt, welche der Rücken des Haufens genannt wird.

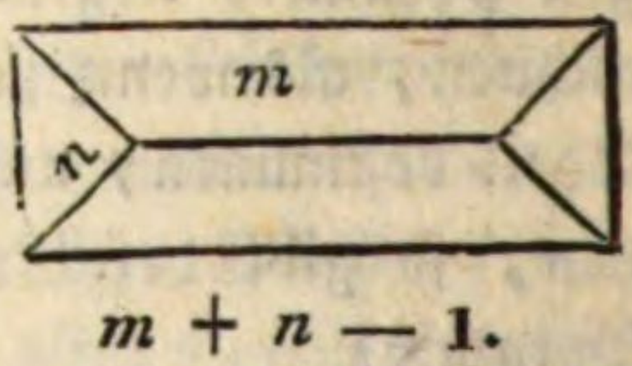
Befinden sich nun in dem Rücken $m$ Kugeln, so liegen in der folgenden untern Lage zwey Zeilen, deren jede $(m+1)$ Kugeln enthält, folglich sind in der ganzen zweyten Lage $(2m+2)$ Kugeln. In der dritten Lage sind drey Zeilen, jede von $(m+2)$, folglich in allen $(3m+6)$ Kugeln; in der vierten sind vier Zeilen, von $(m+3)$, also in allen $(4m+12)$ Kugeln u. s. w.; folglich sind in der $n^{ten}$ Lage $n$ Zeilen, jede von $(m+n-1)$ Kugeln und daher sind in dieser ganzen Lage $n(m+n-1)$ Kugeln enthalten.

Es sind demnach auch hier die aufeinander folgenden Lagen der Kugeln, von oben nach unten gezählt, Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, nähmlich

| $1^{te}$ | $2^{te}$ | $3^{te}$ | $4^{te}$ | $n^{te}$ Lage |
|---|---|---|---|---|
| $m$, | $(2m+2)$, | $(3m+6)$, | $(4m+12)$, | . . $n.\ (m+n-1)$, |

folglich ist (vermöge §. 238), die Summe aller Kugeln, welche in $n$ Schichten enthalten sind,

$$s = \frac{n(n+1).(2n+3m-2)}{2.3}$$



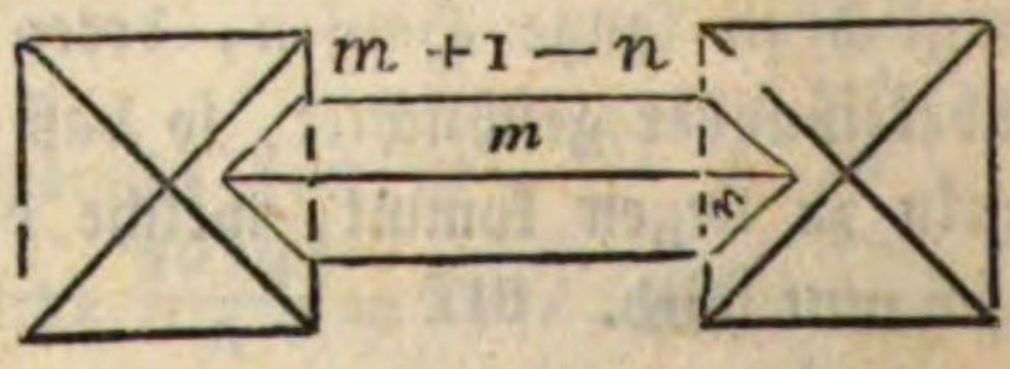

Es sey z. B. der Rücken des Haufens $= 100$, und die Eckseite, welche die Anzahl der Lagen anzeiget $= 10$, so enthält die unterste Lage 1090; und der ganze Haufen 5830 Kugeln.

Benennet man die Anzahl der Kugeln mit $p$, welche in der untersten Zeile liegen, so ist $p = m + n - 1$, und daher $m = p + 1 - n$; folglich ist $s = \frac{n.(n+1).(3p+1-n)}{2.3}$.

Und weil auch hier in der schmalen Seite der Grundfläche eben so viele Kugeln, als in der Eckseite liegen, so kann ein unvollständiger solcher Haufen eben so, wie die unvollständige Pyramide (im §. 240) berechnet werden.

## §. 242.

Man pflegt auch einen langen Haufen zu schlichten, der an beyden Enden an Pyramiden angelegt ist.



Auch hier sind die Lagen der Kugeln von oben nach unten gezählet, Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges. Denn es sey der Rücken $= m$ Kugeln, so liegen in der zweyten Lage zwey Zeilen zu $(m-1)$; in der dritten drey Zeilen zu $(m-2)$; in der vierten vier Zeilen zu $(m-3)$; und daher in der $n^{ten}$ Lage $n$ Zeilen zu $(m-n+1)$ Kugeln; weil hier die Zeilen immer um eine Kugel kürzer werden. Die Reihe ist demnach

$1^{te}$ $2^{te}$ $3^{te}$ $4^{te}$ $n^{te}$

$m, (2m-2), (3m-6), (4m-12) \ldots n(m+1-n)$

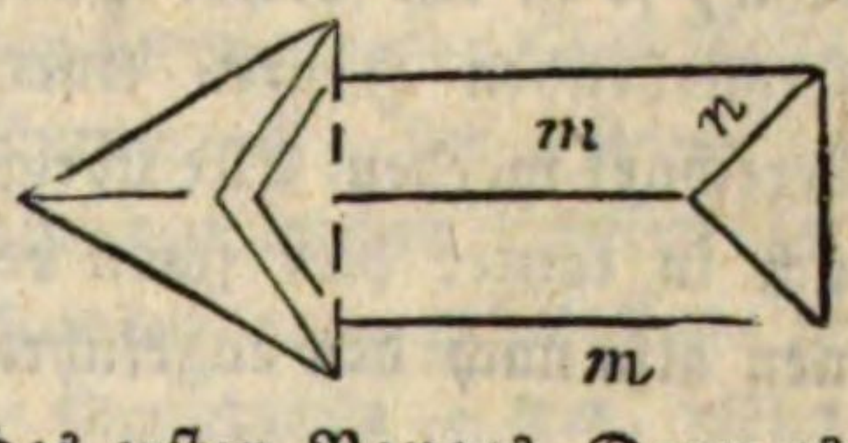
deren Summe von $n$ Gliedern (nach §. 238) gefunden wird,

$$s = \frac{n.(n+1).(3m-2n+2)}{2.3}.$$

Es sey z. B. der Rücken des Haufens $m=30$, und die Eckseite $n=10$, so liegen in der untersten Schichte 210, und im ganzen Haufen $s=1320$ Kugeln.

Wenn hier die Anzahl der Kugeln in der untersten Zeile $=p$ gesetzet wird, so ist $p=m-n+1$; und $m=p+n-1$; folglich ist $s = \frac{n.(n+1).(3p+n-1)}{2.3}$.

Anmerkung. Wenn der Haufen nur von einer Seite an eine Pyramide angelehnt ist, so sind die Lagen der Kugeln, von oben nach unten genommen, Glieder einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges. Denn es sey der Rücken $= m$, so sind in der zweyten Lage $2m$, in der dritten $3m$, in der vierten $4m$, und in der $n^{ten}$ Lage $mn$ Kugeln, weil hier die Zeilen alle gleich lang sind, und folglich ist die Summe aller Kugeln

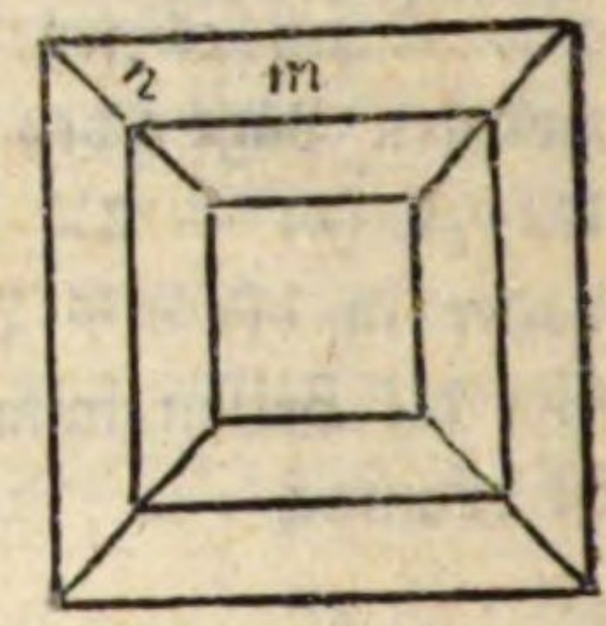



$$s = \tfrac{1}{2} n . (m + nn) = \frac{m . n . (n+1)}{2}.$$

## §. 243.

Endlich lassen sich auch die Kugeln in einen Haufen schlichten, dessen Grundfläche aus einem Vierecke besteht, aus welchem ein anderes kleineres Viereck gleichsam herausgeschnitten ist; so

daß die Schlichtung in der Mitte einen leeren Raum habe, der an allen vier Seiten eingeschlossen ist.




Bey der Untersuchung eines solchen Haufens findet man, wenn oben im Rücken $m$ Kugeln sind, daß in der zweyten Lage zwey Zeilen liegen, wovon die innere $(m-4)$, und die äußere $(m+4)$ Kugeln enthält, und daß folglich in der ganzen zweyten Lage $2m$ Kugeln befindlich sind. Ferner daß in der dritten Lage drey Zeilen liegen, wovon die mittlere $m$, die innere $m-8$, und die äußere $m+8$ Kugeln enthält, und daß folglich in der ganzen dritten Lage $3m$ Kugeln sich befinden; eben so, daß in der vierten Lage $4m$, in der fünften $5m$, und in der $n^{ten}$ $nm$ Kugeln liegen; folglich sind hier die Lagen der Kugeln Glieder einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges; es ist demnach die Anzahl aller Kugeln im ganzen Haufen $s = \frac{1}{2} n\,(m + nm) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot m}{2}$.

Sollte auf einer Seite eines solchen Haufens ein Eingang seyn, so ist ein solcher Haufen mit jenem im §. 241 angeführten freystehenden Haufen einerley, und kann daher (nach §. 241) berechnet werden. Alle übrige Gattungen von Kugelhaufen lassen sich in lauter hier schon beschriebene Theile zerlegen, und können also nach den angeführten Formeln berechnet werden.

## §. 244.

Aus den hier entwickelten Summenformeln der Kugelhaufen läßt sich eine allgemeine Regel geben, nach welcher alle Gattungen von Kugelschlichtungen berechnet werden können, nähmlich:

Man addire zu dem Rücken des Haufens beyde mit ihm gleichlaufende Grundzeilen, und multiplicire diese Summe mit einem Seitendreyeck; so ist der dritte Theil dieses Products die Anzahl aller Kugeln des ganzen Haufens. Das Seitendreyeck ist allenthalben $= \frac{1}{2} n\,(n+1)$, weil es eine arith-

metische Reihe des ersten Ranges ist, wo das erste Glied = 1, das letzte = $n$, und die Anzahl der Glieder ebenfalls = $n$ ist.

Z. B. 1). Bey der dreyeckigen Pyramide ist der Rücken = 1, die eine Grundzeile = $n$, und die andere gleichlaufende = 1; folglich ist $s = \frac{1}{3}(2 + n) \cdot \frac{1}{2} n (n + 1)$.

2) Bey der viereckigen Pyramide ist der Rücken = 1, und jede der gleichlaufenden Grundzeilen = $n$; folglich $s = \frac{1}{3}(1 + n + n) \cdot \frac{1}{2} n (n + 1)$.

3. Beym langen freystehenden Haufen ist der Rücken = $m$, jede der gleichlaufenden Grundzeilen = $m + n - 1$; folglich $s = \frac{1}{3}(m + 2m + 2n - 2) \cdot \frac{1}{2} n (n + 1)$.

4. Bey dem beyderseits angelehnten Haufen ist der Rücken = $m$, und jede der gleichlaufenden Grundzeilen = $m - n + 1$; folglich $s = \frac{1}{3}(m + 2m - 2n + 2) \cdot \frac{1}{2} n (n + 1)$.

Und so auch bey allen übrigen Arten von Haufen, die unter verschiedenen Winkeln zusammengestoßen sind. Nur muß die Summe der beyden zum Rücken gleichlaufenden Grundzeilen richtig bestimmt werden. So z. B. ist bey dem (im §. 243) angeführten Haufen mit einem Eingange, wenn der Rücken $m$, und eine Eckseite $n$ Kugeln enthält, die Summe der innern und äußern Grundzeile nicht = $2m$, wie bey einem nur von einer Seite angelehnten Haufen, sondern diese Summe ist = $2m + 2n - 2$, eben so groß als bey einem freystehenden langen Haufen (im §. 241). Ist hingegen ein solcher Haufen ganz geschlossen, so ist die Summe der äußern und innern Grundzeile = $2m$, wenn der Rücken $m$ Kugeln enthält; folglich ist die Summe aller Kugeln $s = \frac{1}{3}(m + 2m) \cdot \frac{1}{2} n (n + 1)$.

## §. 245.

Sollte aber I. eine gegebene Anzahl von Kugeln = $s$ in eine dreyeckige Pyramide geschlichtet werden, so ist (§. 240) $s = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$; und folglich $6s = n^3 + 3n^2 + 2n$ eine verwickelte cubische Gleichung (§. 213), wovon die Auflösung zwar erst in der künftigen Vorlesung folgen wird; doch aber läßt sich hier die Grundzeile $n$ auf folgende Art bestimmen:

Da $n^3 + 3n^2 + 2n = 6s$, so ist $n^3 < 6s$, wenn man links $3n^2 + 2n$ abzieht (§. 22, Grundsf. 2), und $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > 6s$, wenn man eben da $n + 1$ hinzusetzet (§. 16, Grundsatz 2); nähmlich $n^3 < 6s$, und $(n + 1)^3 > 6s$; also auch $n < \sqrt[3]{6s}$, und $(n + 1) > \sqrt[3]{6s}$ (§. 137, Grundsatz 2), oder $n < \sqrt[3]{6s}$, und $n > \sqrt[3]{6s} - 1$ (§. 22, Grundsatz 3). Da nun der Unterschied zwischen $\sqrt[3]{6s}$ und $n$ keine ganze Einheit beträgt, $n$ aber doch hier eine ganze Zahl seyn muß, so hat man folgende Regel: man multiplicire die gegebene Anzahl der Kugeln mit 6, und ziehe die Cubikwurzel nur in ganzen Zahlen daraus, substituire auch die Cubikwurzel statt $n$ in der Formel $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3}$; kömmt nun die gegebene Anzahl der Kugeln zum Vorschein, so ist diese eine dreyeckige Pyramidalzahl, und läßt sich also genau in eine dreyeckige Pyramide schlichten, wovon die Grundzeile der gefundenen Cubikwurzel gleich ist. Ist aber die, nach der Formel $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3}$ berechnete Summe kleiner, als die gegebene Anzahl der Kugeln $= s$; so ist es ein Zeichen, daß die gegebene Zahl der Kugeln sich nicht genau in eine dreyeckige Pyramide schlichten lasse. Ist endlich die gefundene Summe größer, als die gegebene Zahl der Kugeln; so muß zur Grundzeile um eine Kugel weniger, als die Cubikwurzel anzeigt, genommen werden, um eine vollständige Pyramide zu erhalten, wo noch ein Rest übrig bleiben wird. Z. B. es sollen 1140 Kugeln in eine dreyeckige Pyramide geschlichtet werden, so ist $\sqrt[3]{(6 \cdot 1140)} = 18$ ganzen Einheiten, und $\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{2 \cdot 3} = 1140$; folglich ist 1140 eine Pyramidalzahl. Wären aber 7775 Kugeln in eine solche Pyramide zu schlichten, so ist $\sqrt[3]{(6 \cdot 7775)} = 35$ ganzen Einheiten; es ist aber $\frac{35 \cdot 36 \cdot 37}{2 \cdot 3} = 7770$; folglich bleiben 5 Kugeln übrig. Wären endlich 4000 Kugeln in eine solche

Pyramide zu schlichten, so ist $\sqrt[3]{(6 . 4000)} = 28$ ganzen Einheiten; es ist aber $\frac{28 . 29 . 30}{2 . 3} = 4060$; folglich können nur 27 zur Grundzeile genommen werden, und es bleiben noch 346 Kugeln übrig.

II. Auf eben diese Art läßt sich eine Regel finden, um eine gegebene Anzahl der Kugeln in eine viereckige Pyramide zu schlichten. Denn da (§. 240) $s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 . 3}$, und daher $3s = n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$; so ist $n^3 < 3s$, und $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3 > 3s$; oder $n < \sqrt[3]{3s}$, und $(n+1) > \sqrt[3]{3s}$. Da nun hier ebenfalls $n$ um keine ganze Einheit von $\sqrt[3]{3s}$ verschieden ist; so multiplicire man die gegebene Anzahl der Kugeln mit 3, und ziehe die Cubikwurzel daraus, so wird wieder die Cubikwurzel selbst, oder die um eine Einheit von ihr verschiedene Zahl die Grundzeile seyn, welches, wie vorher bey den dreyeckigen Pyramiden, allhier mittelst der Formel $\frac{n(n+1) . (n+n+1)}{2 . 3}$ zu untersuchen ist.

III. Wäre endlich eine gegebene Anzahl der Kugeln in einen langen freystehenden Haufen zu schlichten, so ist (vermöge §. 241) $s = \frac{2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n}{6}$.

Da nun in dieser Gleichung $m$ und $n$ unbekannt sind, so ist hier eine unbestimmte Aufgabe aufzulösen; und es muß für eine Größe, $m$ oder $n$, ein willkührlicher Werth angenommen werden. Nun ist es am besten $n$ für bekannt anzunehmen; theils weil $n$ sich nach der Höhe des Haufens richten muß, und theils auch, damit man der cubischen Gleichung ausweiche; es ist sodann $m = \frac{6s + 2n - 2n^3}{3n^2 + 3n} = \frac{2s}{n(n+1)} - \frac{2}{3}(n - 1)$.

Läßt sich nun für $n$ eine solche Zahl ausfindig machen, daß auch $m$ eine ganze Zahl wird, so läßt sich die gegebene Anzahl der Kugeln in einen solchen Haufen ohne Rest schlichten; wo

aber nicht, so kann für $n$ jede andere schickliche Zahl angenommen, und für $m$ der Werth nur in ganzen Einheiten daraus bestimmet werden, wo sodann noch ein Rest übrig bleiben wird, der nicht in einen solchen Haufen geschlichtet werden kann. Z. B. es sollen 1155 Kugeln in einen solchen freystehenden Haufen geschlichtet werden, so ist für $n = 10$, $m = 15$; hingegen lassen sich 1623 Kugeln in keinen solchen Haufen genau schlichten.

Wenn viele solche Haufen geschlichtet, oder berechnet werden sollten, so könnte man sich auf folgende Art eine Tafel verfertigen, um nicht jedesmahl nach den angeführten Formeln rechnen zu dürfen.

| Die Breite $= n$ | Der Rücken des Haufens $= m$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | u. s. w. |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | |
| 3 | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 | 62 | |
| 4 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | |
| 5 | 55 | 70 | 85 | 100 | 115 | 130 | 145 | 160 | 175 | |
| 6 | 91 | 112 | 133 | 154 | 175 | 196 | 217 | 238 | 259 | |
| 7 | 140 | 168 | 196 | 224 | 252 | 280 | 308 | 336 | 364 | |
| 8 | 204 | 240 | 276 | 312 | 348 | 384 | 420 | 456 | 492 | |
| 9 | 285 | 330 | 375 | 420 | 465 | 510 | 555 | 600 | 645 | |
| 10 | 385 | 440 | 495 | 550 | 605 | 660 | 715 | 770 | 825 | |
| 11 | 506 | 572 | 638 | 704 | 770 | 836 | 902 | 968 | 1034 | |
| u. s. w. | | | | | | | | | | |

Die Länge der Grundfläche $= m + n - 1$

Diese Tafel ist auch für die viereckigen Pyramiden zu gebrauchen, weil diese als lange Haufen, deren Rücken $= 1$ ist, angesehen werden können.

Es ist sehr leicht, diese Tafel fortzusetzen, wenn einmahl die erste Verticalcolonne, die nur bis $n = 30$, oder höchstens $= 40$

fortzusetzen ist, nach der Formel $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{2.3}$ berechnet ist, weil die horizontalen Colonnen arithmetische Reihen des ersten Ranges sind, deren beständige Differenzen $= \frac{n.(n+1)}{2}$ sind, wo $n$ die Stelle der horizontalen Colonne anzeiget.

Auf die nähmliche Art kann auch eine Tafel für die auf beyden Seiten angelehnten Haufen verfertigt werden, welche zugleich auch für die dreyeckigen Pyramiden gelten wird, weil sie ebenfalls als solche Haufen anzusehen sind, bey denen aber die zum Rücken gleichlaufende Grundzeile $= 1$ ist.

| Die Eckseite $= n$ | Die Länge der Grundfläche $= m$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| 3 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 | 52 |
| 4 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| 5 | 35 | 50 | 65 | 80 | 95 | 110 | 125 | 140 |
| 6 | 56 | 77 | 98 | 119 | 140 | 161 | 182 | 203 |
| u. s. w. | | | | | | | | |

Der Rücken des Haufens $= m + n - 1$

Auch die Fortsetzung dieser Tafel ist leicht einzusehen; denn die erste verticale Colonne wird nach der Formel $s = \frac{n.(n+1).(n+2)}{2.3}$ berechnet, und die horizontalen Colonnen sind Glieder einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges, deren Differenzen $= \frac{n.(n+1)}{2}$ sind.

## §. 246.

Eine Reihe, deren erste Differenzen Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, und wo daher die dritten

Differenzen erst beständig sind, wird eine arithmetische Reihe des dritten Ranges genannt. So z. B. ist die Reihe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe des dritten Ranges, nähmlich:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reihe | 1, | 8, | 27, | 64, | 125 | = | = | = | = | = |
| ersten | | 7, | 19, | 37, | 61 | = | | | | |
| zweyten | | | 12, | 18, | 24 | = | Differenzen. | | | |
| dritten | | | | 6, | 6 | = | | | | |

Hieraus erhellet, daß zu einer solchen Reihe vier Glieder gegeben seyn müssen, um die Reihe fortsetzen, und das zugehörige sowohl allgemeine, als auch summatorische Glied bestimmen zu können.

Macht man hier eine dem §. 237 ähnliche Betrachtung, so sieht man, daß jedes Glied einer solchen Reihe aus einer angenommenen Größe $S$ mehr der Summe von einigen Gliedern einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges besteht; diese Summe aber kann nun (nach §. 238) durch $Pn^3 + Qn^2 + Rn$ vorgestellet werden; folglich kann auch das $n^{te}$, oder allgemeine Glied jeder arithmetischen Reihe des dritten Ranges auf folgende Art vorgestellet werden:

I. $t = Pn^3 + Qn^2 + Rn + S.$

Multipliciret man nun, um die Summe $s$ zu erhalten, dieses allgemeine Glied mit $Fn$, (wie im §. 238), und setzet sodann $PF = A$, $QF = B$, $RF = C$, und $SF = D$, so ist das summatorische Glied einer jeden arithmetischen Reihe des dritten Ranges

II. $s = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn,$

wo wieder hier $A$, $B$, $C$, $D$, so wie auch in I. die Coefficienten $P$, $Q$, $R$, $S$ aus vier Gliedern einer vorgelegten Reihe des dritten Ranges bestimmet werden, wenn man $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, sodann $n = 4$ setzet, und für $t$ und $s$ die zugehörigen Werthe subsituiret. So z. B. findet man das $n^{te}$ Glied obiger Reihe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen $t = n^3$, und die Summe $s = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^2.(n+1)^2}{4} = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$

§. 247.

Eben so gibt es Reihen, deren 4te, 5te, 6te... Differenzen erst beständig sind, und werden deßhalb arithmetische Reihen des vierten, fünften, sechsten Ranges genannt. So z. B. ist die Reihe der vierten Potenzen der natürlichen Zahlen eine arithmetische Reihe des vierten Ranges; die fünften Potenzen der natürlichen Zahlen sind eine arithmetische Reihe des fünften Ranges, und überhaupt die $m^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen sind eine arithmetische Reihe des $m^{ten}$ Ranges. Da aber solche Reihen in der ausübenden Mathematik äußerst selten vorkommen, so werden hier keine ferneren Beyspiele angeführet. Nur folget hier das Gesetz der Formeln, sowohl für das $n^{te}$ Glied, als auch für die Summe von $n$ Gliedern jeder dieser Reihen, damit ein jeder, welcher das bereits Vorgetragene gut verstanden hat, in vorkommenden Fällen Gebrauch davon machen könne.

| Rang der Reihe. | Das $n^{te}$ Glied $t =$ | Summe von $n$ Gliedern $s =$ |
|---|---|---|
| 1 | $Pn + Q$ | $An^2 + Bn$ |
| 2 | $Pn^2 + Qn + R$ | $An^3 + Bn^2 + Cn$ |
| 3 | $Pn^3 + Qn^2 + Rn + S$ | $An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$ |
| 4 | $Pn^4 + Qn^3 + Rn^2 + Sn + T$ | $An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En$ |
| .. | ..... | ..... |
| $m$ | $Pn^m + Qn^{m-1} \ldots + Yn + Z$ | $An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} \ldots + Hn$ |

Man sieht aus diesem, daß jede Reihe, deren allgemeines und summatorisches Glied durch eine ganze rationale Function von $n$ vorgestellt werden kann (von einer solchen Gestalt nähmlich als die eben angeführten sind), zur Familie der arithmetischen Reihen gehöre; und daß es aus dem höchsten Exponenten des allgemeinen, oder auch des summatorischen Gliedes zu erkennen sey, von welchem Range die dazu gehörige Reihe sey, und wie viel Glieder der Reihe gegeben seyn müssen, um

die Coefficienten entweder des allgemeinen, oder auch des summatorischen Gliedes bestimmen zu können.

## Von der Verbindung und Versetzung der Größen.

(De Combinatione et Permutatione.)

### §. 248.

Es ist oft, sowohl bey mathematischen Untersuchungen, als auch im gemeinen Leben nothwendig, alle möglichen Fälle bey einer vorkommenden Sache aufzusuchen, wie auch in gewissen Fällen das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit eines Erfolges zu bestimmen. Z. B. da bey der arithmetischen Reihe des ersten Ranges 5 Größen vorkommen, wovon allzeit drey bekannt seyn müssen, um die vierte daraus zu bestimmen (§. 234), so könnte gefragt werden: Wie oft lassen sich 5 Größen so verbinden, damit jedesmahl 4 andere beysammen seyn? oder wie viele verschiedene Formeln können überhaupt bey den arithmetischen Reihen des ersten Ranges aufgestellet werden?

Eben so, wenn von 90 Loosen, oder Zahlen, die in einem Topfe unter einander gemischt, sich befinden, nur 5 als Treffer heraus gezogen werden; und Jemand wollte behaupten, daß bey 10 von ihm unter den 90 gewählten Loosen 3 Treffer seyn würden; wie verhält sich da die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, daß unter den gewählten 10 Loosen 3 Treffer sich befinden sollten?

Zur Beantwortung solcher Fragen ist es nothwendig, allgemeine Untersuchungen anzustellen, wie oft sich $n$ Größen so verbinden lassen, damit jedesmahl $m$ verschiedene Größen beysammen stehen. Dieses kann auf folgende Art geschehen.

### §. 249.

Wenn zwey einzelne Größen $a$ und $b$ zu zwey verbunden werden sollen, so ist nur eine Verbindung $ab$ möglich; bey ei-

ner einzelnen Größe hingegen ist gar keine Verbindung zu zweyen möglich. Kömmt aber zu zwey Größen $a$ und $b$ noch die dritte $c$ hinzu, so läßt sie sich noch mit $a$ und mit $b$ verbinden; also sind $1 + 2 = 3$ Verbindungen zu zweyen bey drey Größen möglich, nähmlich $ab$, $ac$, $bc$. Kömmt noch die vierte Größe $d$ hinzu, so erhält man noch drey Verbindungen $ad$, $bd$, $cd$; folglich sind in allen $3 + 3 = 6$ Verbindungen möglich. Kömmt noch die fünfte Größe $e$ hinzu, so läßt sie sich abermahl mit den vier vorhergehenden Größen verbinden, und man erhält folglich in allem $6 + 4 = 10$ Verbindungen. Eben so findet man, daß sich 6 Größen 15 Mahl zu zweyen verbinden lassen; u. s. w. Nun sind die Zahlen der Verbindungen zu zweyen, bey 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... $n$ Größen, Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, nähmlich:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bey Größen | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6 | .... |
| sind Verbindungen zu zwey | 0, | 1, | 3, | 6, | 10, | 15 | .... |

deren allgemeines Glied $= \frac{1}{2}n(n-1)$ ist (§. 237).

I. Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu zweyen (oder der sogenannten Amben) bey $n$ Größen $= \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$

Sollen die Größen zu dreyen verbunden werden, so ist bey einer Größe $a$, und bey zwey Größen $a$, $b$ gar keine; bey drey Größen aber $a$, $b$, $c$ erst eine einzige Verbindung zu dreyen, nähmlich $abc$ möglich. Kömmt noch die vierte Größe $d$ hinzu, so gibt solche, mit jedem Ambo der drey vorhergehenden Größen mit $ab$, $ac$, $bc$ verbunden, noch drey andere Verbindungen zu dreyen, nähmlich nebst $abc$, noch $abd$, $acd$, $bcd$. Die Anzahl der Verbindungen zu dreyen ist demnach bey 4 Größen $= 1 + 3 = 4$. Kömmt noch die fünfte Größe $e$ hinzu, so gibt solche mit den 6 Amben der 4 vorhergehenden Größen verbunden, noch 6 andere Verbindungen zu dreyen, nähmlich nebst $abc$, $abd$, $acd$, $bcd$, entstehen noch $abe$, $ace$, $ade$, $bce$, $bde$, $cde$. Die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey 5 Größen ist demnach $= 4 + 6 = 10$. Kömmt noch die sechste Größe hinzu, so gibt solche mit den 10 Amben der 5 vorhergehenden Größen verbunden, noch

10 andere Verbindungen zu dreyen, welche mit den 10 Verbindungen zu dreyen der 5 vorhergehenden Größen zusammen 20 solche Verbindungen ausmachen. Die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey 6 Größen ist demnach = 20. Eben so findet man die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey 7 Größen = 35 u. s. w. Nun sind die Zahlen der Verbindungen zu dreyen bey 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... $n$ Größen, nähmlich die Zahlen 0, 0, 1, 4, 10, 20, 35 ... Glieder einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges, deren allgemeines Glied

$= \frac{n.(n-1).(n-2)}{3.2.1}$ ist (vermöge §. 246).

II. Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu dreyen (oder der sogenannten Ternen) bey $n$ Größen $= \frac{n(n-1).(n-2)}{3.2.1}$.

Bey der Verbindung zu vieren lassen sich eine, zwey, drey Größen Null Mahl, vier Größen aber einmahl verbinden *abcd*. Kömmt noch die fünfte Größe *e* hinzu, so läßt sie sich noch mit jedem Terno der vorigen 4 Größen verbinden, mit *abe*, *abd*, *acd*, *bcd*. Es sind also bey 5 Größen in allem 1 + 4 = 5 Verbindungen zu vieren. Kömmt noch die sechste Größe *f* hinzu, so läßt sie sich noch mit jedem Terno der vorigen 5 Größen, nähmlich noch 10 mahl verbinden; und folglich sind hier 5 + 10 = 15 Verbindungen möglich u. s. w. Diese Verbindungen zu vieren bey 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ... $n$ Größen sind Glieder einer arithmetischen Reihe des vierten Ranges, nähmlich 0, 0, 0, 1, 5, 15 ... deren allgemeines Glied $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1}$ ist (vermöge §. 247).

III. Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu vieren (oder der sogenannten Quaternen) bey $n$ Größen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4.3.2.1}$.

Eben so kann man zeigen, daß sich $n$ Größen zu fünfen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5.4.3.2.1}$ mahl,

zu sechsen $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6.5.4.3.2.1}$ mahl,

u. s. w. verbinden lassen.

IV. Es ist demnach die Anzahl der verschiedenen Verbindungen bey $n$ Größen, wenn in jeder Verbindung $m$ Größen beysammen stehen,

$$= \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)....[n-(m-1)]}{m.(m-1)(m-2)(m-3).....1}$$

Z. B. die fünf Größen in einer arithmetischen Reihe (das erste Glied, die Differenz, die Anzahl der Glieder, das letzte Glied, und die Summe aller Glieder) können $\frac{5.4.3.2}{4.3.2.1} = 5$ Mahl zu vieren verbunden werden; das ist, es lassen sich aus diesen 5 Größen 5 Gleichungen ableiten, wo in jeder Gleichung 4 Größen mit einander verbunden sind; und da aus jeder dieser 5 Gleichungen jede der 4 Größen gesucht werden kann, so sind überhaupt $5.4 = 20$ verschiedene Formeln möglich, wie es aus der (im §. 234) angeführten Tafel zu ersehen ist.

Eben so, da aus 90 Loosen $\frac{90.89.88}{3.2.1} = 117480$ Verbindungen zu dreyen, nähmlich 117480 Ternen gemacht werden können; und da aus den 5 herausgezogenen Treffern nur $\frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$ Ternen als Treffer entstehen, so kommen auf einen Treffer 11748 Fehler. Da ferner aus 10 gewählten Loosen $\frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$ Ternen entstehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit unter den gewählten 10 Loosen einen Terno zu treffen, zur Unwahrscheinlichkeit wie 120 zu 11748, oder wie 10 zu 979. Und hiermit sind die zwey oben (im §. 248) vorgelegten Fragen beantwortet.

## §. 250.

Aufgabe. Es will Jemand in die gewöhnliche Lotterie von 90 Nummern so viel Zetteln zu 5 Nummern spielen, damit er alle herausgezogene 5 Nummern auf einem Zettel beysammen habe. Wie viel muß er in Allem Zetteln setzen? Wie viel Zetteln

werden darunter befindlich seyn, auf welchen 4 Nummern getroffen sind? Wie viel Zetteln werden drey, und wie viele zwey Treffer enthalten? Auf wie viel Zetteln wird nur ein einzelner Treffer sich befinden? Und endlich wie viel Zetteln werden darunter seyn, worauf sich gar kein Treffer befindet?

Auflösung. Da er alle 5 herausgezogene Nummern beysammen auf einem Zettel (einen Quinterno) haben will; so muß er alle Verbindungen der 90 Nummern zu fünfen, nähmlich $\frac{90.89.88.87.86}{5.4.3.2.1} = 43949268$ Zetteln setzen, unter welchen er ganz gewiß den Quinterno haben wird. Da nun auch bey den 5 herausgezogenen Nummern 5 Quaternen möglich sind, wovon jeder mit allen 85 gefehlten Nummern gespielt worden ist; so hat er $5 . 85 = 425$ Quaternen. Ueber dieses sind bey den herausgezogenen fünf Nummern $\frac{5 . 4 . 3}{3 . 2 . 1} = 10$ Ternen möglich, welche mit jeder Verbindung zu zweyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; also hat er $10 \times \frac{85 . 84}{2 . 1} = 35700$ Ternen. Eben so gibt es bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5 . 4}{2 . 1} = 10$ Amben, die mit jeder Verbindung zu dreyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; folglich hat er $10 \times \frac{85 . 84 . 83}{3 . 2 . 1} = 987700$ Amben. Ferner sind die 5 getroffenen Nummern mit jeder Verbindung zu vieren der 85 gefehlten Nummern gespielt worden; folglich hat er $5 \times \frac{85.84\,83.82}{4 . 3 . 2 . 1}$ $= 10123925$ Estratten. Endlich hat er noch $\frac{85.84.83.82.81}{5 . 4 . 3 . 2 . 1}$ $= 32801517$ Zetteln, worauf sich gar kein Treffer befindet.

## §. 251.

Das privilegirte k. k. Lottospiel, wo 5 Nummern aus 90 als Treffer herausgezogen werden, ist allhier so eingerichtet, daß die eingesetzte Einlage für jeden einzelnen Treffer (Estratto) 14fach, für jeden einzelnen an seiner Stelle errathenen Treffer (Estratto determinato) 67fach, für jeden getroffenen Ambo

240fach, und für jeden getroffenen Terno 4800fach zurückbezahlet wird. Der Quaterno und Quinterno wird allhier nicht besonders, sondern nur nach der darin enthaltenen Anzahl der Ternen und Amben bezahlet. Werden bey dem Ambospiele mehr als zwey, und bey dem Ternospiele mehr als drey Nummern auf ein einziges Zettel gesetzet, so wird die ganze Einlage auf ein einziges Zettel mit $n$ Nummern bey dem bloßen Ambospiele für jeden getroffenen Ambo $\frac{480}{n(n-1)}$fach, und bey dem bloßen Ternospiele für jeden getroffenen Terno $\frac{28800}{n(n-1)(n-2)}$ fach zurückbezahlet. Aus diesen Angaben, und aus der Voraussetzung, daß im Durchschnitte genommen die Lottokammer mit den sämmtlichen Spielern gleiches Glück habe, läßt sich nun berechnen, welcher Theil der sämmtlichen Einlage aller Spieler für die Treffer hinausbezahlet werde, und welcher Theil in der Lottokammer theils zur Bestreitung der Kosten, theils als reiner Gewinn zurückverbleibe. Als

1) bey dem einfachen Estrattospiele werden von der sämmtlichen darauf gesetzten Einlage aller Spieler $\frac{7}{9}$ für die Treffer hinaus bezahlet, und $\frac{2}{9}$ zurückbehalten. Denn wenn man alle 90 Nummern als Estratto spielet, und auf jede Nummer $a$ Fl. setzet, so ist die Einlage $90a$ Fl.; unter den 90 Nummern werden richtig fünfe getroffen, und die Zurückbezahlung dafür beträgt $5 \cdot 14a = 70a$ Fl., wo nun $\frac{70a}{90a} = \frac{7}{9}$ ist.

2) Bey dem Spiele auf Estratto determinato werden von der sämmtlichen Einlage $\frac{67}{90}$, oder ungefähr $\frac{3}{4}$ für die Treffer hinausbezahlet, und $\frac{1}{4}$ davon wird zurückbehalten; welches man eben so wie vorhin finden kann.

3) Bey dem Ambospiele werden von der sämmtlichen Einlage aller Spieler $\frac{160}{267}$, oder sehr nahe $\frac{3}{5}$ für die Treffer hinaus bezahlet, und $\frac{2}{5}$ davon verbleiben der Lottokammer. Denn die Anzahl aller möglichen Amben bey 90 Nummern ist 4005 als

Einlage, wenn auf jeden Ambo eine Einlage 1 gesetzet wird; bey den 5 herausgezogenen Nummern sind 10 Amben als Treffer, wo die Einlage 1 für jeden solchen Treffer mit 240 hinausbezahlet wird; daher ist $10 \times 240 = 2400$ als Hinausbezahlung, wo nun $\frac{2400}{4005}$ sehr nahe $\frac{3}{5}$ ist, welches auch auf folgende Art begreiflich wird. Es werde bey dem bloßen Ambospiele auf ein einzelnes Zettel mit allen 90 Nummern die Einlage $a$ gesetzet, so werden bey den 5 herausgezogenen Nummern 10 Amben getroffen, und weil in einem solchen Falle für jeden getroffenen Ambo die ganze Einlage $\frac{480}{90 \cdot 89} = \frac{16}{267}$ fach zurückbezahlet wird, so beträgt die Hinausbezahlung $\frac{160}{267} \cdot a$, welches sehr nahe $\frac{3}{5} a$ ist.

4) Bey dem Ternospiele endlich ist die Hinausbezahlung gar nur $\frac{400}{979}$, oder beynahe $\frac{2}{5}$ der sämmtlichen Einlage aller Ternospiele, so daß fast $\frac{3}{5}$ der Einlage in der Lottokammer zurückverbleibet. Denn, wenn bey dem bloßen Ternospiele auf ein einzelnes Zettel mit allen 90 Nummern die Einlage $a$ gesetzet wird, so werden bey den 5 herausgezogenen Nummern 10 Ternen getroffen; und weil in einem solchen Falle für jeden getroffenen Terno die ganze Einlage $\frac{28800}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{40}{979}$ fach zurückbezahlet wird, so beträgt die Hinausbezahlung $\frac{400}{979} a$, welches sehr nahe $\frac{2}{5} a$ ist, so daß fast $\frac{3}{5} a$ in der Lottokammer zurückverbleiben.

Auch die Wahrscheinlichkeit, einen Treffer bey dem Lottospiele zu errathen, läßt sich berechnen; es verhält sich nähmlich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, mit drey Nummern einen Terno zu errathen, wie 1 zu 11748; mit zwey Nummern einen Ambo zu errathen wie 10 zu 4005; einen einzelnen Treffer an seiner Stelle zu errathen, wie 1 zu 90; und endlich

einen einzelnen Treffer ohne auf seine Ordnung zu achten, wie 1 zu 18. Das ist, wenn ein nähmliches Loos unausgesetzt fortgespielet wird, so wird solches im Durchschnitte genommen immer in 18 Ziehungen einmahl getroffen. Auch ist nun leicht die Wahrscheinlichkeit eines Treffers zu berechnen, wenn bey dem Ambospiele mehr als 2, und bey dem Ternospiele mehr als 3 Nummern auf einem einzelnen Zettel gespielet werden. Eben so leicht ist es auch, nach den obenangeführten Angaben die Einlage $= x$ zu berechnen, wenn auf einem einzelnen Zettel $n$ Nummern dergestalt gespielet werden, daß der Spieler für jeden getroffenen Ambo $a$ Fl., und für jeden getroffenen Terno $b$ Fl. erhalte. Z. B. für ein Zettel mit 10 Nummern, den Ambo mit 10, und Terno mit 100 Ducaten, den Ducaten zu 4 Fl. gerechnet, beträgt die Einlage 17 Fl. 30 kr.

Aus den angeführten Betrachtungen ist zu ersehen, daß die Lotterie, besonders bey dem Ternospiele, für die Lottokammer ungemein vortheilhaft, aber auch eben darum für die Spieler nachtheilig eingerichtet sey; hauptsächlich für solche, welche diese Einrichtung nicht begreifen können.

§. 252.

Zuweilen ist es auch nothwendig, die Anzahl der Versetzungen (Numerum permutationum) von $n$ verschiedenen Größen zu bestimmen. Z. B. es könnte gefragt werden: wie oft können 6 Personen an einem Tische ihre Plätze verwechseln, bis sie gezwungen sind, ihre vorige Stellung wieder anzunehmen? Dieses kann auf folgende Art untersucht werden.

Eine einzelne Größe $a$ läßt sich nur einmahl ansetzen; kömmt aber die zweyte $b$ hinzu, so sind zwey Versetzungen $ab$, $ba$ möglich. Kömmt nun noch eine dritte Größe $c$ hinzu, so läßt sie sich bey jeder der zwey vorigen Versetzungen dreymahl anbringen, nähmlich vorne, in der Mitte, und hinten; als: $cab$, $acb$, $abc$, und $cba$, $bca$, $bac$; also sind bey drey Größen $2 \cdot 3 = 6$ Versetzungen möglich. Kömmt eine vierte Größe $d$ noch hinzu, so läßt sie sich bey jeder der sechs vorigen Versetzungen viermahl anbringen, nähmlich vorne, an den zwey mittlern Stellen, und

hinten; z. B. *dcab*, *cdab*, *cadb*, *cabd*; folglich sind hier $6.4 = 24 = 1.2.3.4$ Versetzungen möglich. Kommt noch die fünfte Größe *e* hinzu, so läßt sie sich wieder mit jeder der 24 vorigen Versetzungen fünfmahl, wie *edcab*, *decab*, *dceab*, *dcaeb*, *dcabe* versetzen; und es sind also hier $24.5 = 120 = 1.2.3.4.5$ Versetzungen möglich u. s. w. Folglich lassen sich *n* Größen $1.2.3.4 \ldots$ *n*mahl versetzen. Im obigen Beyspiele können demnach die 6 Personen bey einer Tafel $1.2.3.4.5.6 = 720$ mahl ihre Plätze verwechseln, bis sie ihre vorige Stellung wieder einnehmen müssen.

Anmerkung. Die Untersuchung, wie oft sich *n* Größen versetzen lassen, wenn dabey *m* gleiche Größen befindlich sind, wird dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen. Z. B. wie viel verschiedene Zahlen können durch die Versetzung mit den Ziffern 11234, wie viele mit 122333 bezeichnet werden? Auch können die fleißigen Anfänger versuchen, die angeführten Gründe von den Verbindungen und Versetzungen der Größen, auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in einigen besondern Fällen anzuwenden. Z. B. beym Würfelspiele mit drey Würfeln könnte gefragt werden: wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit? 1) Bey einem bestimmten gleichen Wurfe, etwa um alle drey Sechser zu werfen; 2) bey einem unbestimmten gleichen Wurfe; 3) bey einem bestimmten ungleichen Wurfe, etwa um eins, zwey, drey zu werfen; 4) bey einem unbestimmten ungleichen Wurfe; 5) bey einem ganz bestimmten Wurfe von zwey gleichen, und einem davon verschiedenen Felde; 6) bey einem Wurfe, wo zwey gleiche Felder bestimmt, das dritte aber unbestimmt gelassen wird; 7) bey einem Wurfe, wo zwey gleiche Felder unbestimmt verbleiben, das dritte Feld aber bestimmt wird; 8) bey einem Wurfe, wo die zwey gleichen Felder, nebst dem dritten unbestimmt verbleiben; u. s. w.

Man findet nach vorgenommener Untersuchung, daß in Nr. 1 das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit sey $= 1:216$, nähmlich, daß im Durchschnitte genommen immer unter 216 Würfen einmahl alle drey Sechser fallen, weil unter allen möglichen verschiedenen Würfen, welche mit drey

Würfeln gemacht werden können, 6 Würfe von drey gleichen Feldern, 90 Würfe von zwey gleichen und einem davon verschiedenen Felde, und 120 Würfe von gänzlich ungleichen Feldern, zusammen 216 verschiedene Würfe sich befinden. Bey Nr. 3 ist das Verhältniß wie 1 zu 36 u. s. w.

Wenn nun zwey Personen *A* und *B* mit drey Würfeln dergestalt um die Wette spielen, daß bey jedem Wurfe nach Nr. 4 der Spieler *A*, hingegen bey jedem Wurfe nach Nr. 8 der Spieler *B* die sämmtliche Einlage gewinne; so muß vermöge Billigkeit, die Einlage des *A* zur Einlage des *B* sich verhalten, wie 4 zu 3. Wenn hingegen *A* bey jedem Wurfe nach Nr. 2, und *B* bey jedem Wurfe nach Nr. 3 gewinnen soll, so müssen deren Einlagen gleich groß seyn.

In einigen Schriften, z. B. in Hrn. Mönichs Lehrbuch der Math. I. B. I. Anh. §. 15, wird das Verhältniß für Nr. 1 ganz anders angegeben, nähmlich 1:816, weil drey Würfel 18 Felder haben, die sich $\frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816$ mahl zu dreyen verbinden lassen; allein weil ein Würfel nicht mehr als ein einziges Feld auf einmahl zeigen kann, so müssen von diesen 816 Verbindungen folgende ausgeschlossen werden: 1) bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu dreyen $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 60$; 2) bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu zweyen mit den 12 Feldern der beyden andern Würfel verbunden $= \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 12 \cdot 3 = 540$; mithin verbleibt die Anzahl der möglichen Verbindungen nur $= 816 - 60 - 540 = 216$, wie vorhin.

## Von den geometrischen Reihen.

### §. 253.

Eine Reihe, in welcher man beständig gleiche Quotienten erhält, wenn man jedes nachfolgende Glied durch das vorhergehende dividiret, wird eine geometrische Reihe genannt. So z. B. sind 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... ingleichen 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ geometrische Reihen; weil in der ersten der beständige

Quotient 2, und in der andern $\frac{1}{2}$ erhalten wird, wenn man jedes nachfolgende Glied durch das nächst vorhergehende dividiret. Man erhält demnach bey einer geometrischen Reihe jedes folgende Glied aus dem nächst vorhergehenden, wenn man dieses mit dem Quotienten multipliciret (vermöge §. 173). Es erhellet hieraus, daß wenn das erste Glied und der Quotient einer geometrischen Reihe gegeben sind, die Reihe nach Belieben fortgesetzet werden könne. Es sey z. B. das erste Glied einer Reihe = 2, und der Quotient = 3, so ist das zweyte Glied = 6, das dritte = 18 u. s. w.

Es sey nun das erste Glied = $a$, und der Quotient, mit welchem man jedes vorhergehende Glied multipliciren muß, um das folgende zu erhalten, sey = $q$; so hat man folgende allgemeine Formel für jede geometrische Reihe.

| Stellen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | . . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Glieder | $a$, | $aq$, | $aq^2$, | $aq^3$, | $aq^4$ | . . . . | $t$ |

wo $q$ bey einer steigenden Reihe $> 1$, hingegen bey einer fallenden Reihe $< 1$ seyn muß. Da nun hier jedes Glied aus $q$ auf die Potenz der Anzahl der vorhergehenden Glieder erhoben, multiplicirt mit $a$ besteht, so ist das allgemeine Glied $= aq^{n-1}$. Benennet man nun das letzte oder allgemeine Glied einer solchen Reihe mit $t$, und die Anzahl der Glieder mit $n$, so ist

I. $t = aq^{n-1}$.

Nähmlich das letzte Glied einer jeden geometrischen Reihe besteht aus dem Quotienten zur Potenz der Anzahl der Glieder weniger eins erhoben, multiplicirt mit dem ersten Gliede.

Benennet man ferner die Summe von $n$ Gliedern mit $s$; so ist $s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1}$.

Um nun diese Formel geschickt abzukürzen, multiplicire man beyde Theile der Gleichung mit $q$,

so ist $qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^n$

und ferner durch die Subtraction dieser zwey Gleichungen,

$sq - s = aq^n - a$, das ist $s(q - 1) = aq^n - a$, und

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q - 1};$$

oder wenn man vermöge vorigen, $t$ statt $aq^{n-1}$ setzet, so ist

$$\text{II. } s = \frac{tq - a}{q - 1}.$$

Nähmlich, die Summe einer jeden geometrischen Reihe wird erhalten, wenn man das letzte Glied mit dem Quotienten multiplicirt, das erste Glied davon abzieht, und den Rest durch den um eins verminderten Quotienten dividiret.

So z. B ist die Summe der obigen Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = \frac{32 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 63$; eben so ist $81 + 27 + 9 + 3 = \frac{3 \cdot \frac{1}{3} - 81}{\frac{1}{3} - 1} = -80 : -\frac{2}{3} = +120$.

Es ist aus diesem letzten Beyspiele zu ersehen, daß die fallenden geometrischen Reihen eben so wie die steigenden behandelt werden können, ohne daß man nöthig habe, die Reihe umzukehren, nähmlich das letzte Glied für das erste, und das erste für das letzte anzusehen.

Die angeführte Formel II. kann man auch auf folgende Art finden: In der geometrischen Reihe $a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + t$, wovon die Summe aller Glieder $= s$ sey, sind $a : aq$, $aq : aq^2$, $aq^2 : aq^3$, $aq^3 : aq^4$ &c. gleiche Verhältnisse; und es ist bey diesen gleichen Verhältnissen die Summe aller vordern Glieder $= s - t$, und die Summe aller hintern Glieder $= s - a$; es ist daher (vermöge §. 191) $s - t : s - a = a : aq$, woraus $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ folget.

## §. 254.

Bey den geometrischen Reihen sind ebenfalls, wie bey den arithmetischen 5 Größen in Betrachtung zu ziehen, nähmlich das erste Glied $= a$, das letzte $= t$, der Quotient $= q$, die Anzahl der Glieder $= n$, und die Summe von $n$ Gliedern $= s$, wo wieder jedesmahl drey bekannt seyn müssen, um die übrigen zwey daraus bestimmen zu können. Nur wenn $s$, $n$, $a$, oder $s$, $n$, $t$ gegeben wären, so lassen sich die zwey übrigen bloß durch höhere Gleichungen bestimmen, wie es folgende Formeln zeigen.

| Zu such. | ge= geben | N. | Formeln. | Diese Formeln erhält man. |
|---|---|---|---|---|
| | $a,q,n$ | 1 | $t = aq^{n-1}$ | Vermöge §. 253. I. |
| | $a,q,s$ | 2 | $t = \frac{a + (q-1)s}{q}$ | Aus §. 253. II. |
| | $q,n,s$ | 3 | $t = \frac{q^{n-1}(q-1)s}{q^n - 1}$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| $t$ | $a,n,s$ | 4 | $t.(s-t)^{n-1} - a.(s-a)^{n-1} = 0$ | Den Werth von $q$ aus I. in II. substit. |
| | $a,q,t$ | 5 | $s = \frac{tq - a}{q - 1}$ | Vermöge §. 253. II. |
| | $a,q,n$ | 6 | $s = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |
| | $q,n,t$ | 7 | $s = \frac{t(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| | $a,n,t$ | 8 | $s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$ | Den Werth von $q$ aus I. in II. substit. |
| | $q,n,t$ | 9 | $a = \frac{t}{q^{n-1}}$ | Aus I. |
| | $q,t,s$ | 10 | $a = tq - (q-1)s$ | Aus II. |
| $a$ | $q,n,s$ | 11 | $a = \frac{(q-1)s}{q^n - 1}$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |
| | $n,t,s$ | 12 | $a.(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$ | Den Werth von $q$ aus I. in II. substit. |

| Zu such. | ge= geben | N. | Formeln. | Diese Formeln erhält man. |
|---|---|---|---|---|
| q | $a,n,t$ | 13 | $q = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$ | Aus I. |
| | — | — | — | — |
| | $a,t,s$ | 14 | $q = \frac{s-a}{s-t}$ | Aus II |
| | — | — | — | — |
| | $a,n,s$ | 15 | $q^n - \frac{s}{a}q + \frac{s-a}{a} = 0$ | Den Werth von $t$ aus I. in II. substit. |
| | — | — | — | — |
| | $n,t,s$ | 16 | $q^n - \frac{s}{s-t} \cdot q^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| n | $a,q,t$ | 17 | $q^n = \frac{tq}{a}$ | Aus I. |
| | — | — | — | — |
| | $a,t,s$ | 18 | $\left(\frac{s-a}{s-t}\right)^{n-1} = \frac{t}{a}$ | Den Werth von $q$ aus I. in II. substit. |
| | — | — | — | — |
| | $q,t,s$ | 19 | $q^n = \frac{tq}{tq-(q-1)s}$ | Den Werth von $a$ aus I. in II. substit. |
| | — | — | — | — |
| | $a,q,s$ | 20 | $q^n = \frac{a+(q-1)s}{a}$ | Den Werth von $t$ aus I in II. substit. |

Unter diesen 20 Formeln sind Nr. 4, 12, 15, 16 höhere Gleichungen, deren Eigenschaften in der folgenden Vorlesung vorkommen werden. Aus den Formeln Nr. 17, 18, 19, 20 könnte $n$ zwar (nach §. 228) gefunden werden; da aber dieses etwas beschwerlich ist, besonders, wenn $n$ ein Bruch seyn sollte, und die unbekannten Exponenten aus den Gleichungen durch die Lehre von den Logarithmen viel leichter zu bestimmen sind, so wollen wir lieber zuvor zur Kenntniß der Logarithmen schreiten, und hernach sowohl die Lehre von geometrischen Reihen, als von Logarithmen durch wirkliche Beyspiele anzuwenden suchen.

# II. Abschnitt.

## Von den Logarithmen.

### §. 255.

Wenn man eine beliebige Zahl $a$ nacheinander auf verschiedene Potenzen erhebet, so werden die Exponenten die Logarithmen der hervorgebrachten Potenzen genannt. Z. B. es sey $a^m = b$, $a^n = c$, $a^p = d$ u. s. w.; so ist $m$ der Logarithmus von $b$, $n$ der Logarithmus von $c$, $p$ der Logarithmus von $d$, und wird also bezeichnet, $m = \log b$, $n = \log c$, $p = \log d$. Und so ist der Logarithmus einer jeden andern Zahl $f$ derjenige Exponent, auf welchen $a$ erhoben werden muß, damit $f$ zum Vorschein komme. Auf diese Art erhält man ein logarithmisches System, wovon die Zahl $a$ die Grundzahl genannt wird; weil sie den einmahl angenommenen Werth beständig beybehält, und das System gleichsam auf derselben erbauet wird.

Wenn man bey einer angenommenen Grundzahl $= a$ die Exponenten $m, n, p, q$ &c. in einer arithmetischen Reihe steigen, nähmlich gleichförmig zunehmen läßt, so werden die hervorgebrachten Potenzen in einer geometrischen Reihe wachsen, oder zusammenhängende Proportionalglieder seyn; z B.

| | |
|---|---|
| Exponenten, oder Logarithm. | 3, 5, 7, 9, 11 . . . . |
| hervorgebrachte Potenzen | $a^3$, $a^5$, $a^7$, $a^9$, $a^{11}$ . . . . |

Und daher kann man auch mit Adr. Vlacq sagen: Die Logarithmen sind von zusammenhängenden Proportionalgrößen gleichförmig zunehmende Begleiter (Logarithmi sunt quantitatum continue proportionalium comites aeqidifferentes).

### §. 256.

Es sey nun auch $A^m = q$, $A^n = r$, $A^p = s$ u. s. w.; so hat man wieder ein logarithmisches System, wovon $A$ die Grundzahl und also $m = \log q$, $n = \log r$, und $p = \log s$ ist. Ist nun $A = a$, so ist wegen $a^m = b$ auch $b = q$, wie auch $c = r$ $d = s$ &c. (§. 137, Nr. 1) und man hat eben dasselbe System.

Ist aber $A$ von $a$ verschieden, so sind es verschiedene Systeme und auch die Größen $b$, $c$, $d$ sind von $q$, $r$, $s$ verschieden, das heißt: Gleiche Größen haben in einerley Systeme auch gleiche Logarithmen, und in verschiedenen Systemen verschiedene Logarithmen. Und umgekehrt, gleichen Logarithmen entsprechen in einerley Systeme auch gleiche Zahlen, und in verschiedenen Systemen verschiedene Zahlen.

§. 257.

Die merkwürdigsten allgemeinen Eigenschaften der Logarithmen sind folgende:

1. Man setze in der Gleichung $a^m = b$ den Exponenten $m = o$, so ist (vermöge §. 126) $b = 1$; und also $o = \log 1$, das heißt; in jedem Systeme ist der Logarithmus von $1 = 0$.

2. Setzet man aber $m = 1$, so ist $b = a$, und also $1 = \log a$, nähmlich: in jedem Systeme ist der Logarithmus von der Grundzahl $= 1$.

3. Nimmt man übrigens $a > 1$ an, so ist (vermöge §. 123, II) $b > 1$, wenn $m$ eine positive Zahl, und (vermöge §. 127) $b < 1$, wenn $m$ eine negative Zahl bedeutet; das heißt, in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl größer ist, als 1, sind die Logarithmen der Zahlen, welche die Einheit übersteigen, positiv, und die Logarithmen der eigentlichen Brüche sind negativ.

4. Wäre aber die Grundzahl $a < 1$, so ist (vermöge §. 123 I) $b < 1$, wenn $m$ positiv; und (vermöge §. 127) $b > 1$, wenn $m$ negativ; nähmlich, in jedem logarithmischen Systeme, wo die Grundzahl kleiner ist, als 1, sind die Logarithmen der eigentlichen Brüche positiv, und die Logarithmen der Zahlen, welche die Einheit übersteigen, sind negativ. Man sieht hieraus, daß es am füglichsten ist, für die Grundzahl einen Werth, der größer ist als 1, und zwar positiv anzuehmen; hierdurch erhalten nur die positiven Zahlen reele Logarithmen, die Logarithmen der

negativen Zahlen hingegen werden sodann unmöglich. Und zwar je größer die Zahl ist, desto größer ist der dazu gehörige Logarithmus; weil $b$ in der Gleichung $a^m = b$ immer um so größer wird, je größer man $m$ annimmt.

5. Wenn $a^m = b$ und $a^n = c$ ist, so ist auch $a^m . a^n = a^{m+n} = bc$, (§. 29, Nr. 1), und also $m + n = \log bc$. Es ist aber auch $m = \log b$, und $n = \log c$; folglich $\log bc = \log b + \log c$; das heißt: der Logarithmus eines Productes besteht aus der Summe der Logarithmen der Factoren.

Daß dieser Satz sich auch auf ein Product mit mehreren Factoren erstrecke, ist leicht einzusehen. Denn es sey $c = df$, so ist $\log bc = \log b + \log df = \log b + \log d + \log f$.

6. Da $a^m = b$ und $a^n = c$, so ist auch (§. 39, Nr. 1) $a^{m-n} = \frac{b}{c}$; also $(m - n) = \log \frac{b}{c}$; oder wenn man für $m$ und $n$ die gleichen Werthe $\log b$ und $\log c$ setzet, so ist $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$; nähmlich, der Logarithmus eines Quotienten besteht aus dem Logarithmus des Dividendus, weniger dem Logarithmus des Divisors; oder der Logarithmus eines Bruches besteht aus dem Logarithmus des Zählers, weniger dem Logarithmus des Nenners.

7. Da $a^m = b$ ist, so ist auch $a^{rm} = b^r$ (vermöge §. 137, Nr. 1) und also $rm = \log b^r$; oder $r \log b = \log b^r$; nähmlich, der Logarithmus einer Potenz $b^r$ besteht aus dem Logarithmus der Wurzel $b$ multiplicirt mit dem Exponenten $r$ der Potenz.

8. Da $a^m = b$; so ist auch $a^{\frac{m}{r}} = \sqrt[r]{b}$ (vermöge §. 137, Nr. 2); daher $\frac{m}{r} = \log \sqrt[r]{b}$, und endlich $\frac{\log b}{r} = \log \sqrt[r]{b}$;

nähmlich der Logarithmus einer Wurzelgröße $\sqrt[r]{b}$ besteht aus dem Logarithmus der Potenz $b$ dividirt durch den Exponenten $r$ des Wurzelzeichens

Aus diesen angeführten Sätzen erhellet nun, daß es bey der Berechnung der Logarithmen nur nöthig sey, die Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11 . . . . zu berechnen, weil die übrigen durch eine bloße Addition leicht daraus zu bestimmen sind.

§. 258.

In dem gewöhnlichen logarithmischen Systeme, welches das gemeine, oder briggische System genannt, und am meisten in der Mathematik gebraucht wird, hat man die Grundzahl $a = 10$ gesetzt. Es ist sodann, weil $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ ist, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, $\log 10000 = 4$ u. s. w. Eben so ist, weil $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$, $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10}$, $10^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{10}$, $10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$ ist, $\frac{1}{2} = \log \sqrt{10}$, $\frac{1}{3} = \log \sqrt[3]{10}$, $\frac{1}{x} = \log \sqrt[x]{10}$, $\frac{m}{n} = \log \sqrt[n]{10^m}$.

Hieraus erhellet, daß die Logarithmen der rationalen Potenzen der Grundzahl ganze rationale Zahlen, und die Logarithmen der irrationalen Potenzen der Grundzahl rationale Brüche seyn müssen; und daß die Logarithmen aller übrigen Zahlen weder rational noch irrational, sondern transcendent (§. 228) seyn müssen, weil es nicht möglich ist, eine rationale Grundzahl auf irgend einen Exponenten zu erheben, daß eine solche Zahl vollkommen genau zum Vorschein komme.

§. 259.

Übrigens kann man im briggischen Systeme doch sicher schließen, daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 kleiner als 1, und größer als 0 seyn müssen; daß die Logarithmen der Zahlen zwischen 10 und 100 aus einer Einheit nebst einem Bruch, die Logarithmen der Zahlen zwischen 100 und 1000 aus zwey Einheiten nebst einem Bruch, die Logarithmen der Zahlen zwischen 1000 und 10000 aus drey Einheiten nebst einem Bruch, überhaupt daß der Logarithmus einer jeden ganzen Zahl aus so vielen ganzen Einheiten als die Zahl Ziffern hat, weniger 1, nebst einem Bruch bestehen müsse, welche Brüche nur näherungsweise durch Decimalbrüche ausgedrückt werden können, die der

Wahrheit um so näher kommen, je mehr Decimalstellen man bey demselben zu bestimmen trachtet. Auch wird deßwegen die Ziffer des Logarithmus, welche die ganzen Einheiten anzeigt, die Kennziffer oder Charakteristik genannt; weil man diese alsogleich kennt, sobald die Anzahl der Ziffern von der dem Logarithmus zugehörigen Zahl bekannt ist; und umgekehrt, weil man aus der Kennziffer eines Logarithmus also gleich erkennet, aus wie viel Ziffern die demselben entsprechende Zahl bestehen muß.

Auch ist es leicht einzusehen, daß in eben diesem briggischen Systeme der Logarithmus einer Zahl, welche hinten Nullen bey sich führet, dem Logarithmus der bedeutlichen Ziffern in seinen Decimalstellen vollkommen gleiche, und nur in der Charakteristik um eben so viele Einheiten größer sey, als die Zahl hinten Nullen hat. So z. B. ist $\log 3564000 = \log 3564 \times 1000 = \log 1000 + \log 3564 = 3 + \log 3564$.

Eben so ist auch $\log 654{,}89 = \log \frac{65489}{100} = \log 65489 - 2$;

das heißt, der Logarithmus eines Decimalbruches ist in den Decimalstellen dem Logarithmus eben dieser Zahl als einer ganzen Zahl betrachtet, völlig gleich, und nur allein in der Charakteristik um eben so viele Einheiten kleiner als Decimalstellen bey der vorgelegten Zahl vorhanden sind.

## §. 260.

Man könnte sich aber dem Logarithmus einer Zahl nähern, welche keine vollkommene Potenz von der Grundzahl ist, wenn man nach und nach eine solche irrationale Potenz der Grundzahl aufsuchet, welche von der gegebenen Zahl nur um einen solchen kleinen Bruch verschieden ist, der bey einer vorkommenden Rechnung für nichts zu achten, und also eines für das andere, ohne einen Fehler zu begehen, gesetzt werden darf. Z. B. es wäre der briggische Logarithmus von 5 zu berechnen, so könnte man folgender Mäßen zu Werke gehen:

Da 5 zwischen $10^0$, und $10^1$ liegt, so suche man zwischen diesen zweyten Potenzen (nach §. 184) die mittlere geometrische

Proportionalzahl $= 10^{\frac{1}{2}} = 3{,}1622776601$. Da nun $10^{\frac{1}{2}} < 5$ ist, so suche man zwischen $10^{\frac{1}{2}}$ und 10 die mittlere Proportionale $= 10^{\frac{3}{4}} = 5{,}623413251$. Da aber $10^{\frac{3}{4}} > 5$ ist, suche man zwischen $10^{\frac{3}{4}}$ und $10^{\frac{1}{2}}$ wieder die mittlere Proportionale $= 10^{\frac{5}{8}} = 4{,}216965034$. Ferner suche man wieder zwischen $10^{\frac{5}{8}}$ und $10^{\frac{3}{4}}$ die mittlere Proportionale $= 10^{\frac{11}{16}} = 4{,}869675252$. Auf diese Art fahre man fort, und suche jedesmahl zwischen der nächst kleinern und nächst größern schon bekannten Potenz der Grundzahl die mittlere geometrische Proportionale, so wird man sich immer mehr und mehr der Zahl 5 nähern; und man kann die Arbeit so lange fortsetzen, bis man eine Potenz erhält, die nicht mehr merklich von der Zahl 5 verschieden ist. So z. B. würde man, wenn man auf diese Art 22 mittlere Proportionalen suchet, die Potenz $10^{\frac{2931693}{4194304}} = 5{,}000000864\ldots$ erhalten, welche von der Zahl 5 nicht mehr um $\frac{1}{1000000}$ verschieden ist. Man kann darum in den Rechnungen, wo $\frac{1}{1000000}$ nicht mehr zu achten ist, $\log 5 = \frac{2931693}{4194304} = 0{,}6989700\ldots$ setzen, wo nur die sieben ersten Decimalziffern richtig sind; weil die Potenz der Grundzahl nur bis auf die siebente Decimalstelle übereinstimmt.

Man sieht hieraus, daß man die Arbeit noch weiter fortsetzen, und jede mittlere Proportionale mit mehr als sieben Decimalstellen entwickeln müßte, wenn man den Logarithmus mit mehr als sieben Decimalstellen richtig bestimmen wollte.

Beyläufig auf diese ungemein beschwerliche Art hat Heinrich Brigg die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 100000 mit 14 Decimalstellen berechnet, hernach hat Adrian Vlacq die Lücke von 20000 bis 90000 mit 10 Decimalstellen ausgefüllet, welche Logarithmen sodann in ordentliche Tabellen eingetragen wurden, so, daß man zu jeder Zahl die zwischen diese Gränzen fällt, den dazu gehörigen

Logarithmus, und umgekehrt zu jedem gegebenen Logarithmus die entsprechende Zahl alsogleich finden konnte; welche Tabellen unter dem Nahmen logarithmische Tafeln allgemein bekannt sind.

Man könnte zwar auch den Logarithmus einer jeden Zahl unmittelbar (nach §. 228) finden. Es wird aber weiter hinten bey der Lehre von den unendlichen Reihen (die aber zu Brigg's und Vlacq's Zeiten noch nicht bekannt waren) gezeigt werden, wie die Logarithmen aller Zahlen auf eine ungemein kürzere Art hätten berechnet werden können.

§. 261.

Der logarithmischen Tafeln gibt es heutiges Tages eine Menge: in den meisten sind die Logarithmen nur mit sieben Decimalziffern anzutreffen, weil dieselben in den meisten Fällen eine hinlängliche Genauigkeit gewähren. Es wäre überflüssig, ausführliche Beschreibungen von verschiedenen logarithmischen Tafeln hier einzurücken, und deren Einrichtungen zu erläutern. Es ist am besten, bey dieser Gelegenheit, eine logarithmische Tafel in die Hand zu nehmen, und deren Einrichtung, wie auch den Gebrauch der Tafeln aus der beygefügten Einleitung zu erlernen. Hierzu dürfte vorzüglich dienlich seyn, mein Logarithmisch-Trigonometrisches Handbuch, anstatt der kleinen Vlacqischen, Wolfischen, und andern dergleichen meistens sehr fehlerhaften Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln, für die Mathematik beflissenen eingerichtet; zweyte verbesserte und vermehrte Auflage; Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1800. Denjenigen, welche sich mit der ausübenden Mathematik beschäftigen, dürften meine Logarithmisch-Trigonometrischen Tafeln nebst andern zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln in zwey Bänden; Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1797, sehr nützlich seyn; so wie diejenigen, die äußerst feine mathematische Berechnungen zu machen haben, meine vollständige Sammlung größerer Logarithmisch-Trigo-

nometrischer Tafeln (*Thesaurus logarithmorum completus*) *in Folio.* Leipzig in der Weidmannischen Buchhandlung 1794, hierzu geeignet finden werden.

Die Gründe, auf denen der Gebrauch der logarithmischen Tafeln beruhet, sind aus folgenden Betrachtungen zu ersehen.

§. 262.

Wenn man in den logarithmischen Tafeln die Logarithmen von drey nacheinander folgenden Zahlen vergleicht, so findet man, daß die Differenzen immer einander mehr und mehr gleichen, je größer die den Logarithmen entsprechenden Zahlen werden, und zwar so, daß dieselben, wenn die Zahlen schon größer als 1000 sind, nur noch in der siebenten Decimalstelle um einige wenige Einheiten mehr von einander unterschieden sind. Nähern sich aber die Zahlen schon gegen 10000, so beträgt der Unterschied in der siebenten Decimalstelle keine ganze Einheit mehr; als z. B.

| Zahlen | Logarithmen | Differenzen |
|---|---|---|
| 1001 | 3,0004341 | |
| | | 0,0004336 |
| 1002 | 3,0008677 | |
| | | 0,0004332 |
| 1003 | 3,0013009 | |

Hier sind die Differenzen nur noch in der letzten Decimalstelle um 4 Einheiten verschieden.

| Zahlen | Logarithmen | Differenzen |
|---|---|---|
| 9988 | 3,9994785 | |
| | | 0,0000435 |
| 9989 | 3,9995220 | |
| | | 0,0000435 |
| 9990 | 3,9995655 | |

Hier sind demnach die Differenzen um keine Einheit in der siebenten Decimalstelle mehr verschieden.

Nimmt man aber drey Zahlen an, die um keine ganze Einheit von einander verschieden sind, so trifft dieses schon bey den Zahlen, die nur 1000 übersteigen, so viel als vollkommen überein; als z. B.

| Zahlen | Logarithmen | Differenzen |
|---|---|---|
| 1001 | 3,0004341 | |
| | | 0,0002168 |
| $1001\frac{1}{2}$ | 3,0006509 | |
| | | 0,0002168 |
| 1002 | 3,0008677 | |

Man kann demnach den Satz für richtig annehmen, daß bey Zahlen, die größer als 1000, und um keine Einheit mehr von einander verschieden sind, die Differenzen der Zahlen sich gegen einander verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Logarithmen. Denn es ist $(1002 - 1001) : (1001\frac{1}{2} - 1001) = (\log 1002 - \log 1001) : (\log 1001\frac{1}{2} - \log 1001)$; nähmlich $1 : \frac{1}{2} = 0{,}0004336 : 0{,}0002168$.

§. 263.

Durch Hülfe dieses Satzes kann man nun auch den Logarithmus einer Zahl finden, welche die Gränze der Tafeln übersteiget; z. B. es wäre nach einer Tafel, welche nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 enthält, der Logarithmus von 5462389 zu finden, so verfahre man auf folgende Art: Man schneide von der Zahl so viele Ziffern durch ein Komma ab, daß man eine ganze Zahl nebst einem Decimalbruche erhalte, welche inner die Gränzen der Tafel fällt. In unserm Beyspiele ist sodann 5462,389, wozu eigentlich der Logarithmus gesucht wird. Aus dem gefundenen log 5462,389 folgt sodann unmittelbar log 5462389, weil (vermöge §. 259) diese zwey Logarithmen in den Decimalstellen vollkommen gleich sind. Da nun $\log 5462{,}389 > \log 5462$, und auch $\log 5462, 389 < \log 5463$ seyn muß; so sey $\log 5462{,}389 = \log 5462 + x$; und es ist (vermöge §. 262), weil diese drey Zahlen um keine ganze Einheit von einander unterschieden sind $(5463 - 5462) : (5462{,}389 - 5462) = (\log 5463 - \log 5462) : (\log 5462{,}389 - \log 5462)$; nähmlich $1 : 0{,}389 = (\log 5463 - \log 5462) : x$, oder $1000 : 389 = \log 5463 - \log 5462) : x$. Nähmlich man sage: 1 mit so viel Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat, verhält sich zu den abgeschnittenen Ziffern gleich wie sich die Differenz des nächst kleinern und nächst größern Logarithmus in der Tafel, zur Differenz des nächst kleinern und des gesuchten Logarithmus verhält: welche gefundene Differenz man nur zum nächst kleinern Logarithmus in der Tafel addiren darf. Endlich setze man diesem Logarithmus die

ihm (vermöge §. 259) zugehörige Charakteristik vor, so hat man den gesuchten Logarithmus. In unserm Beyspiele ist log 5463 = 3,7374312, und log 5462 = 3,7373517; also log 5463 — log 5462 = 795; folglich 1000 : 389 = 795 : $x$ $= \frac{389 \cdot 795}{1000} =$ 309. Es ist demnach log 5462,389 = 3,7373517 + 309 = 3,7373826, und folglich log 5462389 = 6,7373826.

Es sey noch zur Zahl 7842365 der dazu gehörige Logarithmus nach einer Tafel, welche die Logarithmen der Zahlen bis 100000 enthält, zu finden; so ist in der Tafel log 78423 = 4,8944435, und log 78424 — log 78423 = 55; folglich 100 : 65 = 55 : $x = \frac{55 \cdot 65}{100} =$ 36. Es ist also log 7842365 = 6,8944471.

Daß man bey dieser Division $x$ nur in Ganzen ohne Annäherung bestimmen muß, ist leicht einzusehen; weil diese Ganzen (vermöge § 262) nur zehnmillionte Theilchen sind, und die achte Decimalstelle ohnehin nicht mehr richtig erhalten wird; weßwegen auch die letzte Ziffer um 1 vermehrt werden muß, wenn der Rest größer als $\frac{1}{2}$ ist.

In vollständigen logarithmischen Tafeln wird die hier angeführte Proportion erspart; weil auf jedem Blatte, für die dort herrschenden Differenzen, die Proportionaltheile zum Voraus berechnet und beygefügt sind, welche sodann nur zum Logarithmus der 5 ersten Ziffern addirt werden, wie es aus der Einleitung solcher Tafeln deutlich zu ersehen ist.

## §. 264.

Wenn man auf diese Art den Logarithmus zu einer Zahl suchet, die aus 8 Ziffern bestehet, so findet man, daß wegen der achten Ziffer der Logarithmus in der siebenten Decimalstelle höchstens um 4 Einheiten größer werden kann; und zwar nur damahls, wenn die erste Ziffer der Zahl 1, und die achte ein 9 ist: in den übrigen Fällen aber ist meistens der Logarithmus einer Zahl mit 8 Ziffern dem Logarithmus der 7 ersten Ziffern bis in die siebente Decimalstelle vollkommen gleich, oder um eine Einheit in der letzten Decimalstelle verschieden. Wenn demnach zu

einer Zahl, welche aus mehr, als 8 Ziffern bestehet, der Logarithmus gesucht werden soll, so suche man denselben nur zu den 7, oder 8 ersten Ziffern auf, und setze die gehörige Charakteristik vor. Z. B. es wäre log 1009345976 zu suchen; so findet man (nach §. 263) log 10093459 = *,0040401, und log 1009345976 = 9,0040401. Eben so findet man log 7985435 = *,9022986 und log 798543598 = 8,9022986.

Hat aber eine Zahl hinten Nullen bey sich; so suche man nur zu den bedeutlichen Ziffern den Logarithmus, und vermehre die Charakteristik um so viele Einheiten, als hinten Nullen folgen (vermöge §. 259).

§. 265.

Wenn zu einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Decimalbruche der Logarithmus gesucht werden soll, so darf man nur (nach §. 263) den Logarithmus aufsuchen, als wenn es lauter Ganze wären, und sodann wird die Charakteristik um so viele Einheiten vermindert, als Decimalstellen vorhanden sind. Hätte aber der Decimalbruch gar keine Ganze, und die Anzahl der Decimalstellen wäre daher größer als die Charakteristik, so ziehe man so viele Einheiten ab, damit die Charakteristik Null werde; die übrigen noch abzuziehenden Einheiten aber hänge man hinten an den Logarithmus mit dem Zeichen — an. Z. B. es ist log

$$0{,}8432 = \log \frac{8432}{10000} = \log 8432 - \log 10000 = 3{,}9259306 - 4$$

$$= 0{,}9259306 - 1.$$

Man könnte hier zwar die Subtraction verrichten, und es ist log 0,8432 = 0,9259306 — 1,0000000 = — 0,0740694; allein es ist, wie wir in der Folge sehen werden, viel vortheilhafter im Rechnen, wenn man die negativen Logarithmen vermeidet.

Wenn zu einem echten Bruche, oder zu einer ganzen Zahl nebst einem angehängten Bruche der Logarithmus zu suchen wäre; so kann man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln; oder im letzten Falle kann man auch die ganze Zahl mit dem beygefügten Bruche in einen Afterbruch verwandeln, und sodann den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus

des Zählers abziehen (vermöge §. 257, Nr. 6). So ist z. B. $\log 6\frac{3}{4} = \log \frac{27}{4} = \log 27 - \log 4$; ingleichen $\log \frac{5}{11} = \log 5 - \log 11$. Auch hier bey eigentlichen Brüchen kann der negative Logarithmus vermieden werden, wenn man zu der Charakteristik des kleinern Logarithmus so viele Einheiten addirt, daß die Subtraction verrichtet werden könne; und hinten eben so viele Einheiten mit dem negativen Zeichen wieder anhängt. So ist z. B. $\log \frac{5}{11} = \log 5 - \log 11 = (0{,}6989700) - 1{,}0413927 = (1{,}6989700 - 1) - 1{,}0413927 = 0{,}6575773 - 1$.

§. 266.

Auch kann durch Hülfe des (im §. 262) angeführten Satzes zu jedem gegebenen Logarithmus, der nicht genau in der Tafel anzutreffen ist, die dazu gehörige Zahl gefunden werden. Z. B. es sey ✳,8765432 ein gegebener Logarithmus, ohne auf die Charakteristik zu sehen, weil dieselbe (§. 259) die Ziffern der dazu gehörigen Zahl nicht ändert, sondern nur anzeigt, wie viel deren für die Ganzen abgeschnitten werden müssen; man soll die dazu gehörige Zahl bestimmen; so ist in den größern Tafeln der

| | Logarithmen | Diff. | zugeh. Zahlen |
|---|---|---|---|
| nächst kleinere | ✳,8765411 | . . . | 75256 |
| | | 21 | |
| der gegebene | ✳,8765432 | . . . | 75256 + $x$ |
| | | 58 | |
| der nächst größere | ✳,8765469 | . . . | 75257. |

Und es ist (nach §. 262) $58 : 21 = 100 : x$, wo $x$ die abgeschnittenen zwey Ziffern vorstellet. Hieraus ist $x = \frac{2100}{58}$ $= 36$. Folglich ist die gesuchte Zahl 7525636; wo erst nach Beschaffenheit der Charakteristik die Ganzen von den Decimalstellen abgeschnitten werden müssen. Wäre also die Charakteristik $= 0$, so ist die Zahl 7,525636 (vermöge §. 259); wäre aber die Charakteristik $= 6$, so ist die Zahl 7525636 ohne Decimalstellen.

Sollte aber die Charakteristik $> 6$ seyn, so muß die dazu gehörige Zahl aus mehr als 7 Ziffern bestehen. Da sich aber die

achte Ziffer schon nicht mehr bestimmen läßt, weil (vermöge §. 264) die Logarithmen zweyer Zahlen, die aus 8 Ziffern bestehen, und nur um einige Einheiten von einander verschieden sind, die 7 ersten Decimalziffern vollkommen gleich haben; so hänge man hinten noch so viele Nullen an, daß man die der Charakteristik entsprechende Anzahl der Ziffern erhält. So z. B. ist 8,8765432 = log 752563600.

§. 267.

Wäre aber zu einem Logarithmus, dessen Charakteristik 0 ist, und bey welchem hinten noch einige Einheiten mit dem negativen Zeichen angehängt sind (§. 265), die zugehörige Zahl zu suchen; so setze man der Zahl, welche den Decimalstellen des Logarithmus entspricht, so viele Nullen vor, als hinten am Logarithmus Einheiten abgezogen sind, wovon aber eine für die Ganzen abgeschnitten werden muß. Z. B. es wäre 0,9868747 — 3 ein gegebener Logarithmus: man soll die zugehörige Zahl finden; so entspricht den Decimalstellen des Logarithmus die Zahl 97023, und folglich ist die gesuchte Zahl 0,0097023. Sollte aber zu einem negativen Logarithmus der zugehörige Bruch gefunden werden, so mache man die Decimalziffern des Logarithmus (nach §. 265) positiv, und verfahre sodann, wie eben gesagt worden; oder man suche die Zahl auf, als wenn der Logarithmus positiv wäre, setze selbe zum Nenner eines Bruches, wovon der Zähler 1 ist, so hat man den gesuchten Bruch (§. 257, Nr. 6). Z. B. es sey — 2,4353665 ein gegebener Logarithmus; man soll den dazu gehörigen Bruch finden, so ist 2,4353665 = log 272,5, und also — 2,4353665 = log $\frac{1}{272,5}$. Oder weil — 2,4353665 = 0,5646335 — 3, und *,5646335 = log 366972; so ist auch — 2,4353665 = log 0,00366972.

§. 268.

Wenn man nun mit einer logarithmischen Tafel versehen ist, so können die mit großen Zahlen sehr beschwerlichen Multiplicationen und Divisionen durch eine bloße Addition und Subtraction verrichtet werden. Z. B. es sey in der Gleichung $x$

$= \frac{ab}{c}$, $a = 628723$, $b = 83629$, $c = 567023$, so kann $x$ auf folgende Art in Zahlen gefunden werden: Es ist $\log x = \log \frac{ab}{c}$ (§. 256), und $\log x = \log ab - \log c$ (§. 257, Nr. 6); endlich $\log x = \log a + \log b - \log c$ (§. 257, Nr. 5). Nun ist $\log 628723 = 5{,}7984594$, $\log 83629 = 4{,}9223569$, $\log 567023 = 5{,}7536007$; folglich $\log x = 4{,}9672156$, wozu die Zahl $x = 92729$ gehöret.

Eben so kann die Erhebung zu Potenzen mit Hülfe der Logarithmen durch eine bloße Multiplication, und die Ausziehung der Wurzel durch eine bloße Division geschehen. Z. B. es wäre der Bruch $\frac{39543}{8564}$ zur dritten Potenz zu erheben, so ist (§. 257, Nr. 7) $\log \left(\frac{39543}{8564}\right)^3 = 3 \times \log \frac{39543}{8564} = 3 (\log 39543 - \log 8564)$. Nun ist $\log 39543 = 4{,}5970696$, und $\log 8564 = 3{,}9326767$, folglich ist $\log \left(\frac{39543}{8564}\right)^3 = 3 \times 0{,}6643929 = 1{,}9931787$, welchem Logarithmus die Zahl 98,441622 entspricht.

Auf die nähmliche Art kann aus der Gleichung $x = \sqrt[5]{4 a^2 b}$, wo $a = 563{,}28$, $b = 7934$ sey, die Größe $x$ in Zahlen entwickelt werden. Denn es ist $\log x = \frac{\log 4 a^2 b}{5} = \frac{\log 4 + \log a^2 + \log b}{5} = \frac{\log 4 + 2 \log a + \log b}{5}$.

Nun ist $\log a = \log 563{,}28 = 2{,}7507243$, $\log b = \log 7934 = 3{,}8994922$, $\log 4 = 0{,}6020600$; folglich $\log x = 2{,}0006002$, wozu $x = 100{,}1384$ gehöret.

Es sey noch $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ zu entwickeln, so ist $\log \sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{\log 5 - \log 7}{3} = \frac{0{,}6989700 - 0{,}8450980}{3} = \frac{1{,}6989700 - 1 - 0{,}8450980}{3} = \frac{0{,}8538720 - 1}{3}$.

In dergleichen Fällen müssen die negativen Einheiten, welche hinten angehängt sind, so eingerichtet werden, daß die

Division ohne Rest aufgeht; und man kann deßwegen in unserm Beyspiele also setzen : $\log \sqrt[3]{\frac{5}{7}} = \frac{2,8538720 - 3}{3}$ $= 0,9512907 - 1$, wozu die Zahl 0,8939036 gehöret (§. 267). Eben so ist

$$\log \sqrt[4]{\frac{9}{11}} = \frac{3}{4} (\log 9 - \log 11) = \frac{3 \log 9 - 3 \log 11}{4}$$

$$= \frac{2,8627275 - 3,1241781}{4} = \frac{0,7385494 - 1}{4} =$$

$\frac{3,7385494 - 4}{4} = 0,9346373 - 1$, wozu die Zahl 0,860275 gehöret.

## §. 269.

In den Rechnungen, wo Logarithmen zu addiren, und wieder einige abzuziehen vorkommen, kann man sich der decadischen Ergänzung bedienen. Die decadische Ergänzung einer Zahl ist der Abgang, den man zu ihr addiren muß, damit die nächstfolgende Potenz von 10 zum Vorschein kömmt; so ist z. B. 3 die dec. Erg. von 7; weil $7 + 3 = 10$; die dec. Erg. von 76 ist 24, weil $76 + 24 = 100$ ist u. s. w.

Die decadische Ergänzung eines Logarithmus erhält man gar leicht, ohne denselben aus der Tafel herausschreiben zu dürfen, wenn man von der Charakteristik angefangen jede Ziffer des Logarithmus von 9 und die letzt bedeutliche Ziffer rechts von 10 abzieht. So z. B. ist die dec. Erg. log 15 = 8,8239087; dec. Erg. log 20 = 8,6989700 u. s. w.

Wenn nun in einer Rechnung einige Logarithmen zu addiren, und wieder einige davon abzuziehen vorkommen; so schreibe man die zu addirenden Logarithmen unter einander, und unter dieselben die decadischen Ergänzungen der zu subtrahirenden Logarithmen; addire sodann dieses alles zusammen, und lasse bey der Summe der Kennziffern so viele Zehner hinweg, als dec. Erg. vorhanden sind, so hat man das richtige Resul-

tat. Z. B. es sey aus der Gleichung $x = \log 74256 + \log 2045 + \log 0{,}00347 - \log 2{,}56 - \log 203{,}47$, die Größe $x$ zu entwickeln; so ist

| | | |
|---|---|---|
| | log 74256 | = 4,8707316 |
| | log 2045 | = 3,3106933 |
| | log 0,00347 | = 0,5403295 — 3 |
| dec. Erg. | log 2,56 | = 9,5917600 |
| dec. Erg. | log 203,47 | = 7,6914996 |
| | Summe | 26,0050140 — 3 |

folglich $x = 6{,}0050140 - 3 = 3{,}0050140$.

Eben so, wenn $x = \log 34{,}56 - \log 69{,}9 - \log 48{,}56$; so ist

| | | |
|---|---|---|
| | log 34,56 | = 1,5385737 |
| dec. Erg. | log 69,9 | = 8,1555228 |
| dec. Erg. | log 48,56 | = 8,3137213 |
| | Summe | 18,0078178 |

folglich $x = 0{,}0078178 - 2$.

## §. 270.

Der besondere Vortheil, den die logarithmischen Tafeln gewähren, besteht darin, daß man durch Hülfe derselben, die unbekannten Exponenten aus einer Gleichung viel leichter als nach §. 228 entwickeln kann; denn es sey $a^x = b$, so ist $\log a^x = \log b$, und (vermöge §. 257, Nr. 4) $x \log a = \log b$; endlich $x = \frac{\log b}{\log a}$. Eben so aus der Gleichung $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$ folgt, $\log a^x c^{qx} = \log b^{mx-n}$; nähmlich $x \log a + xq . \log c = mx . \log b - n . \log b$, und $mx . \log b - x . \log a - xq . \log c = n . \log b$; endlich $x = \frac{n . \log b}{m . \log b - \log a - q . \log c}$.

Auch kann aus folgender Gleichung $ac^{mx} - bc^{\frac{mx}{2}} = d$ durch Hülfe der Logarithmen $x$ gefunden werden; denn es ist $c^{mx} - \frac{b}{a} . c^{\frac{mx}{2}} = \frac{d}{a}$ und (nach §. 215) $c^{mx} - \frac{b}{a} . c^{\frac{mx}{2}} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{d}{a}$; woraus $c^{\frac{mx}{2}} = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}$ folget. Ferner $\log c^{\frac{mx}{2}} = \log \left\{\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{d}{a}\right)}\right\}$, nähmlich $\frac{mx}{2} \times \log c = \log \left\{\frac{b \pm \sqrt{(b^2 + 4ad)}}{2a}\right\}$; endlich

$$x = \frac{2}{m \cdot \log c} \times \log \left\{\frac{b \pm \sqrt{(b^2 + 4ad)}}{2a}\right\}.$$

## §. 271.

Wenn für ein System einmahl die Logarithmen berechnet sind, so kann der Logarithmus einer jeden Zahl für jedes andere System leicht daraus gefunden werden. Denn es sey in dem berechneten Systeme für die Grundzahl $a$ der Logarithmus was immer für einer Zahl $\log b = m$, und für eine andere Grundzahl $A$ der Logarithmus eben dieser Zahl $= x$, nähmlich $\log b = x$ für die Grundzahl $A$; so ist (vermöge §. 255) $A^x = b$, und auch $a^m = b$; folglich $A^x = a^m$, und für einerley System $m \log a = x \log A$; also $x = \frac{m \log a}{\log A}$. Es ist aber für die Grundzahl $a$, $\log a = 1$; also ist $x = \frac{m}{\log A} = \frac{\log b}{\log A} = \frac{1}{\log A} \times \log b$. z. B. aus dem berechneten Briggischen Systeme soll der Logarithmus $x$ von jeder Zahl $b$ für die Grundzahl $A = 5$ berechnet werden, so ist $x = \frac{1}{\log \text{brig}. 5} \times \log \text{brig}. b$

$= \frac{1}{0{,}6989700} \times \log \text{brig}. b = 1{,}4306766 \times \log \text{brig}. b$.

Man darf demnach nur den Briggischen Logarithmus einer Zahl mit 1,4306766 multipliciren, so hat man den Logarithmus von der nähmlichen Zahl für die Grundzahl 5. Die Zahl, womit die Logarithmen eines Systems multiplicirt werden müssen, um ein anderes neues System zu erhalten, wird der Modul des neuen Systems genannt.

# III. Abschnitt.

## Anwendung der geometrischen Reihen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

### §. 272.

Um den Gebrauch der logarithmischen Tafeln durch eine fleißige Übung sich eigen zu machen, kann folgende Anwendung der geometrischen Reihen, und Logarithmen auf die Auflösung einiger Aufgaben nützlich seyn; als:

1. Aufgabe. Es hat Jemand einen Metzen Weitzen ausgesäet; die Ernte hiervon säet er im zweyten Jahre wieder ganz aus; und von dieser zweyten Aussaat hat er wieder die ganze Ernte im dritten Jahre ausgesäet u. s. w. Wie viel würde er wohl auf diese Art im zehnten Jahre ernten, wenn man annimmt, daß jeder Metzen Aussaat jährlich 4 Metzen Ernte bringet?

Auflösung. Da hier die Ernten in einer geometrischen Reihe folgen; denn im ersten Jahre ist die Ernte 4, im zweyten Jahre 16, im dritten Jahre 64 u. s. w.; so ist (§. 254, Nr. 1) $a = 4$, $q = 4$, $n = 10$; folglich $t = 4 \cdot 4^9 = 4^{10}$, oder $\log t = 10 \log 4 = 6{,}0206000$; daher $t = 1048576$ Metzen.

2. Aufgabe. Es spielt Jemand in die Lotterie, und setzt das erste Mahl 3 Groschen; dupplirt aber jedesmahl seinen vorhergehenden Satz. Wie viel wird er wohl durch 12 Setzungen verspielen?

Auflösung. Da hier die nach einander folgenden Sätze die geometrische Reihe 3, 6, 12, 24 . . . formiren, so ist (§. 254, Nr. 6) $a = 3$, $q = 2$, $n = 12$; folglich $s = 3(2^{12} - 1)$. Nun ist $\log 2^{12} = 12 \log 2 = 3{,}6123600$ und also $2^{12} = 4096$; folglich $s = 3\,(4096 - 1) = 3 \cdot 4095 = 12285$ Groschen $= 614\frac{1}{4}$ Gulden.

Man sieht aus dieser Auflösung, daß auch in den Gleichungen, wo die unbekannte Größe sich nicht unmittelbar logarith-

misch entwickeln läßt, man doch einzelne Glieder der Gleichung durch Hülfe der logarithmischen Tafeln entwickeln kann, wodurch sich dann die unbekannte Größe leichter ergibt.

3. Aufgabe. Zwischen 1 und 2 sollen noch 11 Glieder eingeschaltet werden, daß eine geometrische Reihe von 13 Gliedern entstehe?

Auflösung. Weil hier das erste Glied der Reihe $a = 1$, das letzte Glied $t = 2$, und die Anzahl der Glieder $n = 13$ seyn soll; so ist (§. 254, Nr. 13) $q = \sqrt[12]{2}$, und $\log q = \frac{\log 2}{12}$ $= 0{,}0250858$. Nun ist aber die Reihe $1, q, q^2, q^3 \ldots q^{11}$, 2; folglich ist

| | |
|---|---|
| $\log q = 0{,}0250858$ | zugehör. Zahl $1{,}059.. = 2^{\text{ten}}$ Glied |
| $2 \log q = 0{,}0501716$ | = = $1{,}122.. = 3^{\text{ten}}$ = |
| $3 \log q = 0{,}0752574$ | = = $1{,}189.. = 4^{\text{ten}}$ = |
| = . . . | . . . . . . |
| = . . . | . . . . . . |
| $11 \log q = 0{,}2759438$ | = = $1{,}888.. = 12^{\text{ten}}$ = |
| $12 \log q = 0{,}3010296$ | = = $2{,}000.. = 13^{\text{ten}}$ = |

4. Aufgabe. Jedes Glied der geometrischen Reihe $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots$ in $m$ solche Theile zu theilen, daß alle Theile wieder in einer zusammenhängenden geometrischen Reihe stehen, und folglich eine Reihe zum Vorschein komme, welche $m$ Mahl so viel Glieder hat, als die Hauptreihe?

Auflösung. Es sey das erste Glied der gesuchten Reihe $= x$, und ihr Quotient $= y$; so ist die Reihe $x, xy, xy^2 \ldots xy^{m-1}$; $xy^m, xy^{m+1} \ldots xy^{2m-1}$; $xy^{2m}, xy^{2m+1} \ldots$ Da nun die Summe von $m$ ersten Gliedern dieser Reihe dem ersten Gliede der Hauptreihe gleich seyn muß, so ist

$$x + xy + xy^2 + \ldots + xy^{m-1} = a \ldots A$$

Ferner, da die Summe von den folgenden $m$ Gliedern dieser Reihe dem zweyten Gliede der Hauptreihe gleich seyn muß; so ist

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = aq \ldots B$$

Multiplicirt man nun die Gleichung $A$ mit $y^m$, so ist

$$xy^m + xy^{m+1} + xy^{m+2} + \ldots + xy^{2m-1} = ay^m \ldots C.$$

Folglich auch $aq = ay^m$, (vermöge §. 12, Grundf. 3); nähmlich $q = y^m$, und $y = \sqrt[m]{q}$.

Nun summire man in der Gleichung $A$ den ersten Theil derselben (nach §. 254, Nr. 5); so ist die Summe

$= \frac{x(y^m-1)}{y-1}$, mithin $\frac{x(y^m-1)}{y-1} = a$, woraus $x = \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1}$

folget. Es ist demnach die gesuchte Reihe

$$\frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1}, \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)\sqrt[m]{q}}{q-1}, \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)\sqrt[m]{q^2})}{q-1} \quad . \quad . \quad . \quad D$$

Z. B. in der geometrischen Reihe 7, 56, 448... soll jedes Glied in drey solche Theile getheilet werden, daß wieder eine zusammenhängende geometrische Reihe entstehet; so ist hier $a = 7$, $q = 8$, und $m = 3$; folglich ist das erste Glied der gesuchten Reihe $= \frac{7(\sqrt[3]{8}-1)}{7} = 1$, und der Quotient $= \sqrt[3]{8} = 2$; daher ist die verlangte Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32 . . . .

Summirt man ferner $n$ Glieder der angeführten Reihe $D$ (nach §. 254 Nr. 6), so ist

$$s = \frac{a(\sqrt[m]{q}-1)}{q-1} \times \frac{(\sqrt[m]{q^n}-1)}{\sqrt[m]{q}-1} = \frac{a(\sqrt[m]{q^n}-1)}{q-1}.$$

So z. B. ist die Summe von 7 Gliedern der erst gefundenen Reihe $= \frac{7(\sqrt[3]{8^7}-1)}{7} = 8^2\sqrt[3]{8} - 1 = 64 . 2 - 1 = 127.$

Die nähmliche Summe würde man erhalten, wenn man in der Hauptreihe $\frac{n}{m}$ Glieder summirt, das ist, wenn man in der Summenformel (§. 264, Nr. 6) $\frac{n}{m}$ statt $n$ substituiret.

Man sieht hieraus, in welchem Verstande man in der allgemeinen Summenformel für $n$ eine gebrochene Zahl annehmen kann. Nach dieser Formel läßt sich auch folgende Aufgabe auflösen.

5. Aufgabe. Es bestellet Jemand bey einem Juwelier einen Diamanten mit diesem Accord, daß er ihm für den ersten

Carat, den der Diamant wiegt 40 fl., für den zweyten Carat 120 Fl., für den dritten Carat 360 Fl. u. s. w., nähmlich für jeden folgenden Carat dreymahl soviel, als für den vorhergehenden zahlen wolle. Nun ist das Gewicht des Diamanten $3\frac{1}{4}$ Carat, wie viel muß er dem Juwelier bezahlen?

Auflösung. Da hier die Werthe der ganzen Carate in einer geometrischen Progression steigen, so müssen auch die Werthe der Theile derselben ebenfalls in einer solchen Reihe wachsen; und es ist, wenn man die obige Formel hier anwendet, $a = 40$, $q = 3$, $m = 4$, und $n = 13$; folglich der ganze

$$\text{Werth des Diamanten } s = \frac{40(\sqrt[4]{3^{13}} - 1)}{2} = 20\,(\sqrt[4]{3^{13}} - 1).$$

$$\text{Nun ist } \log.\sqrt[4]{3^{13}} = \frac{13\,.\,\log.3}{4} = 1{,}5506442,$$ wozu die Zahl 35,534 gehöret; folglich $s = 20\,.\,34{,}534 = 690{,}68$ Fl. = 690 Fl. 41 Kr. Mithin kostet das letzte Viertel Carat 170 Fl. 41 Kr. Würde man aber für dieses letzte Viertel Carat den vierten Theil von 1080 Fl. rechnen, welche der ganze vierte Carat kosten würde; so hätte man 270 Fl., welches um 99 Fl. 19 Kr. zu viel ist. Weit mehr würde man fehlen, wenn man für den Werth des Diamanten $40 + 40\,.\,3 + 40\,.\,3^2 + 40\,.\,3^{\frac{2}{4}}$ rechnen wollte, wo für das letzte Viertel Carat um 303 Fl. 6 Kr. zu viel bezahlt würde.

6. Aufgabe. Es hat Jemand ein Faß Wein, welches $a = 100$ Maß enthält, wovon jede Maß $c = 36$ Kr. kostet; er zapfet $b = 1$ Maß heraus, und füllet das Faß wieder voll mit Wasser an. Nachdem sich das Wasser mit dem Weine vollkommen vermischt hat, zapft er abermahl $b = 1$ Maß heraus, und füllet das Faß wieder mit Wasser an. Wie oft kann nun dieses wiederhohlet werden, damit jede Maß der Vermischung, welche sich noch im Faße befindet, $d = 24$ Kr. werth sey?

Auflösung. Da hier vorausgesetzt wird, daß sich das Wasser mit dem Weine jederzeit völlig genau vermenge, so läuft bey jedem Abzapfen wieder ein Theil Wasser mit heraus; und zwar verhält sich bey jedesmahligem Abzapfen die ganze Vermischung zu der Menge der Vermischung, die abgezapft wird,

gleichwie die Menge Wein, die sich in der ganzen Vermischung befindet, sich zu der Menge Wein verhält, die beym Abzapfen mit heraus fließt; nähmlich es ist jedesmahl $a : b =$ wie die Menge Wein, die noch im Faße ist, zur Menge Wein, die unter den $b$ Maßen mit abgezapft wird. Nun sind nach dem ersten Abzapfen noch $a - b$ Maß Wein im Faße; folglich $a : b = (a - b) : \frac{b}{a}(a - b) =$ der Menge Wein, die bey dem zweyten Abzapfen mit heraus fließt; und es bleiben also nach dem zweyten Abzapfen noch $(a - b) - \frac{b}{a}(a - b) = \frac{(a-b)^2}{a}$ Maß Wein im Faße. Ferner ist wieder $a : b = \frac{(a-b)^2}{a} : \frac{b(a-b)^2}{a^2} =$ der Menge Wein, die beym dritten Abzapfen ausfließt; und es bleibt noch im Faße $\frac{(a-b)^2}{a} - \frac{b(a-b)^2}{a^2} = \frac{(a-b)^3}{a^2}$; eben so findet man, daß nach dem vierten Abzapfen $\frac{(a-b)^4}{a^3}$, nach dem fünften Abzapfen $\frac{(a-b)^5}{a^4}$; und folglich nach dem $n^{ten}$ Abzapfen $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Maß Wein noch im Faße verbleiben, wovon jede Maß $c$ Kr. werth ist. Also ist der Werth der ganzen Vermischung $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} \times c$, weil das Wasser hier keinen Werth haben soll.

Da aber jede Maß der Vermischung $d$ Kr. werth seyn soll; so ist auch der Werth der Vermischung $ad$ Kr. Folglich ist $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} . c = ad$;

und $n \log (a - b) + \log c - (n - 1) \log a = \log a + \log d$;

hieraus folgt $n = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log (a - b)}$.

Nun ist in unserem Beyspiele

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| log | $c$ | = | log | 36 | = | . | . | . 1,5563025 |
| log | $d$ | = | log | 24 | = | . | . | . 1,3802112 |
| log | $c$ | — | log | $d$ | = | . | . | . 0,1760913 |
| log | $a$ | = | log | 100 | = | . | . | . 2,0000000 |
| log | $(a - b)$ | = | log | 99 | = | . | . | . 1,9956352 |
| log | $a$ | — | log | $(a - b)$ | = | . | . | . 0,0043648 |

Folglich $n = \frac{1760913}{43648} = 40$, nebst einem Bruche. Nähmlich, wenn die Anzapfung 40mahl wiederhohlet wird, so ist die Vermischung im Faße noch etwas besser als ein Wein, dessen Maß 24 Kr. kostet. Wiederhohlt man aber die Abzapfung 41mahl, so ist eine Maß der Vermischung nicht mehr 24 Kr. werth.

7. Aufgabe. Es legt Jemand ein Capital $a = 20000$ Fl. zu $c = 5$ pr. Cento jährlichen Interessen an, und schlägt mit Ende eines jeden Jahres die Interessen zum Capital, oder welches einerley ist, er erhebt solche, und legt selbe gleich wieder als ein Capital an. Wie groß wird nun dieses Capital nach der Zeit von $n = 12$ Jahren seyn?

Auflösung. Da 100 Fl. Capital in einem Jahre $c$ Fl. Interessen bringen, so bringt das Capital $a$ Fl., ebenfalls in einem Jahre $\frac{ac}{100}$ Fl. Interessen. Denn 100 Fl. Cap.: $a$ Fl. Cap. $= c$ Fl. I.: $\frac{ac}{100}$ Fl. I.; mithin ist am Ende des ersten Jahres Capital sammt Interessen $a + \frac{ac}{100} = a\left(1 + \frac{c}{100}\right) = a\left(\frac{100+c}{100}\right)$. Man muß demnach jedesmahl das Capital am Anfange des Jahres mit $\frac{100+c}{100}$ multipliciren, um das Capital sammt Interessen am Ende dieses Jahres zu erhalten. Es ist demnach das Capital sammt Interessen

am Ende des 1ten Jahres $= a\left(\frac{100+c}{100}\right)$

" " " 2ten " $= a\left(\frac{100+c}{100}\right)^2$

" " " 3ten " $= a\left(\frac{100+c}{100}\right)^3$

Folglich ist das Capital sammt Interessen am Ende des $n^{ten}$ Jahres $s = a\left(\frac{100+c}{100}\right)^n$, oder wenn man den Decimalbruch $\left(\frac{100+c}{100}\right) = p$ setzet, so ist $s = ap^n$, und $\log s = \log a + n \log p$.

Nun ist in unserem Beyspiele

$\log a = \log 20000 = 4{,}3010300$

$n \log p = 12 \log 1{,}05 = 0{,}2542716$

folglich $\log s = 4{,}5553016$

und $s = 35917{,}12$ Fl. $= 35917$ Fl. $7\frac{1}{2}$ Kr.

Diese Formel kann aber nicht unmittelbar angewendet werden, um den Anwachs des Capitals zu berechnen, wenn die Anzahl der Jahre $n$ ein Bruch seyn sollte. Denn es sey in der obigen Aufgabe $n = m + \frac{1}{q}$, so ist der Anwachs des Capitals nach $m$ Jahren $= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^m$; und dieses als ein Capital betrachtet, trägt noch in der Zeit von $\frac{1}{q}$ Jahren $\frac{c}{100q} \cdot a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m$ Fl. Interesse, weil eben dieses Capital $a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^m$ Fl. in einem ganzen Jahre $\frac{c}{100} a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^m$ Fl. an Interessen bringet; mithin ist das Capital sammt Interessen nach $\left(m + \frac{1}{q}\right)$ Jahren $s = a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^m + \frac{c}{100q} \cdot a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^m$ $= a\left(\frac{100+c}{100}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{c}{100q}\right)$. Würde man aber, um den Anwachs des Capitals nach $m + \frac{1}{q}$ Jahren zu bestimmen, in der obigen Formel $n = m + \frac{1}{q}$ setzen; so wären $s = a\left(\frac{100+c}{100}\right)^{m+\frac{1}{q}}$ $= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^m \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^{\frac{1}{q}}$, welches augenscheinlich nicht einander gleich seyn kann. Um den Fehler deutlicher durch ein wirkliches Beyspiel einzusehen, sey oben $n = 12\frac{1}{2}$ Jahre; so ist das Capital nach 12 Jahren angewachsen auf 35917,12 Fl., und dieses trägt noch in $\frac{1}{2}$ Jahre 897,93 Fl.; weil 100 Fl. in dieser Zeit $\frac{5}{2}$ Fl. Interessen bringen. Mithin ist die ganze Summe nach $12\frac{1}{2}$ Jahren $s = 36815{,}05$ Fl. Würde man aber in der obigen Formel $n = 12^1$ setzen, so wäre $s = 20000 \cdot (1{,}05)^{\frac{25}{2}}$, dieses

logarithmisch entwickelt, gibt 36804,1, welches um 11 Fl. beynahe zu wenig ist. Beträchtlicher würde der Fehler seyn, wenn das anfängliche Capital größer wäre, oder wenn solches durch eine größere Anzahl der Jahre immer auf die angeführte Art vermehret würde. In den k. k. Staaten werden die Interessen in den öffentlichen Fonds halbjährig ausbezahlet. Wollte man mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder zum Capital schlagen (welches allhier sehr leicht angeht, weil die Interessen gewöhnlicher Weise um 8 auch 14 Tage vor dem verfallenen Termin schon ausgezahlet werden); so würde der Anwachs dieses Capitals beträchtlicher seyn, als im vorigen Falle. Z. B. es legt Jemand in das Wiener Banco-Amt ein Capital von 25000 zu $3\frac{1}{2}$ pr. Cento jährlichen Interessen an, und legt mit Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder als ein Capital an; wie hoch wird dieses Capital in 20 Jahren anwachsen? Wendet man hier obige Formel $s = ap^n$ an, so ist $a = 25000$, $n = 40$ halbe Jahre, und $c = \frac{3\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4} = \frac{175}{100}$; nähmlich $p = \left(100 + \frac{175}{100}\right) : 100 = 1{,}0175$; folglich $\log s = \log 25000 + 40 \log 1{,}0175 = 4{,}6993160$, und $s = 50039{,}8$. Würde man aber nur mit Ende eines jeden Jahres die Interessen zum Capitale schlagen, so wäre in der Formel $a = 25000$, $n = 20$ Jahre, und $c = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} = \frac{35}{10}$, nähmlich $p = 1{,}035$; folglich $\log s = \log 25000 + 20 . \log 1{,}035 = 4{,}6967460$, und $s = 49744{,}6$; also um 295 Fl. beynahe weniger als vorhin.

## §. 273.

Aus der Formel I. $\log s = \log a + n \log p$

fließen folgende

II. $\log a = \log s - n \log p$

III. $\log p = \frac{\log s - \log a}{n}$

IV. $n = \frac{\log s - \log a}{\log p}$

Nach jeder dieser Formeln können nun verschiedene hierher gehörige Rechnungsfragen beantwortet werden.

1. Frage. In einer Provinz befinden sich zwey Millionen Menschen: wenn nun diese Summe jährlich um den fünfzigsten Theil, das ist um zwey pr. Cento zunimmt, wie groß würde wohl die Anzahl der Menschen nach 100 Jahren seyn?

Antwort. Hier ist $a = 2000000$, $p = 1{,}02$; $n = 100$; folglich nach der Formel I. $\log s = \log 2000000 + 100.\ \log 1{,}02 = 7{,}1610500$, und $s = 14490000$ beynahe.

2. Frage. Es hat Jemand nach vier Jahren eine Summe von 6000 Fl. ohne Interessen zu fordern: wie viel ist sie jetzt werth, wenn die Interessen zu vier pr. Cento, und die Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $s = 6000$, $n = 4$, und $p = 1{,}04$, folglich nach der Formel II.
$\log a = \log 6000 - 4 \log 1{,}04 = 3{,}7100181$, und
$a = 5128{,}827$ Fl. $= 5128$ Fl. $49\frac{1}{2}$ Kr.

3. Frage. Ein Wucherer leihet Jemanden 600 Fl. und läßt sich dafür einen Schuldbrief von 800 Fl. ausstellen, die nach drey Jahren ohne Interessen zahlbar sind. Wie viel Interessen nimmt dieser jährlich von 100?

Antwort. Hier ist $a = 600$, $s = 800$, $n = 3$; folglich nach der Formel III. $\log p = \frac{\log 800 - \log 600}{3}$
$= 0{,}0416462$, und $p = 1{,}1006$; also etwas mehr als 10 pr. Cento.

4. Frage. Wie lang muß ein Capital liegen, daß es sammt den Interessen auf eine Summe anwachse, die noch einmahl so groß ist, als das anfängliche Capital, wenn die Interessen zu 4 pr. Cento vorgeschrieben sind, und jährlich zum Capital geschlagen werden?

Antwort. Hier ist $s = 2a$, $p = 1{,}04$; folglich ist nach der Formel IV. $n = \frac{\log 2a - \log a}{\log 1{,}04} = \frac{\log 2}{\log 1{,}04} = 17$ Jahre, nebst einem Bruche, nähmlich nach 18 Jahren wird die Summe schon größer seyn, als das Doppelte des anfänglichen Capitals.

§. 274

Aufgabe. Ein Capital $a$ wird angelegt, und nach Ver-

lauf eines jeden Jahres nicht nur mit seinen gefallenen Interessen zu $c$ pr. Cento, sondern auch noch überdieß mit einer Summe $b$ vermehret. Wie groß wird wohl die ganze Summe $s$ nach $n$ Jahren seyn?

Auflösung. Der Anwachs des Capitals $a$ nach $n$ Jahren ist nach der vorigen Aufgabe $ap^n$, wo $p$ wie vorhin $= \frac{100 + c}{100}$ ist.

Der Anwachs der Summe $b$, die nach Verlauf des ersten Jahres, oder mit Anfang des zweyten Jahres angelegt wird, ist $= bp^{n-1}$, weil diese Summe nur durch $n - 1$ Jahre anliegt.

Der Anwachs der Summe $b$, die nach Ende des zweyten Jahres angelegt wird, ist $bp^{n-2}$.

Eben so ist der Anwachs der Summe $b$, welche mit Ende des dritten Jahres angelegt wird $= bp^{n-3}$ u. s. w.

Endlich ist der Anwachs der Summe $b$, welche am Ende des vorletzten, oder mit Anfang des letzten Jahres angelegt wird $= bp$, weil diese Summe nur Ein Jahr liegt.

Es stehen demnach die Summen, auf welche die jährlich zugelegten Theile $b$ anwachsen, in folgender geometrischen Reihe: $bp + bp^2 + bp^3 + \ldots . bp^{n-1}$; hiervon ist die Summe $= \frac{bp(p^{n-1} - 1)}{p - 1}$ (nach §. 254, Nr. 5).

Addirt man nun zu diesem Betrage noch den Anwachs des Capitals $a$, so erhält man $s = ap^2 + \frac{bp(p^{n-1} - 1)}{p - 1}$.

Es sey z. B. $a = 6000$, $b = 500$, $n = 10$, und die Interessen sind zu 5 pr. Cento vorgeschrieben, nähmlich $p = 1{,}05$; so ist $ap^n = 9773{,}37$ } wenn man jedes insbesondere lo-
und $p^{n-1} = 1{,}551328$ } garithmisch entwickelt.
also $p^{n-1} - 1 = 0{,}551328$.

Mithin $\frac{bp(p^{n-1} - 1)}{p - 1} = \frac{500 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}551328}{0{,}05} = 5788{,}94$,

folglich $s = 9773{,}37 + 5788{,}94 = 15562{,}31$.

Setzet man aber in dieser Aufgabe $b = a$, nähmlich daß die jährliche Zulage dem anfänglichen Capitale gleich ist; so ist

$s = ap + ap^2 + ap^3 + \ldots ap^{n-1} + ap^n$; also nach (§. 254, Nr. 5) $s = \frac{ap(p^n - 1)}{p - 1}$

und I. $\log s = \log a + \log p + \log (p^n - 1) - \log (p - 1)$

II. $\log a = \log s + \log (p - 1) - \log p - \log (p^n - 1)$

III. $n = \frac{\log [ap + s(p-1)] - \log a}{\log p} - 1$.

Jede dieser Formeln löset nun wieder verschiedene hierher gehörige Rechnungsfragen auf, wie sich ein jeder deren einige nach Belieben in Zahlen aufsetzen, und durch Hülfe der Logarithmen entwickeln kann; z. B.

1. Frage. Ein Kaufmann war verpflichtet, durch 6 Jahre hinter einander, mit Anfange eines jeden Jahres 4000 Fl. zu bezahlen: er hat aber gar nichts bezahlet. Wie viel ist er am Ende des sechsten Jahres schuldig, wenn die Interessen zu 4 pr. Cento, und Interessen von Interessen gerechnet werden.

Antwort. Hier ist $a = 4000$, $n = 6$, $c = 4$; also $p = 1{,}04$; folglich ist nach der Formel

I. $\log s = \log 4000 + \log 1{,}04 - \log 0{,}04 + \log (1{,}04^6 - 1)$
$= \log 4000 + \log 26 + \log (1{,}04^6 - 1)$.

Nun ist $(1{,}04)^6 = 1{,}265318$, logarithmisch entwickelt;

ferner $\log (1{,}04^6 - 1) = \log 0{,}265318 = 0{,}4237667 - 1$

$\log 26 = 1{,}4149733$

$\log 4000 = 3{,}6020600$

$\log s = 4{,}4408000$

folglich $s = 27593{,}07$ Fl.

2. Frage. Es hat Jemand nach zwanzig Jahren eine Summe von 10000 Fl. ohne Interessen zu erheben; er will aber dafür während dieser zwanzig Jahre mit Anfang eines jeden Jahres eine gleiche Summe erhalten, daß die Schuld nach zwanzig Jahren ganz getilget sey. Wie viel kann ihm jährlich gegeben werden, wenn die Interessen zu 4 pr. Cento vorgeschrieben sind?

Antwort. Hier ist $s = 10000$, $n = 20$, $c = 4$; also $p = 1{,}04$; folglich ist nach der Formel II. $\log a = \log 10000 + \log 0{,}04 - \log 1{,}04 - \log (1{,}04^{20} - 1)$. Nun ist $(1{,}04)^{20} = 2{,}19112$,

daher log 10000 = = = 4,0000000
log 0,04 = = = 0,6020600 — 2
dec. Erg. log $(1{,}04^{20} - 1)$ = d. E. log 1,19112 = 9,9240445
dec. Erg. log 1,04 = = = 9,9829667

Folglich log $a$ = = = 2,5090712

und $a = 322{,}902$, welches jährlich für diese Schuld bezahlt werden kann; weil diese Summe zu 4 pr. Cento angelegt, und jährlich auf die angeführte Art vermehrt in zwanzig Jahren eine Summe von 10000 Fl. zum Vorschein bringet.

§. 275.

Aufgabe. Ein Capital $a$ wird zu $c$ pr. Cento angelegt, und das Interesse jährlich zum Capital geschlagen: dagegen aber wird mit Ende eines jeden Jahres eine Summe $b$ hinweggenommen; wie groß wird der Rest $R$ nach $n$ Jahren noch seyn?

Auflösung. Das Capital $a$, wenn nichts davon genommen wird, bringt in $n$ Jahren die Summe $ap^n$ zum Vorschein (vermöge §. 273); und die Summe $b$, die mit Ende des ersten Jahres hinweggenommen wird, kann ebenfalls als ein Capital angesehen werden, welches in $(n-1)$ Jahren auf $bp^{n-1}$ anwachsen würde, wenn es durch diese Zeit immer angelegt verbliebe. Eben so wächst die Summe $b$, welche mit Ende des zweyten Jahres hinweggenommen wird, als Capital betrachtet auf $bp^{n-2}$ u. s. w. und die Summe $b$, welche am Ende des vorletzten Jahres hinweggenommen wird, auf $bp$. Endlich, da am Ende des letzten Jahres ebenfalls noch $b$ Fl. hinweggenommen werden, so ist nach $n$ Jahren das Capital $ap^n$, um $b + bp + bp^2 + \ldots . bp^{n-1}$ vermindert worden. Diese Reihe (nach §. 254, Nr. 5) summirt, gibt $\frac{b(p^n-1)}{p-1}$.

Folglich I. $R = ap^n - \frac{b(p^n-1)}{p-1}$

II. $a = \frac{b(p^n-1)}{p^n(p-1)} + \frac{R}{p^n}$

III. $b = (ap^n - R).\ \frac{p-1}{p^n-1}$

IV. $n = \frac{\log[(p-1)R-b] - \log[(p-1)a-b]}{\log p}$.

Einige Beyspiele zur Anwendung dieser Formeln.

1. Frage. Es legt Jemand ein Capital von 30000 Fl. zu 4 pr. Cento an, und nimmt jährlich von den Interessen 800 Fl. zu seiner Unterhaltung weg; den Überrest aber schlägt er zum Capital. Wie groß wird dieses Capital nach 15 Jahren seyn?

Antwort. Hier ist $a = 30000$, $b = 800$, $n = 15$, und $c = 4$; nähmlich $p = 1{,}04$, folglich ist nach der Formel I. $R = 30000 \cdot (1{,}04)^{15} - \frac{800 \cdot (1{,}04)^{15} - 800}{0{,}04}$. Nun ist $(1{,}04)^{15} = 1{,}800941$, folglich $R = 38009{,}41$.

2. Frage. Es hat Jemand durch sechs Jahre hinter einander eine Rente von 500 Fl. zu genießen: er ist gesonnen diese Rente zu verkaufen; was wird sie wohl jetzt werth seyn, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ pr. Cento vorgeschrieben sind? Oder, welches einerley ist: es will Jemand seinem Freunde ein jährliches Auskommen von 500 Fl. bey einer allgemeinen Leihbank durch sechs Jahre anweisen; wie groß muß das Capital seyn, welches bey dieser Bank zu erlegen ist, wenn die Interessen zu $3\frac{1}{2}$ pr. Cento gerechnet werden, und am Ende des sechsten Jahres das Capital sammt den Interessen verzehret seyn soll?

Antwort. Hier ist das unbekannte Capital $= a$, die jährliche Rente 500 Fl. $= b$, sechs Jahre $= n$, $3\frac{1}{2} = c$, mithin $p = 1{,}035$; und da nach Ende des sechsten Jahres das Capital sammt den Interessen verzehrt seyn soll, so ist der Rest $R = 0$; folglich ist nach der Formel II.

$$a = \frac{500 \cdot (1{,}035)^6 - 500}{(1{,}035) \cdot 0{,}035} = 14286 - \frac{14286}{(1{,}035)^6} = 2665 \text{ Fl.}$$

3. Frage. Es ist ein Rittergut zu verkaufen, und es melden sich drey Käufer: der erste will dafür 34500 Fl. alsogleich bar bezahlen; der zweyte bietet 38000 Fl. aber so, daß er 6000 Fl. alsogleich, und vier Jahre hinter einander mit Ende eines jeden Jahres 8000 Fl. erlegen will; der dritte bietet 40000 Fl. jedoch so, daß er 4000 Fl. alsogleich, und sechs Jahre hinter einander mit Ende eines jeden Jahres 6000 Fl. erlegen will. Wer hat nun am meisten gebothen, wenn die Interessen zu 5 pr. Cento gerechnet werden.

Antwort. Man untersuche so wie im vorhergehenden Beyspiele, wie viel die 32000 Fl., welche der zweyte in vier Zahlungsterminen bezahlen will, für jetzt werth sind; nähmlich man setze in der Formel II. $b = 8000$, $n = 4$, $p = 1{,}05$, und $R = 0$, man findet für den jetzigen Werth dieser Zahlungen

$$a = \frac{8000\ (1{,}05)^4 - 8000}{(1{,}05)^4 \,.\, 0{,}05} = 160000 - \frac{160000}{(1{,}05)^4} = 28367{,}6.$$

Mithin ist der Anboth des zweyten = 6000 + 28367,6 = 34367,6 Fl.

Eben so bestimme man aus der Formel II., wie viel die sechs Zahlungen des dritten für jetzt werth sind, indem man $b = 6000$, $n = 6$, $p = 1{,}05$, $R = 0$ setzet; und man findet für den jetzigen Werth $a = 30454{,}16$. Mithin ist der Anboth des dritten = 4000 + 30454,16 = 34454,16 Fl. folglich hat der erste den größten Anboth gemacht.

4. Frage. Es soll eine gegenwärtige Schuld von 1000 Fl. in fünf jährliche Zahlungstermine eingetheilet werden, damit am Ende eines jedes Jahres eine gleiche Summe bezahlt wird. Wie groß muß diese Summe seyn, wenn die Interessen zu 5 pr. Cento vorgeschrieben sind?

Antwort. Man sehe die Summe, welche alle Jahre bezahlt werden soll, als eine Rente an, wovon der gegenwärtige Werth 1000 Fl. ist; also ist hier $a = 1000$, $c = 5$, $p = 1{,}05$, $R = 0$; folglich nach der Formel III. $b = \frac{1000 \,.\, 1{,}05^5 \,.\, 0{,}05}{1{,}05^5 - 1}$ = 230,97 Fl., welche in jedem Termin bezahlt werden müssen.

5. Frage. Es hat Jemand ein Capital von 100000 Fl. zu 5 pr. Cento anliegen: allein mit den Interessen hiervon kann er seinen Aufwand nicht bestreiten; er braucht jährlich eine Summe von 6000 Fl., und ist daher bemüßiget vom Capitale mit Ende eines jeden Jahres so viel hinweg zu nehmen, daß dieses sammt den gefallenen Interessen 6000 Fl beträgt. In wie viel Jahren wird der Mann wohl ein Bettler werden, wenn er so fortfährt?

Antwort. Hier ist $a = 100000$, $b = 6000$, $p = 1{,}05$, und $R = 0$; folglich nach der Formel IV. $n = \frac{\log -600 - \log -1000}{\log 1{,}05}$

$= \left(\log \frac{-6000}{-1000}\right) : \log 1{,}05 = \frac{\log 6}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36$

Jahre beynahe. Wollte man nun wissen, wie viel ihm nach verflossenen 36 Jahren noch übrig bleibt, so setze man in der Formel I. $a = 100000$, $b = 6000$, $p = 1{,}05$ und $n = 36$; so findet man $R = 4163{,}7$ Fl., welche mit Anfang des sieben und dreyßigsten Jahres noch vorhanden sind. Dieses bringt in diesem Jahre noch 208,2 Fl. Interessen; mithin hat dieser Mann am Ende des sieben und dreyßigsten Jahres 4371,9 Fl. zu empfangen, wo sodann das ganze Capital sammt Interessen verzehrt ist.

Man würde aber fehlen, wenn man $n = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}$ $= 36{,}724$ Jahre $= 36$ Jahre 264 Tage setzen wollte; nähmlich daß dieser Mann den nähmlichen Aufwand durch 36 Jahre und 264 Tage treiben könne; denn der Rest 4163,7 Fl., welcher nach verflossenen 36 Jahren verbleibt, bringt in 264 Tagen 150,6 Fl. Interessen; also hat er nach Verlauf dieser Zeit in Allem 4314,3 Fl.; er braucht aber in dieser Zeit zu seinem Aufwande 4339,7 Fl.; mithin hat er um 25,4 Fl. zu wenig.

6. Frage. Eine Gemeinde hat von ihrer Herrschaft eine Summe von 20000 Fl. ausgeborgt; dagegen hat sie der Herrschaft einen Wald, welcher jährlich 1500 Fl. reinen Nutzen bringt, indessen zum Unterpfand hindan gegeben. Wie viele Jahre kann die Herrschaft diesen Wald mit Recht benutzen, wenn die Interessen zu 5 pr. Cento und Interessen von Interessen gerechnet werden?

Antwort. Hier ist $a = 20000$, $b = 1500$, $p = 1{,}05$ und weil das ganze Capital durch Benutzung des Waldes getilgt seyn soll, ist $R = 0$; folglich nach der Formel IV.

$n = \frac{\log -1500 - \log -500}{\log 1{,}05} = \left(\log \frac{-1500}{-500}\right) : \log 1{,}05$

$= \frac{\log 3}{\log 1{,}05} = \frac{4771213}{211893} = 22$ Jahre beynahe, durch welche die Herrschaft den Wald mit Recht benutzen darf. Und wenn man nun in der Formel I. $n = 22$, $a = 20000$, $b = 1500$, und $p = 1{,}05$ setzet, so findet man $R = 747{,}4$ Fl., welches die

Gemeinde der Herrschaft nach verflossenen 22 Jahren bey der Zurücknahme des Waldes noch zu bezahlen hat. Gesetzt aber, die Herrschaft hätte das Pfand durch 30 Jahre benutzt, und nun soll liquidiret werden; so ist, nach der Formel I. $R =$ — 13219,5. Nähmlich die Herrschaft muß der Gemeinde nebst dem Walde auch noch eine Summe von 13219,5 Fl. zurückgeben.

Anmerkung. Diese angeführten Rechnungsaufgaben mögen einstweilen hinreichend seyn, um den Nutzen einzusehen, welchen die Logarithmen auch bey den, im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen verschaffen; und wie schwer es demjenigen bloß mechanischen Rechner fallen müsse, dergleichen Aufgaben aufzulösen, dem die Theorie der Logarithmen ganz unbekannt ist. Indessen kann doch der fleißige Anfänger sich über alle diese vorhergehenden Formeln verschiedene nummerische Beyspiele aufsetzen, um sich den Gebrauch der Logarithmen recht geläufig zu machen.

---

# IV. Abschnitt.

## Von den Functionen und ihren Verwandlungen.

### §. 276.

Bey der Auflösung mathematischer Aufgaben findet man oft für die gesuchte Größe einen analytischen Ausdruck, welcher eine, oder auch mehrere unbestimmte Größen von der Beschaffenheit enthält, daß man für jede unbestimmte Größe beliebige Werthe setzen kann, wodurch auch der gefundene Ausdruck verschiedene Werthe annimmt. Z. B. aus der Aufgabe zwey Größen $x$ und $y$ zu finden, deren Product $= a$ sey, folgt $xy = a$, $y = \frac{a}{x}$, und $x = \frac{a}{y}$. Nimmt man nun in der letzten Gleichung für $y$ einen beliebigen Werth an, etwa $y = \frac{1}{2} a$, so ist sodann $x = 2$; setzt man aber $y = \frac{1}{3} a$, so ist $x = 3$ u. s. w., wo für jeden geänderten Werth von $y$ sich auch $x$ verändert; nur $a$ allein wird hier für unveränderlich angesehen. Diejenigen völlig bestimmten Größen, welche in

einer Gleichung immer einen nähmlichen Werth beybehalten, werden beständige oder unveränderliche Größen genannt; solche unbestimmte Größen aber, denen man in einer Gleichung nach Belieben verschiedene Werthe beylegen kann, heissen veränderliche Größen. So sind in dem angeführten Beyspiele $x$, $y$ veränderliche Größen, $a$ aber ist beständig. Man pflegt überhaupt die veränderlichen Größen, so wie die unbekannten mit den letzten Buchstaben des Alphabets $x$, $y$, $z$, und die beständigen mit den ersten $a$, $b$, $c$ zu bezeichnen.

Ein algebraischer Ausdruck kann zwar (nach §. 57) eine Function von einer jeden darin vorkommenden Größe genannt werden; man pflegt aber diejenigen Ausdrücke, worin sich veränderliche Größen befinden, bloß Functionen von den veränderlichen Größen zu nennen. So sind z. B. die Ausdrücke $a + x$, $ax - x^2$, $\frac{b}{a - x}$, $a - \sqrt{ax}$ Functionen von der veränderlichen Größe $x$; und die Ausdrücke $axy$, $x^2 - ay$, $\frac{b + ax}{y}$ sind Functionen von $x$ und von $y$ u. s. w.

Ist daher zwischen zwey veränderlichen Größen $x$ und $y$ eine Gleichung gegeben, so läßt sich sowohl $x$ durch $y$, als auch $y$ durch $x$ ausdrücken, das heißt, $x$ ist sowohl eine Function von $y$, so wie $y$ eine Function von $x$ seyn muß.

## §. 277.

Die Functionen werden eingetheilet in ganze und gebrochene. Ganze Functionen heissen diejenigen, worin sich im Nenner keine veränderliche Größe befindet; hingegen werden jene Functionen, welche im Nenner veränderliche Größen enthalten, gebrochene Functionen genannt.

Ferner werden die Functionen in rationale, und irrationale Functionen eingetheilet. Rational heissen sie, wenn die veränderliche Größe mit keinem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist; im Gegentheile, wenn sich in der Function die veränderliche Größe unter einem Wurzelzeichen befindet, oder einen gebrochenen Exponenten hat, so ist solche eine irrationale Function. So z. B. ist $\frac{ax + x^2}{v}$ eine ganze ra-

tionale, $a\sqrt{x-b}$ eine ganze irrationale, $\frac{ax-b}{x}$ eine gebrochene rationale, und $\frac{a\sqrt{(x+b)}}{x}$ eine gebrochene irrationale Function.

§. 278.

Jede Function einer veränderlichen Größe, aus wie viel Gliedern sie auch bestehen mag, läßt sich auf so viele Glieder bringen, als verschiedene Potenzen der veränderlichen Größe vorhanden sind. Z B. die Functionen $ax^3 + 2ax^2 + 5x - a + 3cx^2 - x^3 + 3bc + x^2$ scheint 8 Glieder zu haben; ordnet man selbe aber so, daß einerley Potenzen der veränderlichen Größe zusammen zu stehen kommen; so hat man $(a-1)x^3 + (2a+3c+1)x^2 + 5x + (3bc-a)$; nähmlich eine Function von 4 Gliedern, oder wenn man die beständigen Coefficienten $(3bc-a) = A$, $5 = B$, $(2a+3c+1) = C$, und $(a-1) = D$ setzt, so ist die Function $= A + Bx + Cx^2 + Dx^3$.

§. 279.

Es läßt sich daher keine ganze rationale Function von einer veränderlichen Größe $x$ gedenken, die nicht unter die Gestalt oder Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ gebracht werden kann, wo die beständigen Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ u. s. w., was immer für positive oder negative, ganze gebrochene, rationale oder irrationale Werthe haben können. Und jede rationale gebrochene Function kann daher durch die Form $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots}{a+bx+cx^2+dx^3\ldots}$ vorgestellet werden, wo die Coefficienten derjenigen Potenzen, welche in der Function abgehen, $= o$ seyn müssen.

§. 280.

Wenn man zwey Functionen einer veränderlichen Größe von einerley Form z. B. $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots)$ und $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots)$ mit einander multipliciret, die Factoren mögen nun eine bestimmte oder eine unbestimmte Anzahl der Glieder haben; so kann das Product als eine Function von eben der nähmlichen Form dargestellet werden.

Denn es ist nach den Regeln der Multiplication (§. 64).

$$(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4..)\times(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4..)$$
$$=aA+aBx+aCx^2+aDx^3+aEx^4+\ldots.$$
$$+bAx+bBx^2+bCx^3+bDx^4+\ldots.$$
$$+cAx^2+cBx^3+cCx^4+\ldots.$$
$$+dAx^3+dBx^4+\ldots.$$
$$+eAx^4+\ldots.$$

Setzet man nun $Aa=\alpha$, $aB+bA=\beta$, $aC+bB+cA=\gamma$, $aD+bC+cB+dA=\delta$, $aE+bD+cC+dB+eA=$ , so ist $(A+Bx+Cx^2+Dx^3+..)\times(a+bx+cx^2+dx^3+..)$ $=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+..$

Das nähmliche findet auch Statt; wenn mehrere Factoren von der nähmlichen Form mit einander multipliciret werden.

## §. 281.

Wenn man die Function $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+..$ die Anzahl der Glieder möge bestimmt seyn, oder ohne Ende fortlaufen, nach den Regeln (§. 132) zum Quadrate erhebet, und die gleichnahmigen Potenzen der veränderlichen Größe unter einander gehörig ordnet, so ist

$$(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots.)^2$$
$$=A^2+\left.\begin{matrix}2AB\,x+B^2\\+2AC\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}+2BC\\+2AD\end{matrix}\right\}x^3+\left.\begin{matrix}+C^2\\+2BD\\+2AE\end{matrix}\right\}x^4+\ldots$$

folglich ist das Quadrat wieder eine Function von der nähmlichen Form.

Auf die nähmliche Art könnte auch die Function $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots.$ nach den Regeln (§. 135) zum Cubus erhoben werden.

Überhaupt muß jede Potenz eines ganzen Exponenten von der Function $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots.$ wieder eine Function von der nähmlichen Form seyn; weil jede Potenz ein Product von lauter Factoren einer nähmlichen Form ist (vermöge §. 113).

## §. 282.

Jede gebrochene Function von der Gestalt $\frac{1}{a+bx}$ läßt sich

nach den Regeln der Division (§. 67) in eine unendliche Reihe verwandeln; denn es ist

$$1 : (a + bx) = \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3} - \frac{b^3x^3}{a^4} + \ldots$$

$$\begin{array}{l} \pm 1 \pm \frac{bx}{a} \\ \hline \quad - \frac{bx}{a} \\ \quad \mp \frac{bx}{a} \mp \frac{b^2x^2}{a^2} \\ \hline \quad + \frac{b^2x^2}{a^2} \\ \quad \pm \frac{b^2x^2}{a^2} \pm \frac{b^3x^3}{a^3} \\ \hline \quad - \frac{b^3x^3}{a^3} \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Setzet man nun die beständigen Coefficienten $\frac{1}{a} = A$, $-\frac{b}{a^2} = B$, $\frac{b^2}{a^3} = C$, $-\frac{b^3}{a^4} = D$ u. s. w., so ist

$$\frac{1}{a + bx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

Eben so läßt sich auch durch eine bloße Division zeigen, daß die Function $\frac{1}{a + bx + cx^2 + dx^3}$ durch eine eben solche Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3$ vorgestellet werden könne.

Nun ist $\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + ..}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ..} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + ..) \times \frac{1}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + ..) \times (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots.)$, und ferner (wegen §. 280) $= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots.$ daher kann jede gebrochene rationale Function durch eine eben solche Form vorgestellet werden.

## §. 283.

**Wenn eine Function einer veränderlichen Größe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots.$ sie möge eine bestimmte oder unbe=**

stimmte Anzahl der Glieder enthalten, immer gleich Null verbleibet, man möge für $x$ was immer für einen Werth, auch $x = 0$ annehmen, so muß jeder der beständigen Coefficienten $= 0$ seyn; nähmlich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$.

Denn man setze $x = 0$, so sind auch alle Potenzen von $x = 0$; daher verschwinden alle Glieder der Function bis auf das erste Glied; und man erhält sodann $A = 0$. Da aber $A$ eine beständige Größe ist, so muß auch bey jedem andern Werthe von $x$ der nähmliche Coefficient $A = 0$ seyn.

Da nun $A = 0$ ist, so kann solches in der Function ausgelassen werden, und man erhält $0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ oder wenn man alles durch $x$ dividiret, so ist $0 = B + Cx + Dx^2 + \ldots$, wo nun wieder für $x = 0$, auch $B = 0$ seyn muß; und folglich ist auch $B = 0$ für jeden andern Werth von $x$, weil $B$ ebenfalls eine beständige Größe ist. Und eben so läßt sich zeigen, daß $C = 0$, $D = 0$ u. s. w., nähmlich daß jeder Coefficient $= 0$ seyn muß.

Die Richtigkeit des angeführten Satzes bey einer Function von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots = 0$ läßt sich auch auf folgende Art darthun.

Man nehme eine beliebige Anzahl der Glieder dieser Function, z. B. vier Glieder, nähmlich $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0$, und setze hier für die veränderliche Größe $x$ eben so viele verschiedene Werthe, damit man so viele Gleichungen erhalte, als Glieder der Function genommen worden sind; nähmlich man setze zuerst $x = 1$, sodann $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, u. s. w. so erhält man folgende Gleichungen

$$A + B + C + D = 0$$
$$A + 2B + 4C + 8D = 0$$
$$A + 3B + 9C + 27D = 0$$
$$A + 4B + 16C + 64D = 0.$$

Hieraus findet man durch die Subtraction der Gleichungen (nach §. 222) $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Und so kann man so viele Glieder der Function annehmen, als man will,

und durch die Formirung eben so vieler Gleichungen zeigen, daß jeder Coefficient = 0 seyn müsse.

So wie vorher erwiesen wurde, daß bey der angeführten Function unter der gesetzten Bedingung jeder Coefficient = 0 seyn müsse; eben so läßt sich dieses auch darthun, wenn die vorgelegte Function irgend eine andere Gestalt hätte, z. B.
$0 = A + Bx^p + Cx^{p+q} + Dx^{p+2q} + Ex^{p+3q} + Fx^{p+4q} + \ldots$
es mögen $p$ und $q$ was immer für ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen, bedeuten.

Ist nun eine Function von der Gestalt $a + bx^p + cx^{p+q} + dx^{p+2q} + \ldots gx^{p+nq}$ immer gleich einer andern Function von der nähmlichen Form
$\alpha + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \ldots + \pi x^{p+nq} + \omega x^{p+tq}$,
unter der Bedingung, daß $x$ jeden beliebigen Werth annehmen kann; so müssen die beyderseitigen Coefficienten, die zu einerley Potenzen von $x$ gehören, einander gleich seyn; und jene, welche auf der andern Seite keine correspondirenden Coefficienten der nähmlichen Potenz haben, müssen für sich = 0 seyn.

Denn da $a + bx^p + cx^{p+q} + dx^{p+2q} + \ldots gx^{p+nq}$
$= \alpha + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \ldots + \pi x^{p+nq} + \omega x^{p+tq}$
ist, so ist auch, wenn man alle Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringet,

$$0 = \left.\begin{matrix} \alpha + \beta \\ -a - b \end{matrix}\right\} x^p + \left.\begin{matrix} +\gamma \\ -c \end{matrix}\right\} x^{p+q} + \left.\begin{matrix} +\ldots+\pi \\ -\ldots-g \end{matrix}\right\} x^{p+nq} + \omega x^{p+tq}$$

folglich ist vermöge des Vorhergehenden
$\alpha - a = 0$, $\beta - b = 0$, $\gamma - c = 0$, $\pi - g = 0$, $\omega = 0$,
und daher $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, $\pi = g$, und $\omega = 0$.

## §. 284.

Wir wollen von dem angeführten ungemein fruchtbaren Satze alsogleich einige Anwendungen machen.

Aufgabe. Man soll die gebrochene Function $\frac{a - x}{a + x}$ in eine gleichgültige Reihe verwandeln.

Auflösung. Man setze (nach §. 282).

$$\frac{a-x}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$

die beständigen Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ u. s. w., sollen nähmlich von der Beschaffenheit seyn, daß bey jedem Werthe von $x$ diese Gleichung Statt finde. Um nun die Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ wirklich zu bestimmen, multiplicire man beyde Theile der Gleichung mit dem Nenner $a + x$; so erhält man

$$a - x = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \ldots$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

bringt man nun die Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} aA + aB \\ -a + A \\ +1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} +aC \\ +B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} +aD \\ +C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} +aE \\ +D \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

daher ist (vermöge §. 283):

$Aa - a = 0$, und $A = +1$

$aB + A + 1 = 0$, $B = -\frac{2}{a}$

$aC + B = 0$, $C = +\frac{2}{a^2}$; $aE + D = 0$; u. s. w.

folglich ist $\frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{2x^4}{a^4} - \ldots$

welches man auch erhalten würde, wenn man $\frac{1}{a+x}$ (nach §. 282) durch die Division in eine Reihe verwandelt, und sodann solche mit dem Zähler $(a - x)$ multipliciret.

Auf diese Art läßt sich auch jede andere gebrochene Function in eine gleichgültige Reihe verwandeln, wenn man die gegebene Function einer Reihe $Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots$ gleich setzt, wo die Exponenten in einer solchen arithmetischen Reihe auf einander folgen müssen, daß alle Exponenten der veränderlichen Größe, die sich sowohl im Zähler als im Nenner befinden, darunter enthalten sind; sodann wird die angenommene Reihe mit dem Nenner der Function multipliciret, die Gleichung auf Null gebracht, und jeder Coef-

ficient entwickelt. Z. B. es sey $\frac{1+x^2}{1-x-x^3}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln; so setze man

$$\frac{1+x^2}{1-x-x^3} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots$$

Es ist hier für das erste Glied der Reihe 1 angenommen worden, weil es einleuchtend ist, daß für $x=0$ die Function $=1$ seyn muß. Multipliciret man nun beyderseits mit dem Nenner, und bringet die Gleichung auf Null, so ist

$$\begin{aligned} 0 = 1 &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \ldots \\ -1 &- x - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - Dx^5 - Ex^6 - \ldots \\ &- x^2 - x^3 - Ax^4 - Bx^5 - Cx^6 - \ldots \end{aligned}$$

daher ist $A-1=0$, $B-A-1=0$, $C-B-1=0$,
$D-C-A=0$, $E-D-B=0$, $F-E-C=0$;
nähmlich $A=1$, $B=2$, $C=3$, $D=4$, $E=6$, $F=9$ u. s. w.

folglich $\frac{1+x^2}{1-x-x^3} = 1+x+2x^2+3x^3+4x^4+6x^5+9x^6+\ldots$

wo jeder Coefficient vom vierten angefangen aus dem ersten und dritten vorhergehenden besteht, so z. B. ist der Coefficient $F=E+C$, nähmlich $9=6+3$; und der darauf folgende ist $=9+4=13$; so, daß daher diese Coefficienten in einer sogenannten **wiederkehrenden, oder recurrenten Reihe** fortgehen. Man nennt solche Reihen, wo jedes folgende Glied aus einigen vorhergehenden besteht, **wiederkehrende oder recurrente**, weil die 1ten, 2ten, 3ten... Differenzen immer die nähmliche Reihe wieder geben.

Ingleichen es sey $\frac{x+1}{2+\sqrt{x}}$ in eine gleichgültige Reihe zu verwandeln, so setze man

$$\frac{x+1}{2+x^{\frac{1}{2}}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^2 + \ldots\ldots\ldots$$

so ist $x+1 = 2A + 2Bx^{\frac{1}{2}} + 2Cx + 2Dx^{\frac{3}{2}} + 2Ex^2 + \ldots$
$+ Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + \ldots$

und
$$\begin{aligned} 0 = 2A &+ 2Bx^{\frac{1}{2}} + 2Cx + 2Dx^{\frac{3}{2}} + 2Ex^2 \\ -1 &+ Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 \\ &- x \end{aligned}$$

daraus folgt $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{5}{8}$, $D = -\frac{5}{16}$, $E = \frac{5}{32}$ u. s. w.

folglich $\frac{x+1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{4} + \frac{5x}{8} - \frac{5x^{\frac{3}{2}}}{16} + \frac{5x^2}{32} - \ldots$

Eine ausführliche und gründliche Abhandlung von der Verwandlung gebrochener Functionen in gleichgültige Reihen findet man in Hrn. Pasquich mathem. Analys. I. B.

## §. 285.

Aufgabe. Man soll die Function

$(x - 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 - 6x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots)^{\frac{1}{2}}$

in eine gleichgültige Reihe verwandeln.

Auflösung. Es sey $(x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots)^{\frac{1}{2}}$

$= Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} + \ldots\ldots$

Man hat hier auch im ersten Gliede $x$ angenommen, weil für $x = 0$ auch die ganze Function $= 0$ seyn muß.

Erhebt man nun beyde Theile der Gleichung zum Quadrate, so erhält man $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - \ldots\ldots$

$$= A^2x + 2ABx^2 + B^2x^3 + 2BCx^4 + C^2x^5$$
$$+ 2ACx^3 + 2ADx^4 + 2BDx^5$$
$$+ 2AEx^5$$

und wenn man die Gleichung auf Null bringet

$$0 = \begin{matrix} A^2 \\ x \\ -1 \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} +2AB \\ \\ +2 \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} +B^2 \\ +2AC \\ -3 \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} +2BC \\ +2AD \\ +4 \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} +C^2 \\ +2BD \\ +2AE \\ -5 \end{matrix}\Big\} x^5$$

Hieraus folgt $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$ u. s. w.

folglich ist $(x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + 5x^5 - \ldots\ldots)^{\frac{1}{2}}$

$= x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{9}{2}} - \ldots\ldots$

Wenn man aber die Function $(x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots)^{\frac{1}{2}}$

$= Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + Ex^{\frac{5}{2}}$ setzet, so findet man bey der Entwicklung, daß die Coefficienten an den geraden Stellen $B, D, F$ u. s. w. $= 0$ seyn müssen.

Auf diese nähmliche Art läßt sich auch jede andere irrationale Potenz einer Function durch eine gleichgültige Reihe darstellen, wenn man die Function einer Reihe von schicklichen auf

einander folgenden Potenzen der veränderlichen Größe gleich setzet, sodann durch die Lehre von den Potenzen die Function von dem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten befreyet, und die unbekannten Coefficienten nach dem §. 283 vorgetragenen Satze entwickelt. So z. B. findet man auf diese Art

$$\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \ldots$$

wenn man $\sqrt[3]{(a^3 + x^3)} = a + Ax^3 + Bx^6 + Cx^9 + \ldots$ setzet, beyde Theile der Gleichung zum Cubus erhebet, und die Coefficienten $A$, $B$, $C$ (nach §. 283) entwickelt. Die nähmliche Reihe haben wir auch schon im §. 140, Beyspiel Nr. 3 gefunden.

## §. 286.

Aufgabe. Man soll das summatorische Glied einer Reihe finden, deren allgemeines Glied eine gegebene rationale Function von $n$ ist; als z. B. $t = 25 + 4n^2 - n$.

Auflösung. Da das gegebene allgemeine Glied eine rationale Function von $n$ ist, so kann solches (vermöge §. 247) als das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe des so vielten Ranges, als der höchste Exponent von $n$ Einheiten enthält, angesehen werden. In unserem Beyspiele ist es also das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges; hiervon ist das summatorische Glied (vermöge §. 238) $s = An + Bn^2 + Cn^3$.

Da nun $n$ eine veränderliche Größe ist, so setze man in dieser Formel $(n - 1)$ statt $n$, so wird man die Summe von $(n - 1)$ Gliedern haben, die wir mit $s^1$ bezeichnen wollen, nähmlich

$$s^1 = A(n - 1) + B(n-1)^2 + C(n-1)^3 = An - A + Bn^2 - 2Bn + B + Cn^3 - 3Cn^2 + 3Cn - C.$$

Es muß aber die Summe von $n - 1$ Gliedern, von der Summe von $n$ Gliedern abgezogen (§. 231), das $n^{te}$ Glied übrig lassen, nähmlich $s - s^1 = t$; folglich ist

$$An + Bn^2 + Cn^3 - An + A - Bn^2 + 2Bn - B - Cn^3 + 3Cn^2 - 3Cn + C = 25 + 4n^2 - n,$$ nähmlich

$$25 + 4n^2 - n = A + 2Bn - B + 3Cn^2 - 3Cn + C;$$

und diese Gleichung auf Null gebracht, gibt

$0 = (A - B + C - 25) + (2B - 3C + 1)n + (3C - 4)n^3$
daher (vermöge §. 283) $A - B + C - 25 = 0$, $2B - 3C + 1 = 0$, $3C - 4 = 0$. Aus diesen Gleichungen findet man

$$A = \frac{151}{6},\ B = \frac{9}{6},\ C = \frac{8}{6}.$$

Es ist demnach die gesuchte Summenformel

$$s = \frac{151n + 9n^2 + 8n^3}{6}.$$

## §. 287.

Der im §. 283 angeführte Satz kann auch mit Nutzen angewendet werden, wenn eine gebrochene Function in mehrere einfache ausgedrückte Brüche zu zerlegen ist, welches in der Integralrechnung öfters erforderlich seyn wird. Eine solche Zerlegung einer gebrochenen Function kann sehr leicht bewerkstelliget werden, wenn sich nur der Nenner des vorgegebenen Bruches in mehrere ungleiche Factoren auflösen läßt, deren jeder eine Function von einer nähmlichen Größe des nähmlichen Exponenten vorstellet. Z. B. der Bruch $\frac{1}{a^2x - x^3}$ kann in drey andere zertheilet werden, weil $\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{1}{x(a+x)(a-x)}$ ist; (der Nenner $a^2x - x^3$ besteht nähmlich aus drey ungleichen Factoren $x$, $a + x$, $a - x$; jeder ist eine Function von der nähmlichen Größe $x$, auch hat $x$ in einem jeden Factor den nähmlichen Exponenten).

Um die drey Brüche zu finden, setze man

$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x},$$

bringe diese drey Brüche auf eine gleiche Benennung, nähmlich

$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{a^2A - Ax^2 + aBx - Bx^2 + aCx + Cx^2}{a^2x - x^3}, \text{ oder}$$

$1 = a^2A + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2$, und reducire die Gleichung auf Null; so ist

$0 = (a^2A - 1) + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2$;
folglich $a^2A - 1 = 0$, $aB + aC = 0$, $C - A - B = 0$,
nähmlich $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{2a^2}$, $C = \frac{1}{2a^2}$.

Es ist demnach $\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(a+x)} + \frac{1}{2a^2(a-x)}$.

Diese Zertheilung findet auch noch Statt, wenn schon der Zähler des Bruches eine zusammengesetzte Größe seyn sollte; nur muß in diesem Falle der höchste Exponent derjenigen Größe, aus der man die ungleichen Factoren formiret, in dem Zähler wenigstens um 1 kleiner seyn, als der höchste Exponent der nähmlichen Größe in dem Nenner ist. Wäre aber der höchste Exponent der veränderlichen Größe im Zähler größer als im Nenner, so kann die angeführte, zur Zertheilung der gebrochenen Function erforderliche Eigenschaft bloß allein mittelst der Division des Zählers durch den Nenner bewirket werden. Z. B. die Function $\frac{1 - x + 2a^4x + x^2 - 2x^5}{a^2x - x^3}$ läßt sich durch die Division in $2x^2 + 2a^2 + \frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3}$ verwandeln. Und nun wird der Bruch $\frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3}$ in folgende drey Brüche zerleget,

$\frac{1}{a^2x} - \frac{(1 + a + a^2)}{2a^2(a+x)} + \frac{(1 - a + a^2)}{2a^2(a-x)}$, wenn man

$\frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x}$ setzet, die Brüche auf gleiche Benennung bringet, die ganze Gleichung auf Null reduciret, und endlich die Größen $A$, $B$, $C$ bestimmet.

Eben so läßt sich der Bruch $\frac{a + bx + cx^2}{x^3 - 2ax^2 + a^2x} = \frac{a + bx + cx^2}{x.(x-a)^2}$ zertheilen, wenn man $\frac{a + bx + cx^2}{x^3 - 2ax^2 + a^2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x-a)^2}$ setzet, und sodann die Coefficienten $A$, $B$, $C$ auf die angeführte Art bestimmet.

Ferner da $\frac{1 + x^3}{a^3x + x^4} = \frac{1 + x^3}{x(x+a)(x^2 - ax + a^2)}$ ist, so läßt sich dieser Bruch ebenfalls zertheilen, wenn man

$\frac{1 + x^3}{a^3x + x^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx + D}{a^2 - ax + x^2}$ setzet; denn die Größen $A$, $B$, $C$, $D$ lassen sich sodann auf die angeführte Art richtig bestimmen.

Wäre endlich ein Bruch von dieser Gestalt $\frac{a}{x^3(b+x)^2}$ in andere zu zerlegen, so setze man

$$\frac{a}{x^3(b+x)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3} + \frac{Dx+E}{(b+x)^2}$$ und bestimme darauf die Größen $A, B, C, D, E$ auf die nähmliche Art u. s. w. Eine vollständige Abhandlung über die Zerlegung gebrochener Functionen findet man in H. L. Euler's Anleitung zur Analysis des Unendlichen von H. Michelsen übersetzt.

§. 288.

Auch wird der im §. 283 angeführte Satz bey der Umkehrung der Functionen, oder bey der sogenannten umgekehrten Methode der Reihen mit Nutzen gebraucht. Es wird nähmlich bey analytischen Untersuchungen zuweilen eine Größe $x$ als eine durch Potenzen der veränderlichen Größe $y$ ausgedrückte Reihe vorgelegt, z. B. $x = 3y - 6y^2 + 12y^3 - 24y^4 + 48y^5 - .. \pm 3.2^{n-1}y^n$ ..A, wo $x$ als eine Function von $y$ gegeben ist; und es wird verlangt, aus dieser Gleichung die Größe $y$ dergestalt zu entwickeln, daß sodann $y$ als eine Function von der veränderlichen Größe $x$ ausgedrückt sey, und zwar durch eine Reihe von Potenzen der veränderlichen Größe $x$.

Um nun in A eine solche Reihe für $y$ zu finden, setze man

$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots\ldots$ B

so ist $y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots\ldots$

$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots$

$y^4 = A^4x^4 + \ldots\ldots$

Darauf substituire man die Werthe für $y, y^2, y^3, y^4$ in der Gleichung A, und bringe sodann die Gleichung auf 0, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix}3A\\-1\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}+3B\\-6A^2\end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix}+3C\\-12AB\\+12A^3\end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix}+3D\\-6B^2\\-12AC\\+36A^2B\\-24A^4\end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Folglich ist $3A - 1 = 0$, $3B - 6A^2 = 0$, $3C - 12AB + 12A^3 = 0$, $3D - 6B^2 - 12AC + 36A^2B - 24A^4 = 0$.

Daraus folgt $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3^2}$, $C = \frac{2^2}{3^3}$, $D = \frac{2^3}{3^4}$ u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung B für $A, B, C, D$ die gefundenen Werthe setzet

$$y = \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{3^2} + \frac{2^2x^3}{3^3} + \frac{2^3x^4}{3^4} + \ldots$$

Wenn man mehrere Coefficienten bestimmet, so sind die folgenden $= \frac{2^4}{3^5}, \frac{2^5}{3^6}, \ldots \frac{2^{n-1}}{3^n}$, welches hier leicht einzusehen ist, weil die vorgelegte Reihe

$x = 3y - 6y^2 + 12y^3 - 24y^4 \pm \ldots$ entsteht, wenn man den Bruch $x = \frac{3y}{1+2y}$ in eine gleichgültige Reihe auflöset. Aus dieser Gleichung folgt $y = \frac{x}{3-2x}$, wo nun $\frac{x}{3-2x}$ in eine gleichgültige Reihe aufgelöset für $y$ den nähmlichen Werth gibt, der durch die Umkehrung der vorgelegten Function gefunden wurde.

Auf die nähmliche Art findet man aus der Gleichung

$$z = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + \ldots. \text{ A}$$

den Werth von $x$, wenn man

$$x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots\ldots\ldots \text{ B}$$

setzet; denn es ist alsdann

$$x^3 = A^3z^3 + 3A^2Bz^3 + 3AB^2z^7 + B^3z^9 + 5A^2Cz^7 + \ldots$$

$$x^5 = A^5z^5 + 5A^4Bz^7 + \ldots.$$

$$x^7 = A^7z^3 + \ldots.$$

u. s. w.

Substituiret man diese Werthe für $x, x^3, x^5 \ldots$. in der Gleichung A, und reduciret sodann die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix} B \\ + \frac{A^3}{2\,3} \end{matrix}\right\} z^3 + \left.\begin{matrix} C \\ + \frac{3A^2B}{2.3} \\ + \frac{3A^5}{2.4.5} \end{matrix}\right\} z^5 \text{ u. s. w.}$$

Folglich $A = 1$, $B = -\frac{1}{2.3}$, $C = \frac{1}{2.3.4.5}$, $D = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$ u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung B für $A, B, C, D, E \ldots$ diese gefundenen Werthe setzet

$$x = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Man erhält den nähmlichen Werth für $x$, obschon etwas mühsamer, wenn man $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots$ setzt; denn bey der Entwicklung der Größen $A, B, C, D \ldots$. findet man, daß $B, D, F \ldots$ u. s. w. nähmlich, daß die Coefficienten der geraden Potenzen $= 0$ sind, und daß folglich die gesuchte Reihe nur die ungeraden Potenzen von $z$ enthalten müsse. Wenn man hingegen die gesuchte Reihe von folgender Gestalt annehmen wollte, $x = Az^2 + Bz^4 + Cz^6 + Dz^8 + \ldots$ so würden sich bey der Bestimmung der Coefficienten $A, B, C \ldots$ Widersprüche zeigen, woraus zu ersehen wäre, daß diese angenommene Gestalt der Reihe nicht Statt finden könne.

Bey der Umkehrung der Functionen kömmt es hauptsächlich darauf an, daß man für die gesuchte Reihe eine schickliche Gestalt annimmt, um sodann die Coefficienten bestimmen zu können. Wenn man für die gesuchte Reihe eine unrichtige Gestalt wählet, so zeigen sich sodann bey der Bestimmung der Coefficienten Widersprüche; wodurch man gezwungen wird, die Potenzen der veränderlichen Größe nach irgend einem andern Gesetze bey der gesuchten Reihe anzunehmen, und zwar so, daß sich bey der Bestimmung der Coefficienten keine Widersprüche ergeben. Nun zeigt es sich überhaupt, wenn eine Reihe von der Form $x^n = \alpha y^p + \beta y^{p+q} + \gamma y^{p+2q} + \delta y^{p+3q} + \ldots$ umzukehren, nähmlich $y$ durch eine Reihe der Potenzen von $x$ auszudrücken wäre, daß man für die gesuchte Reihe folgende Gestalt annehmen könne:

$$y = Ax^{\frac{n}{p}} + Bx^{\frac{n(1+q)}{p}} + Cx^{\frac{n(1+2q)}{p}} + Dx^{\frac{n(1+3q)}{p}} + \ldots$$

Z. B. um die Reihe $z^3 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$ umzukehren, kann man setzen

$$x = Az^{\frac{3}{2}} + Bz^3 + Cz^{\frac{9}{2}} + Dz^6 + Ez^{\frac{15}{2}} + \ldots$$

Eben so läßt sich die Function

$$y^{-1} = z^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{8} z^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{16} z^{\frac{5}{2}} - \tfrac{5}{128} z^{\frac{7}{2}} - \ldots$$

umkehren, wenn man setzet

$$z = Ay^2 + By^4 + Cy^6 + Dy^8 + \ldots$$

denn die Coefficienten lassen sich sodann nach den angeführten Gründen richtig bestimmen.

---

# V. Abschnitt.

## Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen.

### §. 289.

Wenn man (nach §. 255) eine Zahl $a > 1$ für die Grundzahl eines logarithmischen Systems annimmt, und diese Grundzahl auf verschiedene Potenzen, deren Exponenten $m$, $n$, $p$, &c. sind, erhebet, so daß $a^m = b$, $a^n = c$, $a^p = d$ &c. sey, so sind diese Exponenten $m$, $n$, $p$ Logarithmen der hervorgebrachten Potenzen $b$, $c$, $d$. Für $m = 0$ in der Gleichung $a^m = b$ wird $b = 1$; für jeden positiven Werth von $m$ wird $b > 1$, z. B. $b = 1 + z$; und für jeden negativen Werth von $m$ wird $b$ ein echter Bruch, oder $b < 1$, und daher $b = 1 - u$. Um nun bey der angenommenen Grundzahl $a$ den Logarithmus einer Zahl $b$ zu finden, müßte man einen solchen Exponenten $m$ aufsuchen, daß $a^m = b$ wäre. Oder weil es erlaubt ist, jede Zahl durch $1 + x$ vorzustellen (wo $1 + x$ auch einen echten Bruch bedeuten kann, wenn man für $x$ einen negativen Bruch annimmt), so würde man für die Grundzahl $a$ den Logarithmus einer jeden Zahl $1 + x$ haben, wenn man einen solchen Exponenten $X$, der eine Function von $x$ ist, angeben könnte, das $a^X = 1 + x$ sey. Und eben so würde man den Logarithmus einer andern Zahl $1 + y$ finden, wenn man einen solchen Exponenten $Y$ als eine Function von $y$ angeben könnte, daß $a^Y = 1 + y$ sey. Sodann ist $\log(1 + x) = X$, und $\log(1 + y) = Y$.

Nun kann die Frage aufgeworfen werden, ob es nicht möglich sey, $X$ in der Gleichung $\log(1+x) = X$ durch eine solche Potenz = Function von $x$ auszudrücken, daß diese Function für jeden Werth für $x$ den Logarithmus der Zahl $(1+x)$ vorstelle; wie auch $\log(1+y)$ durch eine eben solche Function von $y$ auszudrücken.

Um solche Functionen zu finden, nehmen wir für $\log(1+x)$ und $\log(1+y)$ folgende gleichgültige Reihen an

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots \text{ A}$$
$$\log(1+y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots \text{ B}$$

wo die unveränderlichen Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ . . in A von solcher Beschaffenheit seyn sollen, daß die angenommene Gleichung A bey jedem beliebigen Werthe von $x$, und folglich auch dann Statt finde, wenn $x$ in $y$ übergeht, so daß daher die Coefficienten in A und B einerley Werthe haben. Daß die angenommene gleichgültige Reihe A oder B auch im ersten Gliede die veränderliche Größe enthalten müsse, ist einleuchtend; weil diese gleichgültige Reihe so beschaffen seyn muß, daß solche in $\log(1+0) = 0$ übergeht (vermöge §. 257, Nr. 1), wenn die veränderliche Größe $= 0$ gesetzet wird. Es kömmt nur darauf an, daß die Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ . . . richtig bestimmet werden; die angenommene Gestalt der Reihe hat sodann nichts Widersprechendes.

Um die Coefficienten zu bestimmen, setze man in den obigen Gleichungen $a^X = 1 + x$, und $a^Y = 1 + y$,

es sey $Y$ irgend ein Vielfaches von $X$, z. B. $Y = 2X$, so ist sodann, wenn für $X$ und $Y$ die Reihen A und B gesetzet werden,

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \ldots$$
$$= Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots \text{ C}$$

Auch ist sodann $1 + y = (1+x)^2$

wegen $(1+y) = a^Y = a^{2X} = (a^X)^2 = (1+x)^2$;

nähmlich es ist sodann $1 + y = 1 + 2x + x^2$;

folglich $y = 2x + x^2$

$$y^2 = 4x^2 + 4x^3 + x^4$$
$$y^3 = 8x^3 + 12x^4 + 6x^5 + x^6$$

$$y^4 = 46x^4 + 32x^5 + \ldots$$
$$x^5 = 32x^5 + \ldots\ldots$$
$$- - - - -$$

Nun setze man diese Werthe für $y$, $y^2$, $y^3$, $y^4$ ꝛc. in die Gleichung C,

so ist $2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \ldots\ldots$

$$= 2Ax + Ax^2$$
$$+ 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4$$
$$+ 8Cx^3 + 12Cx^4 + 6Cx^5 + \ldots$$
$$+ 16Dx^4 + 32Dx^5 + \ldots$$
$$+ 32Ex^5 + \ldots$$
$$+ \ldots$$

folglich ist (vermöge §. 283)

| | nähmlich | |
|---|---|---|
| $2A = 2A$; | | $A = A$ |
| $2B = A + 4B$; | | $B = -\frac{1}{2}A$ |
| $2C = 4B + 8C$; | | $C = +\frac{1}{3}A$ |
| $2D = B + 12C + 16D$ | | $D = -\frac{1}{4}A$ |
| $2E = 6C + 32D + 32E$ | | $E = +\frac{1}{5}A$ |

u. s. w. nähmlich $F = -\frac{1}{6}A$, $G = +\frac{1}{7}A$, $H = -\frac{1}{8}A \ldots$

Es ist daher, wenn man diese Werthe in die Gleichung A setzet

$$\log(1 + x) = Ax - \tfrac{1}{2}Ax^2 + \tfrac{1}{3}Ax^3 - \tfrac{1}{4}Ax^4 + \tfrac{1}{5}Ax^5 - \ldots$$

wo der Coefficient $A$ unbestimmt verbleibet, so wie die Grundzahl $a$ nach Willkühr anzunehmen ist. Wie nun dieser Coefficient $A$ mit der Grundzahl zusammenhänge, wird weiter unten zu ersehen seyn.

## §. 290.

Damit nun diese gefundene Reihe (§. 289)

$$\log(1 + x) = Ax - \tfrac{1}{2}Ax^2 + \tfrac{1}{3}Ax^3 - \tfrac{1}{4}Ax^4 + \tfrac{1}{5}Ax^5 - \tfrac{1}{6}Ax^6 + \tfrac{1}{7}Ax^7 - \tfrac{1}{8}Ax^8 + \ldots$$

D dergestalt schnell abnehme, oder zusammenlaufe (convergire), daß nur einige wenige Glieder in Zahlen entwickelt, den gesuchten Logarithmus einer Zahl $1 + x$ mit hinlänglicher Genauigkeit darstellen, muß nothwendig $x$ ein echter Bruch seyn.

Man setze daher $x = \frac{1}{z}$, so ist $1 + x = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$;

und $\log(1 + x) = \log\left(\frac{z+1}{z}\right) = \log(z + 1) - \log z$

(vermöge §. 257, Nr. 6); substituirt man nun diese Werthe in der Gleichung D, so ist

$$\log(z+1) - \log z = \frac{A}{z} - \frac{A}{2z^2} + \frac{A}{3z^3} - \frac{A}{4z^4} + \ldots \text{ E}$$

Ferner, um nun die negativen Glieder verschwinden zu machen, setze man $x = -\frac{1}{z}$ in der Gleichung D; so ist

$$\log(z-1) - \log z = -\frac{A}{z} - \frac{A}{2z^2} - \frac{A}{3z^3} - \frac{A}{4z^4} - \ldots \text{ F}$$

Nun ziehe man die Gleichung F von E ab, so ist

$$\log(z+1) - \log(z-1) = \frac{2A}{z} + \frac{2A}{3z^3} + \frac{2A}{5z^5} + \ldots \text{ G}$$

$$\text{oder } \log(z+1) = \log(z-1) + 2A.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \ldots\right)$$

Um nun mittelst der Reihe G den Logarithmus von 2 zu berechnen, setze man $z = 3$; so erhält man $\log 4 - \log 2$

$$= \log\frac{4}{2} = \log 2 = 2A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$

$$= 2A\,(0{,}3333 + 0{,}0123 + 0{,}0008 + 0{,}0001 + \ldots.)$$

$= A$ . 0,693 . . . . Ferner setze man $z = 2$; $z = 4$, so ist

$$\log 3 = \log 1 + 2A\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \ldots.\right)$$

$$= 2A\,(0{,}500 + 0{,}042 + 0{,}006 + \ldots) = A\,.\,1{,}096$$

$$\log 5 = \log 3 + 2A\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3.4^3} + \frac{1}{5.4^5} + \ldots\right) = A.1{,}606\ldots$$

Und so findet man auch log 7, log 11, log 13, u. s. w.

Substituiret man aber in der Gleichung G für $z$ einen solchen Werth, daß $\log(z+1) - \log(z-1)$ die Differenz der Logarithmen zweyer Zahlen wird, welche nur um eine Einheit von einander verschieden sind; so erhält man eine andere Gleichung, aus welcher der Logarithmus einer jeden Zahl berechnet werden kann, wenn der Logarithmus der nächst vorhergehenden Zahl bekannt ist. Man setze dieserwegen

$$\log(z+1) - \log(z-1) = \log p - \log(p-1)$$

$$\text{nähmlich } \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

so ist $\frac{z+1}{z-1} = \frac{p}{p-1}$; daraus folgt $z = 2p - 1$.

Diese Werthe in der Gleichung G substituirt, geben

$$\log p - \log(p-1) = 2A\left(\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \ldots.\right), \text{ und}$$

$$\log p = \log(p-1) + 2A\left(\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \ldots.\right) \quad . \quad . \quad \mathfrak{H}$$

Man setze nun $p = 2$, so ist $\log 2 = 0 +$

$$2A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} + \frac{1}{11.3^{11}} + \ldots\right)$$

$= A \,.\, 0{,}6931472 \ldots$ welches man erhält, wenn man 6 Glieder dieser Reihe mit 7 Decimalstellen richtig entwickelt. Wollte man aber diesen Logarithmus mit mehreren Decimalstellen haben, so müßten auch mehrere Glieder, und jedes Glied mit mehreren Decimalstellen entwickelt werden.

Und so könnten auch die Logarithmen der folgenden Zahlen 3, 4, 5 . . . nach und nach aus dieser Reihe berechnet werden, wenn man $p = 3$, dann $p = 4$, $p = 5$ u. s. w. setzet.

§. 291.

Allein ist einmahl der Logarithmus von 2 berechnet, so kann die Reihe $\mathfrak{H}$ zum ferneren Gebrauche noch viel schneller abnehmend gemacht werden, wenn man $p = q^2$ setzet; denn es ist sodann $\log q^2 = \log(q^2-1) + 2A\left(\frac{1}{2q^2-1}\right.$

$$\left. + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} + \ldots\right); \quad \text{oder } 2\log q$$

$$= \log(q+1)(q-1) + 2A\left(\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \ldots\right); \text{ endlich}$$

$$\log q = \frac{\log(q+1) + \log(q-1)}{2} + A\left(\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} + \frac{1}{7(2q^2-1)^7} + \ldots\right) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{J}.$$

Setzet man nun in dieser Reihe für $q$ die nach einander folgenden Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 . . so erhält man

$$\log 3 = \frac{\log 4 + \log 2}{2} + A\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5}\right)$$

$$= \frac{2\log 2 + \log 2}{2} + A\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3.17^3} + \frac{1}{5.17^5}\right)$$

$$= \tfrac{3}{2}\log 2 + A\,(0{,}0588235 + 0{,}0000678 + 0{,}0000001)$$

$$= A \,.\, 1{,}0986122.$$

$$\log 4 = 2 \log 2 = A \,.\, 1{,}3862944.$$

$$\log 5 = \frac{\log 6 + \log 4}{2} + A\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3}\right) = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 4}{2}$$

$$+ A\,(0{,}0204082 + 0{,}0000028) = A \,.\, 1{,}6094379.$$

$$\log 6 = \log 3 + \log 2 = A \,.\, 1{,}7917595.$$

$$\log 7 = \frac{\log 8 + \log 6}{2} + A\left(\frac{1}{97} + \frac{1}{3.97^3}\right) = \frac{3 \log 2 + \log 6}{2}$$

$$+ A \,.\, (0{,}0103093 + 0{,}0000003) = A \,.\, 1{,}9459101.$$

$$\log 8 = 3 \log 2 = A \,.\, 2{,}0794415.$$

$$\log 9 = 2 \log 3 = A \,.\, 2{,}1972244.$$

$$\log 10 = \log 5 + \log 2 = A \,.\, 2{,}3025851.$$

$$\log 11 = \frac{\log 12 + \log 10}{2} + A\left(\frac{1}{241} + \frac{1}{3 \,.\, 241^3}\right)$$

$$= \frac{\log 4 + \log 3 + \log 10}{2} + A\,(0{,}0041494 + 0{,}0000000)$$

$$= A \,.\, 2{,}3978952.$$

Und so könnte man die Logarithmen aller Zahlen, so weit man will, durch diese gefundene Reihe berechnen, ohne daß man noch die Größe $A$ bestimmet hatte, der man jedoch jeden beliebigen unveränderlichen Werth beylegen kann, z. B. $A = 1$, oder $A = 2$, $A = \frac{1}{10}$, $A = \frac{3}{7}$ u. s. w. Die Reihe nimmt so schnell ab, daß man, um den Logarithmus von 11 mit 7 Decimalstellen, und um den Logarithmus von 23 mit 10 Decimalstellen, richtig zu berechnen, nur das erste Glied der Reihe allein entwickeln darf; weil das zweyte Glied an diesen Stellen keine bedeutliche Ziffer mehr gibt.

## §. 292.

Nimmt man nun für $A$ einen beliebigen Werth an, und multipliciret alle, auf die eben gezeigte Art, berechneten Logarithmen damit, so erhält man ein logarithmisches System. Es ist aber am natürlichsten $A = 1$ zu setzen, damit man keine weitere Multiplication verrichten darf, und die obigen Logarithmen ungeändert bleiben. Man nennt selbe daher auch die natürlichen Logarithmen, und werden bezeichnet mit log nat (Logarithmus naturalis). Es ist nähmlich log nat 2 = 0,6931472; log nat 3 = 1,0986122; log nat 4 = 1,3862944;

log nat 10 = 2,3025851 u. s. w. Von einigen Schriftstellern werden die natürlichen Logarithmen, aus geometrischen Gründen, auch hyperbolische Logarithmen genannt.

## §. 293.

Hat man einmahl die natürlichen Logarithmen aller Zahlen berechnet, so läßt sich auch daraus (nach §. 271) jedes andere System für eine angenommene Grundzahl berechnen; so ist z. B. der Briggische Logarithmus einer jeden Zahl $b$ für die Grundzahl 10, nähmlich $\log \text{brig } b = \frac{1}{\log \text{nat } 10} \times \log \text{nat } b = \frac{1}{2{,}3025851} \times \log \text{nat } b = 0{,}4342945 \times \log \text{nat } b$; oder es ist log vulg b $= 0{,}4342945 \times$ log nat b; weil man die Briggischen Logarithmen zur Unterscheidung von den natürlichen Logarithmen, wenn beyde in einer Rechnung vorkommen, mit log vulg (Logarithmus vulgaris) zu bezeichnen pflegt. Meistentheils aber werden die Briggischen Logarithmen bloß mit log bezeichnet, so daß in der Anwendung log jederzeit einen Briggischen Logarithmus bedeutet, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird.

Man darf daher nur alle natürliche Logarithmen mit 0,4342945 multipliciren, so erhält man das Briggische System; deßwegen wird auch 0,4342945 der Modul des Briggischen Systems genannt (nach §. 271). Und umgekehrt können die Briggischen Logarithmen in natürliche verwandelt werden, wenn man selbe durch 0,4342945 dividiret; oder, welches einerley ist mit 2,3025851 multipliciret. Überhaupt heißt in den obenangeführten Reihen die Größe $A$ der logarithmische Modul, weil für jeden andern Werth von $A$ aus dem natürlichen System ein anderes erhalten wird. Und dieser logarithmische Modul $A$ hängt in jedem Systeme von der dazu gehörigen Grundzahl $a$ dergestalt ab, daß $A = \frac{1}{\log \text{nat } a}$ sey.

Damit man aber auch für jeden beliebig angenommenen Werth für $A = m$ die zu diesem System gehörige Grundzahl finden könne; so setze man dieselbe $= 1 + y$, weil sie größer seyn muß, als 1, da 1 auf jede Potenz erhoben, wieder 1

gibt; und es ist sodann (vermöge §. 257, Nr. 2) $\log(1+y) = 1$; es ist aber auch (vermöge §. 289)

$$\log(1+y) = m\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right)$$

also auch $$1 = m\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right)$$

und $$m^{-1} = \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right) \ldots\ldots\ldots \mathfrak{A}$$

Nun setze man (nach §. 288)

$$y = Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + \ldots\ldots\ldots \mathfrak{B}$$

so ist $y^2 = A^2m^{-2} + 2ABm^{-3} + B^2m^{-4} + 2ACm^{-4} + \ldots$

$$y^3 = A^3m^{-3} + 3A^2Bm^{-4} + \ldots$$

$$y^4 = A^4m^{-4} + \ldots$$

u. s. w.

Darauf substituire man die Werthe für $y$, $y^2$ $y^3$, $y^4$ in der Gleichung $\mathfrak{A}$, und reducire die ganze Gleichung auf Null; so ist

$$\begin{aligned} 0 = {} & Am^{-1} + Bm^{-2} + Cm^{-3} + Dm^{-4} + \ldots \\ & - m^{-1} - \tfrac{1}{2}A^2m^{-2} - ABm^{-3} - \tfrac{1}{2}B^2m^{-4} \\ & \qquad + \tfrac{1}{3}A^3m^{-3} - ACm^{-4} \\ & \qquad + A^2Bm^{-4} \\ & \qquad - \tfrac{1}{4}A^4m^{-4} \end{aligned}$$

woraus (nach §. 283) folgt $A = 1$, $B = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{1.2.3}$,

$D = \frac{1}{1.2.3.4}$, $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$ u. s. w.

Substituiret man diese Werthe in der Gleichung $\mathfrak{B}$, so ist

$$y = m^{-1} + \frac{m^{-2}}{1.2} + \frac{m^{-3}}{1.2.3} + \frac{m^{-4}}{1.2.3.4} + \ldots$$

und $$1 + y = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{1.2.m^2} + \frac{1}{1.2.3.m^3} + \frac{1}{1.2.3.4.m^4} \ldots$$

Setzet man z. B. $m = 1$, so erhält man die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}7182818.$$

Diese Grundzahl 2,7182818 . . . des natürlichen logarithmischen Systems werden wir in der Folge jederzeit mit $h$ benennen, und uns von allem andern Gebrauche dieses Buch-

stabens enthalten; nähmlich es soll $h$ künftig jederzeit 2,7182818 bedeuten. Einige pflegen auch diese Grundzahl jederzeit mit $e$ zu bezeichnen; $h$ hat den Vorzug vor $e$, weil die Exponenten, besonders die gebrochenen, auf $h$ bequemer anzubringen sind.

## §. 294.

Auch läßt sich zu jedem gegebenen natürlichen Logarithmus $x$ die dazu gehörige Zahl $h^x$, wo $h$ die Grundzahl des natürlichen logarithmischen Systems bedeutet, durch eine unendliche Reihe ausgedrückt finden. Denn es sey $h^x = 1 + y$, nähmlich $x = \log \text{nat.}(1 + y)$, so ist auch (vermöge §. 289)

$$x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{4} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \ldots\ldots\ldots \text{ A}$$

Um nun den Werth von $y$ durch $x$ ausgedrückt zu finden, so setze man (nach §. 288)

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots\ldots \text{ B}$$

$$\text{so ist } y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$$
$$y^3 = A^3x^3 + 2A^2Bx^4 + \ldots\ldots$$
$$y^4 = A^4x^4 + \ldots\ldots$$

u. s. w.

Wenn man diese Werthe für $y$, $y^2$, $y^3$, $y^4$ in der Gleichung A substituiret und die Gleichung auf Null reduciret; so ist

$$0 = \begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\Big\}x + \begin{matrix} B \\ -\frac{1}{2}A^2 \end{matrix}\Big\}x^2 + \begin{matrix} C \\ -AB \\ +\frac{1}{3}A^3 \end{matrix}\Big\}x^3 + \begin{matrix} D \\ -\frac{1}{2}B^2 \\ -AC \\ +A^2B \\ -\frac{1}{4}A^4 \end{matrix}\Big\}x^4 + \ldots$$

Folglich $A = 1$, $B = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{1.2.3}$, $D = \frac{1}{1.2.3.4}$ u. s. w.

Es ist demnach, wenn man für $A$, $B$, $C$, $D$ .... die gefundenen Werthe in der Gleichung B substituiret

$$y = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

und folglich $h^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$

Setzen wir nun z. B. den gegebenen natürlichen Logarithmus $x = 1{,}5000000 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, so ist

$h^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{1.2.2^2} + \frac{3^3}{1.2.3.2^3} + \frac{3^4}{1.2.3.4.2^4} + \cdot\cdot$

$= 4{,}4816$ beynahe; welches man erhält, wenn man nur einige wenige Glieder dieser unendlichen Reihe entwickelt. Setzen wir aber $x = 1$, so ist

$h = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdot\cdot = 2{,}7182818$

wie zuvor.

Durch Hülfe einer logarithmischen Tafel läßt sich der Werth von $h^x$ für ein in Zahlen gegebenes $x$, nachdem $h$ bereits bekannt ist, viel geschwinder und leichter berechnen.

## §. 295.

So wie wir gefunden haben, daß

$h^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$

sey; eben so läßt sich zeigen, daß überhaupt

$a^x = 1 + x \times \log\text{nat}\, a + \frac{(x \times \log\text{nat}\, a)^2}{2} + \frac{(x \times \log\text{nat}\, a)^3}{2.3}$

$+ \frac{(x \times \log\text{nat}\, a)^4}{2.3.4} + \ldots$ seyn müsse.

Um dieses einzusehen, setze man $a^x = 1 + y$, so ist $x \log\text{nat}\, a = \log\text{nat}(1+y)$; das ist $x(\log\text{nat}\, a) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots$ oder wenn man $x(\log\text{nat}\, a) = z$ setzet, so ist $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6 + \ldots$

Aus dieser Gleichung findet man nach dem vorhergehenden

$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{2.3.4}z^4 + \frac{1}{2.3.4.5}z^5 + \cdot\cdot$ das ist

$y = x(\log\text{nat}\, a) + \frac{1}{2}x^2(\log\text{nat}\, a)^2 + \frac{1}{2.3}x^3(\log\text{nat}\, a)^3 + \ldots$

und endlich

$a^x = 1 + x(\log\text{nat}\, a) + \frac{1}{2}x^2(\log\text{nat}\, a)^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot$

oder $a^x = 1 + \log\text{nat}\, a^x + \frac{1}{2}(\log\text{nat}\, a^x)^2 + \frac{1}{2.3}(\log\text{nat}\, a^x)^3 + \cdot\cdot$

Setzen wir nun $a = x$, so ist auch

$x^x = 1 + x(\log\text{nat}\, x) + \frac{1}{2}x^2(\log\text{nat}\, x)^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot$

oder $x^x = 1 + \log\text{nat}\, x^x + \frac{1}{2}(\log\text{nat}\, x^x)^2 + \frac{1}{2.3}(\log\text{nat}\, x^x)^3 + \cdot\cdot$

## §. 296.

Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen wird auch zuweilen mit Vortheil gebrauchet, um aus einer logarithmischen Gleichung eine unbekannte Größe zu entwickeln. Z. B. aus der Gleichung $\log \text{nat}\, x^2 = \frac{m}{n} + \log \text{nat}\, \frac{c}{x}$, sey $x$ zu entwickeln, so ist $2\log \text{nat}\, x = \frac{m}{n} + \log \text{nat}\, c - \log \text{nat}\, x$, und $\frac{m}{n} \times 1 = \log \text{nat}\, \frac{x^3}{c}$. Nun kann $\log \text{nat}\, h$ statt 1 gesetzet werden; daher ist auch $\frac{m}{n} \times \log \text{nat}\, h = \log \text{nat}\, \frac{x^3}{c}$; folglich auch $\log \text{nat}\, \sqrt[n]{h^m} = \log \text{nat}\, \frac{x^3}{c}$ (vermöge §. 257, Nr. 7 u. 8), ferner $\sqrt[n]{h^m} = \frac{x^3}{c}$ (vermöge §. 256), und endlich $x = \sqrt[3]{c\sqrt[n]{h^m}}$.

Es sey endlich aus der Gleichung $\log \text{nat}\, \frac{a}{x} = mx - \log \text{nat}\, c$ der Werth von $x$ zu bestimmen. In diesem Beyspiele ist $\log \text{nat}\, \frac{a}{x} + \log \text{nat}\, c = mx$, oder $\log \text{nat}\, \frac{ac}{x} = mx \cdot \log \text{nat}\, h = \log \text{nat}\, h^{mx}$; folglich auch $\frac{ac}{x} = h^{mx}$; und endlich ist $ac = xh^{mx}$. Weiter läßt sich diese Gleichung nicht reduciren; und dieß ereignet sich gemeiniglich, sobald die unbekannte Größe in der nähmlichen Gleichung als Factor, und als Exponent erscheint. Es sey z. B. folgende Aufgabe aufzulösen:

eine Zahl $x$ zu finden, die mit $\frac{64}{5}$ multipliciret, ein Product zum Vorschein bringt, welches der $x^{\text{ten}}$ Potenz von 4 gleichet. Vermöge der Bedingung der Aufgabe ist $\frac{64x}{5} = 4^x$; folglich ist auch $\log 64 + \log x - \log 5 = x \log 4$; oder $x \log 4 - \log x = \log 64 - \log 5$; nähmlich

$x \,.\, 0{,}60206 - \log x = 1{,}10721 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A$

weil $\log 4 = 0{,}60206$; $\log 64 = 1{,}80618$, und $\log 5 = 0{,}69897$; nun versuche man für $x$ eine solche Zahl zu substituiren, daß

der erste Theil der Gleichung A dem zweyten Theile gleich werde; setzt man $x = 2$, so ist der erste Theil der Gleichung $= 0{,}90309$; setzt man hingegen $x = 3$, so ist der erste Theil der Gleichung $= 1{,}3290587$; es ist demnach $x > 2$, und $x < 3$; man setze also $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$; und dann ist der erste Theil der Gleichung dem zweyten vollkommen gleich; folglich ist die gesuchte Zahl $= 2{,}5 = \frac{5}{2}$. Bey einer fernern Untersuchung findet man, daß auch die Zahl 0,088298 . . dieser Aufgabe ein Genügen leistet.

Aus der vorhergehenden Gleichung $ac = xh^{mx}$ könnte der Werth für $x$ durch eine unendliche Reihe entwickelt werden; allein die Reihe würde von keinem Nutzen seyn, wenn sie nicht sehr schnell zusammenläuft; die gesuchte Reihe könnte auf folgende Art gefunden werden. Da $ac = xh^{mx}$, so ist auch (vermöge §. 294)

$$ac = x \cdot \left(1 + mx + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} + \frac{m^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$

$$= x + mx^2 + \frac{m^2x^3}{1.2} + \frac{m^3x^4}{1.2.3} + \frac{m^4x^5}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Nun setze man $ac = y$, so ist

$$y = x + mx^2 + \frac{m^2x^3}{1.2} + \frac{m^3x^4}{1.2.3} + \frac{m^4x^5}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Wenn man nun für den Werth von $x$ folgende Reihe annimmt: $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots$. die Größen $A, B, C \ldots$ (nach §. 283) bestimmet, und endlich für $y, y^2, y^3 \ldots$ wieder ihre Werthe $ac, a^2c^2, a^3c^3 \ldots$ substituiret, so wird endlich die gesuchte Reihe als der Werth von $x$ zum Vorschein kommen.

# VI. Abschnitt.

## Anwendung der Reihen auf eine allgemeine Entwicklung der Potenzen.

### §. 297.

Man erhebe eine zweynahmige Größe $a + b$ (nach §. 113) auf die nach einander folgenden Potenzen, so ist

$(a+b)^1 = a + b$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
u. s. w.

Betrachtet man nun diese entwickelten Potenzen mit Aufmerksamkeit, so wird man bey denselben folgendes Gesetz bemerken.

1. Die Anzahl der Glieder von einer jeden entwickelten Potenz ist um 1 größer als der Exponent von $(a + b)$; so besteht z. B. $(a + b)^2$ aus drey Gliedern; $(a + b)^5$ aus 6 Gliedern u. s. w.

2. Zu jeder dieser entwickelten Potenzen enthält jedes Glied sowohl eine Potenz von $a$, als auch eine Potenz von $b$; und zwar fängt $a$ in dem ersten Gliede mit dem höchsten Exponenten an, und in jedem folgenden Gliede nimmt der Exponent von $a$ um 1 ab, so daß in dem letzten Gliede sich $a$ mit dem Exponenten 0 befindet, welches aber nicht ausdrücklich angesetzt ist, weil $a^0 = 1$ ist. Die Potenzen von $b$ hingegen gehen in umgekehrter Ordnung, nähmlich im ersten Gliede befindet sich $b^0$, und in jedem folgenden Gliede wächst der Exponent von $b$ um 1, so daß im letzten Gliede $b$ den größten Exponenten hat.

3) In jeder Potenz ist der Coefficient des ersten und letzten Gliedes = 1.

Es läßt sich daher jede Potenz eines ganzen positiven Expo-

nenten $n$ von $(a+b)$ durch folgende Formel vorstellen, $(a+b)^n = a^n + \mathfrak{A}a^{n-1}b + \mathfrak{B}a^{n-2}b^2 + \mathfrak{C}a^{n-3}b^3 + \ldots b^n$, wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ .... solche Größen sind, daß diese Gleichung Statt findet.

Untersuchet man nun das Gesetz, nach welchem die numerischen Coefficienten von den oben entwickelten Potenzen fortgehen, so bemerket man, daß in den nach einander folgenden Potenzen die Coefficienten der zweyten Glieder in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges fortgehen, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .; daß die Coefficienten in den dritten Gliedern nach einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges 0, 1, 3, 6, 10, 15 . . .; daß die Coefficienten von den vierten Gliedern nach einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges 0, 0, 1, 4, 10, 20 . . .; daß die Coefficienten der fünften Glieder in einer arithmetischen Reihe des vierten Ranges 0, 0, 0, 1, 5, 15 . . . fortgehen u. s. w.

Suchet man zu jeder dieser Reihen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . .
0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 . . .
0, 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56 . . .
0, 0, 0, 1, 5, 15, 35, 70 . . .

u. s. w. (nach §. 247) das $n^{te}$ Glied, so ist

das $n^{te}$ Glied der ersten Reihe $= n$

$= \quad =$ zweyten $\quad = = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

$= \quad =$ dritten $\quad = = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$= \quad =$ vierten $\quad = = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

. . . . . .

Da aber die oben angenommenen Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, nichts anders sind, als eben die $n^{ten}$ Glieder dieser Reihen, so ist $\mathfrak{A} = n$, $\mathfrak{B} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, $\mathfrak{C} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

$\mathfrak{D} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ u. s. w.

folglich ist für jeden ganzen positiven Exponenten $n$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 + \ldots$$

wo die Reihe nach demjenigen Gliede abbricht, in welchem der Exponent von $a$ Null wird; weil der Coefficient eines jeden folgenden Gliedes der Reihe $= 0$ seyn muß. Z. B. wenn man $n = 2$ setzet, so ist nach dieser Reihe

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + \frac{2.1}{1.2}a^0 b^2 + \frac{2.1.0}{1.2.3}a^{-1}b^3 + \ldots$$

$= a^2 + 2ab + b^2$; weil das vierte und alle folgenden Glieder der Reihe den Coefficienten 0 haben, und folglich jedes derselben $= 0$ ist.

## §. 298.

Aus dieser gefundenen Reihe ist es nun sichtbar, daß jeder Coefficient eines folgenden Gliedes aus dem nächst vorhergehenden Gliede bestimmet werden könne, wenn man in dem vorhergehenden Gliede den Coefficienten mit dem Exponenten von $a$ multipliciret, und dieses Product durch die Stelle dieses Gliedes dividiret. So ist z. B. der

Coefficient des vierten Gliedes $= \frac{n(n-1)}{1.2} \times \frac{(n-2)}{3}$.

Man kann demnach jede zweynahmige Größe sehr leicht zu was immer für einer Potenz eines ganzen Exponenten (z. B. $a+b$ auf die achte Potenz) erheben, und zwar auf folgende Art:

1) Man schreibe zwey Reihen unter einander, wovon die erste bey der höchsten Potenz des ersten Gliedes der vorgegebenen zweynahmigen Größe anfängt, und sich bey der 0ten Potenz endiget; die zweyte Reihe hingegen fängt bey der 0ten Potenz des zweyten Gliedes der vorgegebenen Größe an, und endiget sich bey der höchsten Potenz. In unserm Beyspiele schreibe man folgende zwey Reihen

$a^8, a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0$

$b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7, b^8$

2) Dann multiplicire man die Glieder der obern Reihe mit den darunter stehenden Gliedern der untern Reihe, so erhält man für die litteralischen Producte

$a^8, a^7b, a^6b^2, a^5b^3, a^4b^4, a^3b^5, a^2b^6, ab^7, b^8$

3) Ferner ist der Coefficient des ersten Gliedes $= 1$; und der Coefficient des zweyten Gliedes ergibt sich, wenn man in dem ersten Gliede den Coefficienten mit dem Exponenten von $a$ multipliciret, und dieses durch die Stelle des Gliedes dividiret $= \frac{1 \cdot 8}{1} = 8$; der Coefficient des dritten Gliedes wird wieder gefunden, wenn man in dem zweyten Gliede den Coefficienten mit dem Exponenten von $a$ multipliciret, und dieses durch die Stelle des Gliedes dividiret $= \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$; eben so erhält man den Coefficienten des vierten Gliedes, indem man in dem dritten Gliede den Coefficienten mit dem Exponenten von $a$ multipliciret, und dieses durch die Stelle des Gliedes 3 dividiret $= \frac{28 \cdot 6}{3} = 56$ u. s. w. Man findet sodann

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Wäre das zweyte Glied einer zweynahmigen Größe, welche zu einer Potenz erhoben werden soll, negativ, z. B. es sollte $(c - x)$ nach diesen Regeln auf die siebente Potenz erhoben werden, so müssen die Glieder, in welchen sich die ungeraden Potenzen des zweyten Gliedes befinden, negativ genommen werden (§. 118), nähmlich es ist

$$(c-x)^7 = c^7 - 7c^6x + 21c^5x^2 - 35c^4x^3 + 35c^3x^4 - 21c^2x^5 + 7cx^6 - x^7.$$

## §. 299.

Daß aber diese gefundene Reihe für $(a + b)^n$ nicht nur dann wenn $n$ eine positive ganze Zahl ist, sondern auch für jeden andern ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth von $n$ angewendet werden könne, läßt sich auf folgende allgemeine Art darthun.

Es ist $(a + b)^n = a^n \left(\frac{a+b}{a}\right)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, und wenn man $\frac{b}{a} = x$ setzet, so ist $(a + b)^n = a^n (1 + x)^n$. Es

kömmt also nur darauf an, $(1 + x)^n$ durch eine gleichgültige Reihe auszudrücken, unter der Bedingung, daß sowohl $x$ als auch $n$ jeden beliebigen Werth annehmen könne.

Um eine solche Reihe zu finden, setze man

$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ A

weil die Glieder der Reihe ganz sicher Functionen von $x$ seyn müssen; und es ist für das erste Glied der Reihe 1 angenommen worden, weil für $x = 0$ die Potenz $(1 + x)^n$ bey jedem Werthe von $n$ immer $= 1$ seyn muß. Übrigens sollen die beständigen Coefficienten $A, B, C, D \ldots\ldots$ so beschaffen seyn, daß die angenommene Gleichung Statt finde.

Um nun diese Coefficienten bestimmen zu können, setze man den veränderlichen Theil $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ der für $(1 + x)^n$ angenommenen Reihe $= y$, nähmlich

$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$

so ist $y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$

$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots$

$y^4 = A^4x^4 + \ldots$

Ferner da $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$

so ist $1 + y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$

es ist aber auch $(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$

folglich auch $(1 + x)^n = 1 + y$ (§. 12, Nr. 3)

und log nat $(1 + x)^n =$ log nat $(1 + y)$ (vermöge §. 256)

oder $n$ log nat $(1 + x) =$ log nat $(1 + y)$ (verm. §. 257, Nr. 7)

und wenn man statt log nat $(1 + x)$ und log nat $(1 + y)$ die Reihe D (§. 290) setzet, so ist

$$nx - \frac{nx^2}{2} + \frac{nx^3}{3} - \frac{nx^4}{4} + \ldots = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots$$

Nun substituire man in dieser Gleichung für $y, y^2, y^3, y^4 \ldots$ die oben gefundenen Werthe, und reducire die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} A \\ -n \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +B \\ -\frac{1}{2}A^2 \\ +\frac{1}{2}n \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +C \\ -AB \\ +\frac{1}{3}A^3 \\ -\frac{1}{3}n \end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix} +D \\ -\frac{1}{2}B^2 \\ -AC \\ +A^2B \\ -\frac{1}{4}A^4 \\ +\frac{1}{4}n \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Folglich $A - n = 0$

$B - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}n = 0$

$C - AB + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}n = 0$

$D - \frac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \frac{1}{4}A^4 + \frac{1}{4}n = 0$

nähmlich $A = n$

$$B = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$$

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung A diese gefundenen Werthe für $A$, $B$, $C$, $D$ . . . substituiret,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{2 \cdot 3} + \cdot \cdot$$

Setzt man nun wieder in dieser Gleichung $\frac{b}{a}$ statt $x$, so ist

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{b^4}{a^4} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und da $(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ ist, so ist auch

$$(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{b^4}{a^4} + \cdot \cdot \cdot \cdot\right)$$

nähmlich $(a+b)^n = a^n + \frac{na^{n-1}b}{1} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4}b^4}{1.2.3.4} + \cdot \cdot \cdot$

wo $a$, $b$ und $n$ jeden beliebigen ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth haben kann. Nur wird die Reihe, wenn $n$ keine positive ganze Zahl ist, niemahls abbrechen, sondern ohne Ende fortlaufen; wo man sodann von der Reihe so viele Glieder entwickeln kann, als es die Richtigkeit einer Rechnung nur immer fordern mag.

Anmerkung. Diese gefundene Reihe für $(a+b)^n$ pflegt man den binomischen Lehrsatz, oder auch das Newtonische Binomium zu nennen, weil Newton am ersten gezeigt hat, wie die Coefficienten bey dieser Formel auf eine allgemeine Art auszudrücken sind.

## §. 300.

Bevor wir aber von dieser gefundenen Formel eine weitere Anwendung auf die Ausziehung verschiedener Wurzeln machen, wollen wir dieselbe noch auf einen einfachen Ausdruck bringen; theils damit man solche leichter im Gedächtniß behalten könne, theils auch damit man jedes folgende Glied der Reihe aus dem schon entwickelten vorhergehenden Gliede viel kürzer bestimmen könne. Man benenne in der gefundenen Formel

$$(a+b)^n = \overset{A}{a^n} + \overset{B}{\frac{na^{n-1}b}{1}} + \overset{C}{\frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1\,.\,2}} + \overset{D}{\ldots\ldots}$$

die Glieder der Reihe nach der Ordnung mit $A$, $B$, $C$, $D$ . . so ist $B = nA\,.\,\frac{b}{a}$; $C = \frac{n-1}{2}B\,.\,\frac{b}{a}$; $D = \frac{n-2}{3}C\,.\,\frac{b}{a}$; $E = \frac{n-3}{4}D\,.\,\frac{b}{a}$ u. s. w.

Setzen wir nun das erste Glied der vorgegebenen zweynahmigen Größe $a = P$, und den Quotienten, den man erhält, wenn man das zweyte Glied der vorgegebenen zweynahmigen Größe durch das erste dividiret, $\frac{b}{a} = Q$, so ist

$$(a+b)^n = \overset{A}{P^n} + \overset{B}{nAQ} + \overset{C}{\frac{n-1}{2}BQ} + \overset{D}{\frac{n-2}{3}CQ} + \overset{E}{\frac{n-3}{4}DQ} + \ldots$$

## §. 301.

Es sey nun nach dieser Formel $\sqrt{(a^2 \pm x)} = (a^2 \pm x)^{\frac{1}{2}}$ zu entwickeln, so ist $P = a^2$; $Q = \pm\frac{x}{a^2}$; und $n = \frac{1}{2}$;

folglich $P^n = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a = A$

$nAQ = \frac{1}{2}\,.\,a\,.\,\pm\frac{x}{a^2} = \pm\frac{x}{2a} = B$

$$\frac{n-1}{2}BQ = -\frac{1}{4}\cdot\pm\frac{x}{2a}\cdot\pm\frac{x}{a^2} = -\frac{x^2}{2.4.a^3} = C$$

$$\frac{n-2}{3}CQ = -\frac{3}{6}\cdot-\frac{x^2}{2.4.a^3}\cdot\pm\frac{x}{a^2} = \pm\frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^5} = D$$

$$\frac{n-3}{4}DQ = -\frac{5}{8}\cdot\pm\frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^5}\cdot\pm\frac{x}{a^2} = -\frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^7} = E$$

u. ſ. w.

folglich iſt $\sqrt{(a^2 \pm x)} = a \pm \frac{x}{2a} - \frac{1.x^2}{2.4.a^3} \pm \frac{1.3.x^3}{2.4.6\,a^5} - \frac{1.3.5\,x^4}{2.4.6.8.a^7}$

$\pm \ldots$

Hierdurch läßt ſich nun aus jeder vorgegebenen irrationalen Zahl die Quadratwurzel durch Annäherung finden, wenn man die vorgegebene Zahl in zwey andere zerleget, wovon eine ein vollkommenes Quadrat iſt, und deren Summe oder Differenz der vorgegebenen Zahl gleich iſt, und man thut am beſten, wenn man eine ſolche Quadratzahl wählt, welche in Rückſicht des andern Theiles ziemlich groß iſt, weil alsdann die Reihe ſehr ſchnell abnimmt. Z. B. es wäre durch dieſe Formel $\sqrt{30}$ zu entwickeln, ſo läßt ſich $\sqrt{30}$ vorſtellen durch $\sqrt{(25+5)}$, und auch durch $\sqrt{(36-6)}$; man thut aber beſſer, wenn man das zweyte wählt, weil im erſten Falle $\frac{x}{a^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$, und im zweyten Fall $\frac{x}{a^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ iſt. Setzet man darum $\sqrt{30} = \sqrt{(36-6)}$, ſo iſt, wenn man in der obigen Formel $a^2 = 36$, und $x = 6$ ſetzet,

$$\sqrt{30} = 6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4.6} - \frac{1.3}{2.4.6.(6)^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.(6)^3} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.(6)^4} - \ldots.$$

Eine noch weit ſchneller abnehmende Reihe würde man für $\sqrt{30}$ erhalten, wenn man die Zahl unter dem Zeichen mit einer vollkommenen Quadratzahl multipliciret, und ſolche zugleich wieder als Nenner unterſchreibet, den Nenner aber vor das Zeichen hinausſchaffet. Z. B. wenn man ſetzet

$$\sqrt{30} = \sqrt{\frac{30.100}{100}} = \frac{1}{10}\sqrt{3000} = \frac{1}{10}\sqrt{(3025-25)}; \text{ denn}$$

in diesem Falle ist in der obigen Formel $a^2 = 3025$; $x = 25$, und $\frac{x}{a^2} = \frac{25}{3025} = \frac{1}{121}$; folglich

$$\sqrt{30} = \frac{1}{10}\left(55 - \frac{25}{2.55} - \frac{1.25^2}{2.4.55^3} - \frac{1.3.25^3}{2\,4.6.55^5} - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(55 - \frac{55.25}{2.55^2} - \frac{1.55.25^2}{2.4.55^4} - \frac{1.3.55.25^3}{2.4.6.55^6} - \ldots\right)$$

$$= \frac{55}{10}\left(1 - \frac{1}{2.121} - \frac{1}{2.4.(121)^2} - \frac{1.3}{2.4.6.(121)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{1\,3.5}{2\,4.6.8.(121)^4} - \ldots\right)$$

$$= \frac{55!}{10}\,(1 - 0{,}0041408044) = 5{,}4772255761,$$

welches man erhält, wenn man nur drey Brüche von dieser Reihe entwickelt; weil die folgenden Glieder bis in die zehnte Decimalstelle keine bedeutliche Ziffer mehr geben.

Wäre aus einer großen irrationalen Zahl die Quadratwurzel durch Annäherung zu finden, wo die nächst kleinere Wurzel in Rücksicht des Restes schon beträchtlich groß ist, nähmlich wenn $a$ schon beträchtlich größer als $x$ wäre; so erhält man schon einige der folgenden Decimalstellen der Wurzel richtig, wenn man bloß das erste Glied $\frac{x}{2a}$ allein entwickelt; z. B.

$$\sqrt{675915} = \sqrt{(675684 + 231)} = 822 + \frac{231}{2.822} = 822{,}1405,$$

wo die vierte Decimalziffer noch richtig ist; weil das folgende Glied der Reihe $- \frac{(231)^2}{2.4.(822)^3}$ an der vierten Stelle keine bedeutliche Ziffer mehr gibt.

Ingleichen ist $\sqrt{8596{,}47} = \sqrt{(8593{,}29 + 3{,}18)} = 92{,}7 + \frac{3{,}18}{2.92.7} = 92{,}71715.$

Hierauf gründet sich die in verschiedenen practischen Rechenbüchern vorfindige Regel: daß, wenn man bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einer irrationalen Zahl einige Ziffern der Wurzel (entweder durch wirkliches Ausziehen (nach §. 146), oder mittelst der Logarithmen, oder auch durch Bey-

hülfe einer Tafel der Quadratzahlen) schon gefunden hat, man nur das Quadrat dieser gefundenen Ziffern von der vorgegebenen Zahl abziehen, und den Rest durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel dividiren soll, um noch einige folgende Ziffern der Wurzel richtig zu erhalten.

§. 302.

Es sey noch nach der Formel (§. 300) $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = (a^3 \pm x)^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln, so ist $n = \frac{1}{3}$, $P = a^3$, und $Q = \pm \frac{x}{a^3}$; folglich

$$P^n = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a = A$$

$$nAQ = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \pm \frac{x}{a^3} \cdot = \pm \frac{x}{3a^2} = B$$

$$\frac{n-1}{2} BQ = -\frac{2}{2.3} \cdot \pm \frac{x}{3.a^2} \cdot \pm \frac{x}{a^3} = -\frac{2.x^2}{2.3^2 a^5} = C$$

$$\frac{n-2}{3} CQ = -\frac{5}{3.3} \cdot -\frac{2.x^2}{2.3^2 a^5} \cdot \pm \frac{x}{a^3} = \pm \frac{2.5.x^3}{2.3.3^3.a^8} = D$$

$$\frac{n-3}{4} DQ = -\frac{8}{3.4} \cdot \pm \frac{2.5\,x^3}{2.3.3^3 a^8} \cdot \pm \frac{x}{a^3} = -\frac{2.5.8.x^4}{2.3.4.3^4 a^{11}} = E$$

$$\frac{n-4}{5} EQ = -\frac{11}{3.5} \cdot -\frac{2.5.8.x^4}{2.3.4.3^4.a^{11}} \cdot \pm \frac{x}{a^3} = \pm \frac{2\,5.8\,11x^5}{2.3.4.5.3^5.a^{14}} = F$$

folglich $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)} = a \pm \frac{x}{1.3.a^2} - \frac{2.x^2}{1.2.3^2.a^5} \pm \frac{2.5.x^3}{1.2.3.3^3.a^8} - \frac{2.5.8.x^4}{1.2.3.4.3^4.a^{11}} \pm \frac{2.5.8.11.x^5}{1.2.3.4.5.3^5.a^{14}} - \cdot\cdot$

Durch diese Reihe läßt sich nun wieder sehr leicht aus einer vorgegebenen irrationalen Zahl die Cubikwurzel durch Annäherung finden, wenn man die Zahl in solche zwey Theile zerleget, wovon einer ein vollkommener Cubus, und in Rücksicht des andern beträchtlich groß ist; weil alsdann die Reihe sehr schnell abnehmen wird, und in den meisten Fällen nur das erste Glied der Reihe ganz allein entwickelt werden darf, um die Cubikwurzel mit einigen Decimalstellen richtig zu erhalten. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{(512 - 12)} = 8 - \frac{12}{3.64} = 8 - 0{,}062 = 7{,}937;$$

weil das folgende Glied der Reihe die dritte Decimalstelle in der Wurzel nicht mehr ändert.

Ingleichen $\sqrt[3]{572319} = \sqrt[3]{(571787 + 532)} = 83 + \frac{532}{3.(83)^2}$ $= 83{,}02574$, wo die fünfte Decimalziffer noch richtig ist, weil das folgende Glied an dieser Stelle keine bedeutliche Ziffer mehr gibt.

Hat man demnach durch die Hülfe der Logarithmen, oder durch Hülfe der Tafeln der Cubikzahlen, die Wurzel aus einer vorgelegten Zahl mit einigen Decimalstellen bestimmt, und man wollte deren noch einige richtig haben; so ziehe man nur den Cubus der schon gefundenen Wurzel von der vorgelegten Zahl ab, und dividire den Rest durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so wird der Quotient noch einige der folgenden Ziffern der Wurzel geben.

## §. 303.

Endlich wollen wir noch $(a + x)^{-\frac{3}{4}}$ nach der Formel (§. 300) entwickeln. Da ist $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$, und $n = -\frac{3}{4}$; folglich

$$P^n = a^{-\frac{3}{4}} = A$$

$$nAQ = -\frac{3}{4} \cdot a^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{x}{a} = -\frac{3a^{-\frac{7}{4}}x}{4} = B$$

$$\frac{n-1}{2} \cdot BQ = -\frac{7}{2.4} \cdot -\frac{3a^{-\frac{7}{4}}x}{4} \cdot \frac{x}{a} = +\frac{3.7a^{-\frac{11}{4}}x^2}{2.4^2} = C$$

$$\frac{n-2}{3} \cdot CQ = -\frac{11}{3.4} \cdot \frac{3.7.a^{-\frac{11}{4}}x^2}{2.4^2} \cdot \frac{x}{a} = -\frac{3.7.11.a^{-\frac{15}{4}}x^3}{2.3.4^3} = D$$

$$\frac{n-3}{4} \cdot DQ = -\frac{15}{4.4} \cdot -\frac{3.7.11.a^{-\frac{15}{4}}x^3}{2.3.4^3} \cdot \frac{x}{a} = +\frac{3.7.11.15.a^{-\frac{19}{4}}x^4}{2.3.4.4^4} = E$$

u. s. w.

folglich ist

$$(a + x)^{-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{3}{4}} - \frac{3.a^{-\frac{7}{4}}x}{1.4} + \frac{3.7.a^{-\frac{11}{4}}x^2}{1.2.4^2} - \frac{3.7.11.a^{-\frac{15}{4}}x^3}{1.2.3.4^3} + \frac{3.7.11.15.a^{-\frac{19}{4}}x^4}{1.2.3.4.4^4} - \ldots.$$

### §. 304.

Sollte eine Größe, die aus mehr als zwey Gliedern beste-het, durch den binomischen Lehrsatz auf irgend eine Potenz er-hoben werden, so muß man die vorgegebene Größe als zweynah-mig vorstellen. Z. B. es wäre $(c^2 + x^2 - x)^{\frac{1}{3}}$ zu entwickeln; so setze man $c^2 = P$, $\frac{x^2 - x}{c^2} = Q$, und $\frac{1}{3} = n$, sodann substi-tuire man diese Werthe in der Formel (§. 300), so wird man die verlangte Reihe erhalten. Da aber dergleichen Reihen der Potenzen einer mehr als zweynahmigen Größe von keiner beson-dern Anwendung sind, so wollen wir uns dabey gar nicht auf-halten.

Anmerkung. Wenn man (in §. 299) statt $b$ allenthal-ben den negativen Werth $-\frac{ax}{a+x}$ setzet, um für $(a + x)^{-n}$ eine Reihe zu erhalten; und wenn man sodann für $n$ auch einen negativen Werth $-m$ annimmt, so kömmt nachstehende For-mel zum Vorschein

$$(a+x)^m = a^m \cdot \left(1 + \frac{mx}{a+x} + \frac{m(m+1)x^2}{2.(a+x)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^3}{2.3(a+x)^3} + \cdots\right)$$

---

# VII. Abschnitt.

## Von der Summirung einiger besondern, theils end-lichen, theils unendlichen Reihen, nebst vorläufigen Begriffen von dem unendlich Großen, und unend-lich Kleinen.

### §. 305.

Obwohl jede Größe ohne Ende vermehrt werden kann, und man nie zu einer Größe gelangen wird, wo sich nicht eine noch größere angeben läßt; so ist es doch in der Mathematik öfters nützlich, sich eine unendlich große Größe zu gedenken, eine Größe nähmlich, die größer ist, als jede an-

gebliche Größe der nähmlichen Gattung. Z. B. wenn uns Jemand in der ohne Ende fortlaufenden Reihe (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + .... + ohne Ende) um das letzte Glied, wie auch um die Anzahl der Glieder befragen würde; so können wir nicht anders, als mit einer unendlich großen Zahl antworten. Das Zeichen, durch welches man in der Mathematik eine unendlich große Zahl vorzustellen pflegt, ist $\infty$; es bedeutet nähmlich dieses Zeichen $\infty$ eine Zahl, die größer ist, als jede angebliche noch so große Zahl. Eine Größe hingegen, welche ihre bestimmten Gränzen hat, wird eine endliche Größe genannt.

Man kann zu dem Begriffe einer unendlich großen Zahl auf folgende Art gelangen. Es sey der Nenner $z$ des Bruches $\frac{1}{z}$ eine veränderliche Function, z. B. $z = a - x$, so wird der Werth des Bruches immer mehr und mehr wachsen, je kleiner der Nenner $z$ angenommen wird (§. 78); bildet man sich nun ein, daß der Nenner $z$ immer mehr und mehr vermindert werde, bis er gleich Null wird, so muß der Quotient ohne Zweifel unendlich groß seyn; nähmlich es ist $\frac{1}{0} = \infty$. Dieses läßt sich auch sehr deutlich einsehen, wenn man (in §. 282) bey der Verwandlung des Bruches $\frac{1}{a-x}$ in eine unendliche Reihe, $a = 1$ und $x = 1$ setzet; denn man erhält sodann $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$

Es ist demnach auch $\frac{a}{0} = \frac{1}{0} \cdot a = \infty \cdot a$.

§. 306.

So wie man sich nun eine Zahl einbilden kann, welche größer ist, als jede angebliche noch so große Zahl; eben so kann man sich auch einen unendlich kleinen Bruch vorstellen, einen Bruch nähmlich, welcher kleiner ist, als jeder angebliche noch so kleine Bruch. Z. B. wenn in der unendlichen Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$. die Nenner ohne Ende wachsen, so wird der Nenner des letzten Gliedes $= \infty$ seyn; und

das letzte Glied ist sodann $= \frac{1}{\infty}$. Nun aber wird der Werth eines Bruches immer kleiner, je größer sein Nenner wird; daher muß der Werth eines solchen Bruches $\frac{1}{n}$ unendlich klein werden, wenn dessen Nenner $n$ unendlich groß wird.

Das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ deutet demnach einen Theil der Einheit an, welcher kleiner ist, als jeder angebliche noch so kleine Theil. Eben so stellet $\frac{a}{\infty} = \frac{1}{\infty}$ . $a$ einen unendlich kleinen Theil von $a$ vor.

§. 307.

Hieraus folgt nun, daß ein unendlich kleiner Theil einer Größe die Größe selbst weder vermehre noch vermindere, wenn solcher hinzu addirt, oder davon subtrahirt wird; nähmlich daß $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$ sey. Denn wäre $1 \pm \frac{1}{\infty}$ nicht gleich 1, so müßte sich ein Unterschied angeben lassen, um welchen die Einheit vermehrt oder vermindert worden ist, welches wider den Begriff einer unendlich kleinen Größe ist. Eben so ist auch $a \pm \frac{a}{\infty}$ $= a\left(1 \pm \frac{1}{\infty}\right) = a$. Eine unendlich kleine Größe verschwindet demnach in Rücksicht einer endlichen Größe, wenn sie dazu addirt oder davon subtrahirt werden solle. Und daher kann man auch sagen: eine unendlich kleine Größe ist ein so kleiner Theil eines Ganzen, daß solcher in Rücksicht des Ganzen für nichts anzusehen ist.

Anmerkung. Den Anfänger darf es nicht befremden, daß man in der Mathematik Zeichen gebraucht, um unendlich große und unendlich kleine Zahlen vorzustellen, da es doch nach metaphysischen Gründen in der Natur keine solche Zahlen gibt. Man darf sich hier nur erinnern, daß auch in der Mathematik die unmöglichen Größen durch Zeichen ausgedrücket, (wie z. B. $\sqrt[2n]{-a}$), und sodann verschiedene Rechnungen damit vorge-

nommen werden. Es kömmt nur darauf an, ob die arithmetischen Arbeiten, welche man mittelst der Bezeichnung der unendlich großen und unendlich kleinen Größen vornimmt, auf eine leichte Art zu nützlichen Untersuchungen und Anwendungen führen. In den folgenden Theilen der Mathematik wird zu ersehen seyn, daß der Nutzen, welcher aus der arithmetischen Betrachtung der unendlich großen und unendlich kleinen Größen entspringt, weit wichtiger, ausgebreiteter, und für jeden auch nur mittelmäßigen Kopf faßlicher ist, als jener, welchen die Rechnung mit unmöglichen Größen verschaffet.

§. 308.

Wenn man die unendlich großen und unendlich kleinen Größen auf die angeführte Art bezeichnet, so sind solche sodann, so wie die unmöglichen Größen, allen Rechnungsarten unterworfen; sie können addiret, subtrahiret, multipliciret, und dividiret werden; so ist z. B. $\infty + \infty = 2\infty$; $3\infty - 2\infty = \infty$; $\infty \times a = \infty a$; $\infty : a = \frac{\infty}{a}$; $a : \infty = \frac{a}{\infty}$ u. s. w.; eben so $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} . a = \frac{a}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} : b = \frac{1}{\infty b}$; $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$. Ingleichen $\infty \times \infty = \infty^2$; $\infty^2 \times \infty = \infty^3$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3}$ u. s. w.

Die Potenzen $\infty^2$, $\infty^3$, $\infty^4$; $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^4}$ ..... pflegt man die Ordnungen des Unendlichen zu nennen; nähmlich $\infty^2$ heißt eine unendlich große Größe der zweyten Ordnung, oder des zweyten Ranges; $\infty^3$ eine unendlich große Größe der dritten Ordnung u. s. w. Eben so heißt $\frac{1}{\infty^2}$ eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung, oder des zweyten Ranges; $\frac{1}{\infty^3}$ eine unendlich kleine Größe der dritten Ordnung u. s. w.

§. 309.

Wenn man eine endliche Größe $a$ mit einer unendlich großen Zahl $\infty$ multipliciret, so ist das Product $= \infty a$; und

wenn man $a$ durch $\infty$ dividiret, so ist der Quotient $= \frac{a}{\infty}$, wo die Größen $\frac{a}{\infty}$, $a$, $\infty a$ als drey aufeinander folgende Glieder einer geometrischen Reihe anzusehen sind. Wenn man nun die übrigen Glieder dieser Reihe beyderseits ansetzt, so erhält man folgende geometrische Reihe

$$\ldots\ldots \frac{a}{\infty^3}, \frac{a}{\infty^2}, \frac{a}{\infty}, a, \infty a, \infty^2 a, \infty^3 a \ldots\ldots$$

es ist nähmlich erlaubt zu $a$ und $\frac{a}{\infty}$ die dritte zusammenhängende Proportionalgröße zu suchen; und so auch zu $a$ und $\infty a$; oder welches einerley ist, es ist auch ferner erlaubt $\infty a$ mit $\infty$ zu multipliciren, und $\frac{a}{\infty}$ durch $\infty$ zu dividiren u. s. w.

Aus der Betrachtung der angeführten geometrischen Reihe können nun folgende Schlüsse abgeleitet werden.

1) Jede endliche Größe $a$ verschwindet in Rücksicht einer unendlich großen Größe, wenn sie dazu addirt, oder davon subtrahirt werden soll. Denn es ist aus der Progression

$$\frac{a}{\infty} : a = a : \infty a$$

also auch $a \pm \frac{a}{\infty} : a = \infty a \pm a : \infty a$ (§. 187).

Nun aber ist $a \pm \frac{a}{\infty} = a$ (§. 307)

folglich auch $\infty a \pm a = \infty a$.

2) Jede unendlich große Größe einer niedrigern Ordnung verschwindet in Rücksicht einer unendlich großen Größe einer höhern Ordnung.

Denn da $\frac{a}{\infty} : a = \infty a : \infty^2 a$

so ist auch $a \pm \frac{a}{\infty} : a = \infty^2 a \pm \infty a : \infty^2 a$

nähmlich $\infty^2 a \pm \infty a = \infty^2 a$.

Und so läßt sich auch zeigen, daß $\infty^3 a \pm \infty^2 a = \infty^3 a$ u. s. w.

3) Eben so verschwindet auch jede unendlich kleine Größe einer höhern Ordnung in Rücksicht einer unendlich kleinen Größe von einer niedrigern Ordnung, wenn sie dazu addirt, oder davon abgezogen werden soll;

nähmlich $\frac{a}{\infty} \pm \frac{a}{\infty^2} = \frac{a}{\infty}$; $\frac{a}{\infty^2} \pm \frac{a}{\infty^3} = \frac{a}{\infty^2}$ u. s. w.

## §. 310.

Es sey nun die Summe folgender unendlichen Reihe von Brüchen $\frac{b}{c} + \frac{b}{cm} + \frac{b}{cm^2} + \frac{b}{cm^3} + \ldots\ldots$ wo die Zähler beständig sind, die Nenner aber in einer geometrischen Progression beständig wachsen, zu bestimmen;

so ist (vermöge §. 253) $a = \frac{b}{c}$; $q = \frac{1}{m}$

und (nach §. 254, Nr. 6) $s = \frac{bm(m^n - 1)}{cm^n(m-1)}$.

Setzet man die Anzahl der Glieder $n = \infty$, so ist

$s = \frac{bm \,.\, m^\infty}{cm^\infty(m-1)} = \frac{bm}{c(m-1)}$.

### Beyspiele.

I. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots = 1$

denn hier ist $b = 1$, $c = 2$, $m = 2$; folglich $s = \frac{1.2}{2.1} = 1$

II. $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots\ldots = \frac{2}{3}$

den $b = 1$, $c = 2$, $m = 4$; folglich $s = \frac{1.4}{2.3} = \frac{2}{3}$

III. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \ldots\ldots = \frac{1}{3}$

denn $b = 1$, $c = 2$, $m = -2$; folglich $s = \frac{1.-2}{2.-3} = \frac{1}{3}$

IV. $\frac{3}{2} - \frac{6}{6} + \frac{12}{18} - \frac{24}{54} + \frac{48}{162} \ldots\ldots = \frac{9}{10}$

denn $b = 3$, $c = 2$, $m = -\frac{3}{4}$; folglich $s = (3 \,.\, -\frac{3}{4}) : 2. - \frac{5}{4}$

$= -\frac{9}{4} : -\frac{10}{2} = \frac{9}{10}$.

V. Es ist das Gesetz eines ohne Ende fortlaufenden Decimalbruches bekannt, z. B. 0,11111..... man soll den gemeinen Bruch herbeyschaffen, welcher (nach §. 98) in einen Decimalbruch verwandelt, den vorgelegten zum Vorschein bringet.

Hier ist $b = 1$, $c = 10$, und $m = 10$, weil 0,11111 . . $= \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3}$ . . . . . folglich ist der verlangte Bruch $s = \frac{1 \cdot 10}{10 \cdot 9} = \frac{1}{9}$.

Eben so findet man, daß zu dem Decimalbruch 0,575757 . . . . . der Bruch $\frac{57}{99} = \frac{19}{33}$ gehöre; weil in diesem Falle $b = 57$, $c = 100$ und $m = 100$ ist.

Wollte man aber den Bruch herbeyschaffen, welcher in einen Decimalbruch verwandelt 0,9999 . . . . . gibt, so ist hier $b = 9$, $c = 10$, und $m = 10$, folglich $s = \frac{9\ 10}{10 \cdot 9} = 1$; das heißt, es läßt der Bruch sich gar nicht angeben, welcher in einen Decimalbruch verwandelt 0,9999 . . . . . gibt; weil sich (vermöge §. 306) zwischen diesem ohne Ende fortlaufenden Decimalbruch, und zwischen der ganzen Einheit gar kein Unterschied angeben läßt, indem solcher unendlich klein ist.

## §. 311.

Wenn man die Glieder einer arithmetischen Reihe

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d \ldots a + (n - 1)d$$

mit den Gliedern einer geometrischen Reihe

$$b, bq, bq^2, bq^3, bq^4, bq^5 \ldots bq^{n-1}$$

einzeln multipliciret, so erhält man nachstehende zusammengesetzte Reihe,

$$ab, (a + d)bq, (a + 2d)bq^2, (a + 3d)bq^3 \ldots$$

wovon das allgemeine Glied ist

$$t = [a + (n - 1)d]\, bq^{n-1}$$

und das summatorische Glied $= s$ von dieser zusammengesetzten Reihe läßt sich auf folgende Art bestimmen.

Man zertheile jedes Glied, z. B. $(a + 3d)\, bq^3$ in so viele Glieder, als der Coefficient von $d$ Einheiten erhält, nähmlich $(a + 3d)\, bq^3 = abq^3 + bdq^3 + bdq^3 + bdq^3$ so ist

$$\begin{aligned} s &= ab \\ &+ abq + bdq \\ &+ abq^2 + bdq^2 + bdq^2 \end{aligned}$$

$$+ abq^3 + bdq^3 + bdq^3 + bdq^3$$
$$+ abq^4 + bdq^4 + bdq^4 + bdq^4 + bdq^4$$
$$+ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$+ abq^{n-1} + bdq^{n-1} + bdq^{n-1} + \ldots bdq^{n-1}$$

Nun ist von oben nach unten gezählet die Summe der ersten Colonne $= \frac{abq^n - ab}{q-1}$, (vermöge §. 254, Nr. 5).

Die Summe der zweyten Colonne, welche um 1 Glied weniger enthält,

ist, vermöge eben der Formel $= \frac{bdq^n - bdq}{q-1}$;

die Summe der dritten $= \frac{bdq^n - bdq^2}{q-1}$

die Summe der vierten $= \frac{bdq^n - bdq^3}{q-1}$

die Summe der fünften $= \frac{bdq^n - bdq^4}{q-1}$

u. s. w.

folglich $s = \frac{abq^n - ab}{q-1} + (n-1) \times \frac{bdq^n}{q-1}$

$$- \frac{bdq}{q-1} (1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-2})$$

und endlich, wenn man auch statt der hier in Klammern eingeschlossenen Reihe (aus §. 254, Nr. 5) den gleichen Werth $\frac{q^{n-1} - 1}{q-1}$ setzet, und alles gehörig reduciret

$$s = \frac{ab(q^n - 1) + nbdq^n}{q-1} - \frac{bdq(q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

## §. 312.

Setzet man in der angeführten Formel (§. 311) $\frac{1}{b}$ statt $b$, und $\frac{1}{q}$ statt $q$, so erhält man von nachstehender Reihe

$$\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}, \ldots$$

allgem. Glied $t = \frac{a + (n-1)d}{bq^{n-1}}$

summat. Glied $s = \frac{(aq - a + d)(q^n - 1) - dn(q-1)}{bq^{n-1}(q-1)^2}$

Setzet man hier $n = \infty$

so ist $s = \frac{(aq - a + d)\, q^{\infty}}{bq^{\infty - 1}(q-1)^2}$; weil das zweyte Glied im Zähler als eine unendlich große Größe eines niedrigen Ranges in Rücksicht des ersten Gliedes verschwindet;

ferner $s = \frac{(aq - a + d)\, q \cdot q^{\infty - 1}}{b(q-1)^2 \cdot q^{\infty - 1}}$

und endlich $s = \frac{(aq - a + d)\, q}{b(q-1)^2}$

Z. B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots\ldots = 3$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \ldots\ldots = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{4}{6} + \frac{12}{18} + \frac{32}{54} + \frac{80}{162} \ldots\ldots = \frac{9}{2}$

weil hier im letzten Beyspiele $a = 1$, $d = 1$, $b = 2$, und $q = \frac{3}{2}$ ist.

Eben so ist $0{,}123456790123456790 \ldots = \frac{10}{81}$ wenn man hier $a = 1$, $d = 1$, $b = 10$, und $q = 10$ setzet. Eben diese Summe findet man auch (nach §. 310), wenn man dort $b = 123456790$; $c = 10^9$ und $m = 10^9$ setzet.

## §. 313.

Es gibt auch Reihen, die sich summiren lassen, bey denen die Zähler beständig sind, die Nenner aber in einer gewissen arithmetischen Reihe des zweyten Ranges fortgehen; ingleichen wo die Zähler sowohl, als auch die Nenner in arithmetischen Reihen wachsen; jedoch muß der Rang der arithmetischen Reihe im Nenner wenigstens um zwey größer seyn als im Zähler. Da aber dergleichen Reihen keinen besondern Nutzen verschaffen, so wird es genug seyn, nur einige wenige aus diesen mit ihrem summatorischen Gliede hier anzusetzen; als

I. Reihe $\frac{a}{b.(b+d)} + \frac{a}{(b+d)(b+2d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \text{ꝛc.}$

allgemeines Glied $t = \frac{a}{[b + (n-1)d]\,(b+nd)}$

summat. Glied $s = \frac{na}{b(b+nd)}$.

Setzet man nun $n = \infty$, so ist $s = \frac{a}{bd}$

z. B. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots = 1.$

$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \ldots = \frac{1}{6}.$

II. Reihe $\frac{a}{b(b+d)(b+2d)} + \frac{a}{(b+d)(b+2d)(b+3d)} + \ldots$

$$t = \frac{a}{[b+(n-1)d][b+nd][b+(n+1)d]}$$

$$s = \frac{a(2b+d)n + adn^2}{2b[b+d][b+nd][b+(n+1)d].}$$

Setzet man $n = \infty$; so ist $s = \frac{ad\infty^2}{2b(b+d)d\infty . d\infty}$

$$= \frac{a}{2bd(b+d)}.$$

z. B. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{2.4.6} + \frac{3}{4.6.8} + \frac{3}{6.8.10} + \ldots = \frac{3}{32}$

III. Reihe $\frac{a}{b(b+d)(b+2d)} + \frac{a+c}{(b+d)(b+2d)(b+3d)}$

$$+ \frac{a+2c}{(b+2d)\ldots(b+4d)} + \text{&c.}$$

$$t = \frac{a+(n-1)c}{[b+(n-1)d][b+nd][b+(n+1)d]}$$

$$s = \frac{(2ab-bc+ad)n + (ad+bc)n^2}{2b[b+d][b+nd][b+(n+1)d]}.$$

Setzet man $n = \infty$

so ist $s = \frac{(ad+bc)\infty^2}{2b(b+d).d\infty.d\infty} = \frac{ad+bc}{2b(b+d).d^2}.$

z. B. $\frac{1}{1.3.5} + \frac{2}{3.5.7} + \frac{3}{5.7.9} + \frac{4}{7.9.11} + \ldots = \frac{1}{8}$

$\frac{1}{2.4.6} + \frac{3}{4.6.8} + \frac{5}{6.8.10} + \ldots = \frac{3}{32}$

IV. Reihe $\frac{a}{a+1} + \frac{a+d}{(a+1)(a+1+d)} + \frac{a+2d}{(a+1)(a+1+d)(a+1+2d)}$

$$+ \frac{a+3d}{(a+1)(a+1+d)(a+1+2d)(a+1+3d)} + \ldots$$

$$t = \frac{a+(n-1)d}{(a+1)(a+1+d)\ldots[a+1+(n-1)d]}$$

$$s = 1 - \frac{1}{(a+1)(a+1+d)\ldots[a+1+(n-1)d]}$$

Setzet man $n = \infty$, so ist $s = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$.

Z. B. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} + \ldots = 1.$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3.5} + \frac{6}{3.5.7} + \frac{8}{3.5.7.9} + \ldots = 1.$

Die summatorischen Glieder zu den hier angeführten Reihen sind dadurch entdeckt worden, daß man verschiedene Functionen von $n$, z. B. $\frac{An}{B+Cn}$, ingleichen $\frac{An+Bn^2}{C+Dn+En^2}$ u. s. w. für summatorische Glieder gewisser Reihen angesehen hat; darauf hat man in einer jeden solchen Function, z. B. in $\frac{An}{B+Cn}$, um die Summe von $n-1$ Gliedern zu erhalten, $n-1$ statt $n$ gesetzet, und diesen letztern Werth $\frac{A(n-1)}{B+C(n-1)}$ von den vorigen $\frac{An}{B+Cn}$ abgezogen; dadurch hat man (vermöge §. 231) das allgemeine Glied $= \frac{AB}{[B+Cn][B+C(n-1)]}$ derjenigen Reihe erhalten, welche mit dem angenommenen summatorischen Gliede $\frac{An}{B+Cn}$ zusammen gehöret. Da man endlich in diesem allgemeinen Gliede nach einander 1, 2, 3, 4, 5 . . . . für $n$ gesetzet hat, so hat man die auf einander folgenden Glieder einer solchen Reihe erhalten.

Man kann überhaupt jede Function von $n$ für ein summatorisches Glied von irgend einer Reihe ansehen, wozu sich (nach §. 231) das allgemeine Glied, und sodann die Reihe selbst nebst ihrer Gestalt bestimmen läßt. Nur muß die Function so beschaffen seyn, daß das (nach §. 231) daraus abgeleitete allgemeine Glied mit der angenommenen Function, für $n = 1$ einerley Werth habe. Z. B. wenn man $s = (A + Bn + Cn^2)\,D^n$ als das summatorische Glied einer gewissen Reihe ansehen wollte, so wäre das allgemeine Glied

$t = (A + Bn + Cn^2) D^n - [A + B(n-1) + C(n-1)^2] D^{n-1}$;
und nun ist für $n = 1$ der Werth $s = (A + B + C) D$;
hingegen $t = (A + B + C) D - A$; daher ist nicht
$(A + Bn + Cn^2) D^n$, sondern $(A + Bn + Cn^2) D^n - A$
so beschaffen, daß letzteres für das summatorische Glied einer gewissen Reihe angesehen werden könne.

Anmerkung. Es ist sonderbar, daß alle bisher bekannten Kunstgriffe der Algebra nicht hinreichen, folgende unendliche Reihe

I. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots$

oder überhaupt eine Reihe von der Form

II. $\frac{a}{(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + \ldots$

richtig zu summiren. Man sollte denken, weil diese Reihe bloß aus den ungeraden Gliedern der Reihe

$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+d)(b+2d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+3d)(b+4d)} + \ldots$

besteht, deren Summe wir oben angegeben haben, daß sich auch die Summe dieser Reihe bestimmen lassen müsse, so wie z. B. die Summe der Reihe

$\frac{a}{b} + \frac{a}{bq^2} + \frac{a}{bq^4} + \frac{a}{bq^6} + \ldots$

als der ungeraden Glieder der Reihe

$\frac{a}{b} + \frac{a}{bq} + \frac{a}{bq^2} + \frac{a}{bq^3} + \frac{a}{bq^4} + \ldots$

sich angeben läßt. Allein es bleibt bey dem, wie schon gesagt worden, daß alle bisher bekannten Kunstgriffe der Algebra nicht hinreichen, dergleichen Reihen, wie I und II zu summiren, wenn nicht jedes Gliedes Nenner mit dem zweyten Factor des vorhergehenden Nenners anfängt. Nur durch eine Annäherung kann man die Summe einer solchen Reihe bestimmen, besonders wenn man die Reihe in eine andere verwandelt, die sehr geschwind zusammenläuft, welches man bey unendlichen Reihen, die nicht schnell genug abnehmen, jederzeit ins Werk zu stellen trachten muß; wir haben ein solches Beyspiel bey der Reihe

log nat $2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

$= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \ldots$ gesehen, die wir in folgende Reihe log nat $2 = 2.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\ldots\right)$ verwandelt haben, welche schon dergestalt abnimmt, daß man nur einige wenige Glieder 8 oder 9 entwickeln darf, um eine Annäherung zu der Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe zu erhalten, die bis auf den millionten Theil einer Einheit richtig ist.

## §. 314.

Es ereignet sich zuweilen, daß nur einige wenige Glieder als z. B. das 20te, 30te, 40te, 50te und 60te Glied einer Reihe gegeben werden, ohne zu wissen, zu welcher Gattung diese Reihe gehöre; und doch wird dabey verlanget, daß man die übrigen zwischenliegenden Glieder ziemlich verläßlich bestimmen soll. Beym Bombenwerfen trägt sich dieses zu; es sey z. B. die unter einem nähmlichen Erhöhungswinkel erreichte Weite mit 20 Loth Pulver = 80 Klafter, mit 30 Loth = 250, mit 40 Loth = 420, mit 50 Loth = 550, und mit 60 Loth Pulver = 650 Klafter; nun sollen aus diesen, durch einen richtigen Versuch gefundenen Wurfweiten unter dem nähmlichen Erhöhungswinkel, beym nähmlichen Mörser, die zu den verschiedenen Ladungen von 20 bis 60 Loth des nähmlichen Pulvers zugehörigen Wurfweiten vom Lothe zu Lothe durch Rechnung bestimmet werden. Dieses kann auf folgende Art geschehen:

Da es einmahl gewiß ist, daß die zu den verschiedenen Ladungen von 20 bis 60 Loth zugehörigen Wurfweiten eine zunehmende Reihe ausmachen, von der uns weder das Gesetz, noch sonst etwas außer dem 20ten, 30ten, 40ten, 50ten, 60ten Gliede bekannt ist; so setze man die zu $n$ Lothen des nähmlichen Pulvers unter dem nähmlichen Erhöhungswinkel zugehörige Wurfweite $w = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$.

Um nun die Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ zu bestimmen, setze man einmahl $n = 20$, dann $n = 30$, 40, 50, und endlich

$n = 60$; und da die Wurfweiten mit diesen Ladungen schon bekannt sind, so erhält man folgende Gleichungen

$$80 = 20A + 400B + 8000C + 160000D + 3200000E$$
$$250 = 30A + 900B + 27000C + 810000D + 24300000E$$
$$420 = 40A + 1600B + 64000C + 2560000D + 102400000E$$
$$550 = 50A + 2500B + 125000C + 6250000D + 312500000E$$
$$650 = 60A + 3690B + 216000C + 12960000D + 777600000E$$

Aus diesen Gleichungen findet man $A = -\frac{6912000}{288000}$;

$B = \frac{679600}{288000}$; $C = -\frac{17660}{288000}$; $D = \frac{212}{288000}$; $E = -\frac{1}{288000}$.

Es ist demnach die zu $n$ Lothen gehörige Wurfweite

$$w = \frac{-6912000n + 679600n^2 - 17660n^3 + 212n^4 - n^5}{288000}$$
$$= \frac{(679600n^2 + 212n^4) - (6912000n + 17660n^3 + n^5)}{288000}.$$

Setzet man nun in dieser Formel $n = 20, 30, 40, 50, 60$, so erhält man für die Wurfweiten die nähmlichen Zahlen, die das angenommene Experiment gegeben hat; setzet man ferner in dieser Formel $n = 21, 22, 23, \ldots 59$, und reducirt alles gehörig, so erhält man die zu 21, 22, 23 .... 59 Lothen des nähmlichen Pulvers und unter den nähmlichen Erhöhungswinkel zugehörigen Wurfweiten $w$ in Klaftern.

## §. 315.

Wenn bey einer Reihe die auf einander folgenden, in Zahlen gegebenen Glieder $z, z^{I}, z^{II}, z^{III}, z^{IV}, z^{V}, z^{VI} \ldots$ so beschaffen sind, daß solche ohne merklichen Fehler als Glieder irgend einer arithmetischen Reihe eines höhern Ranges angesehen werden können; nähmlich, daß die daraus abgeleiteten Differenzreihen immer um einen Rang niedrigere arithmetische Reihen werden, und endlich beynahe in Null übergehen; und wenn man da das erste Glied bey der ersten Differenzreihe mit $\triangle z$ bey der zweyten Differenzreihe mit $\triangle^2 z$, bey der dritten mit $\triangle^3 z$, bey der vierten mit $\triangle^4 z$, u. s. w. bezeichnet; so ist nachstehende Formel sehr brauchbar, um zwischen $z$ und $z^1$ das an die $\frac{n}{m}$ te Stelle gehörige Glied $= Z$ einzuschalten.

## Allgemeine Interpolationsformel.

$$Z = z + \frac{n}{m}\cdot\Delta z - \frac{n(m-n)}{2m^2}\cdot\Delta^2 z + \frac{n(m-n)(2m-n)}{2\cdot 3m^3}\cdot\Delta^3 z$$
$$- \frac{n(m-n)(2m-n)(3m-n)}{2\cdot 3\cdot 4m^4}\cdot\Delta^4 z + \ldots\ldots$$

Um den Gebrauch dieser Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, stelle man sich vor, es wären die gemeinen Logarithmen mit 7 Decimalstellen nicht weiter als bis 100 berechnet; und nun sollte log 94,63 mittelst der Interpolation (Einschaltung) berechnet werden, ohne die Eigenschaften der Logarithmen zu kennen. Dieses kann auf folgende Art geschehen: Man setze hier $z = \log 94 = *9731279$; sodann ziehe man die bey 94, 95, 96, 97, 98, stehenden Logarithmen von einander ab, jeden vorhergehenden vom nächst darauf folgenden, um die erste Differenzreihe zu erhalten; aus dieser ersten Differenzreihe bestimme man eben so durch die Subtraction jedes vorhergehenden Gliedes vom nächst darauf folgenden die zweyte Differenzreihe; und darauf eben so die dritte; so ist sodann $\Delta z = +45957$, $\Delta^2 z = -481$, $\Delta^3 z = +10$, $\Delta^4 z = 0$; ferner setze man $\frac{n}{m} = 0{,}63$; nähmlich $m = 100$ und $n = 63$; endlich substituire man alle diese Werthe in der angeführten Formel, so wird man $Z = \log 94{,}63$ erhalten, nähmlich $\log 94{,}63 = *9731279 + 0{,}63 \times 45957 + 0{,}116 \times 481 + 0{,}05 \times 10 = 1{,}9760288$.

Diese allgemeine Interpolationsformel läßt sich aus folgenden Gründen ableiten. Bey der angenommenen Reihe

$z$, $z^{I}$, $z^{II}$, $z^{III}$, $z^{IV}$, $z^{V}$, . . . . bezeichne man die Glieder

der ersten Differenzreihe mit $\Delta z$, $\Delta z^1$, $\Delta z^{11}$, $\Delta z^{111}$, . . .
der zweyten = = = = = $\Delta^2 z$, $\Delta^2 z^1$, $\Delta^2 z^{11}$, $\Delta^2 z^{111}$ . . .
der dritten = = = = = $\Delta^3 z$, $\Delta^3 z^1$, $\Delta^3 z^{11}$, $\Delta^3 z^{111}$ . . .
der vierten = = = = = $\Delta^4 z$, $\Delta^4 z^1$, u. s. w.

so erhält man folgende Gleichungen:

$\Delta z = z^1 - z$; $\Delta z^1 = z^{11} - z^1$; $\Delta z^{11} = z^{111} - z^{11}$; $\Delta z^{111} = \Delta z^{1111} - z^{111}$ ....
$\Delta^2 z = \Delta z^1 - \Delta z$; $\Delta^2 z^1 = \Delta z^{11} - \Delta z^1$; $\Delta^2 z^{11} = \Delta z^{111} - \Delta z^{11}$ ..
$\Delta^3 z = \Delta^2 z^1 - \Delta^2 z$; $\Delta^3 z^1 = \Delta^2 z^{11} - \Delta^2 z^1$ ....
$\Delta^4 z = \Delta^3 z^1 - \Delta^3 z$ ....
$\Delta^5 z =$ u. s. w.

Aus diesen Gleichungen folgen nachstehende Werthe für $z^1$, $z^{11}$, $z^{111}$.... bloß durch $z$ und durch $\triangle z$, $\triangle^2 z$, $\triangle^3 z$, $\triangle^4 z$ ... ausgedrückt;

$$z^{I} = z + \triangle z$$
$$z^{II} = z + 2\triangle z + \triangle^2 z$$
$$z^{III} = z + 3\triangle z + 3\triangle^2 z + \triangle^3 z$$
$$z^{IV} = z + 4\triangle z + 6\triangle^2 z + 4\triangle^3 z + \triangle^4 z$$
$$z^{V} = z + 5\triangle z + 10\triangle^2 z + \text{u. s. w.}$$

Nun sind die Coefficienten allhier mit jenen des binomischen Lehrsatzes einerley (§. 297); es ist daher das $r^{te}$ Glied nach $z$ in der vorgelegten Reihe, wenn man solches mit $z^r$ bezeichnet, folgender Maßen allgemein ausgedrückt;

$$z^r = z + r\triangle z + \frac{r(r-1)\triangle^2 z}{2} + \frac{r(r-1)(r-2)\triangle^3 z}{2 \cdot 3} + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)\triangle^4 z}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots\cdots$$

Setzet man endlich in dieser letzten Formel statt $r$ den eigentlichen Bruch $\frac{n}{m}$; so erhält man für das an der $\frac{n}{m}^{ten}$ Stelle zwischen $z$ und $z^1$ einzuschaltende Glied $Z$ den obenangeführten Werth, wobey $\triangle z$, $\triangle^2 z$, $\triangle^3 z$ ꝛc. auf die Zeichen + — die gehörige Rücksicht zu nehmen ist.

Anmerkung. Wenn man $(n - 1)$ statt $r$ in der letzten Formel setzt, so erhält man nachstehenden Werth für das allgemeine Glied $= T$ einer jeden arithmetischen Reihe eines höhern Ranges

$$T = z + (n-1)\triangle z + \frac{(n-1)(n-2)\triangle^2 z}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\triangle^3 z}{2 \cdot 3} + \cdots$$

Wenn man endlich auch bey der nähmlichen Reihe $z$, $z^1$, $z^{11}$, $z^{111}$ .... die Summe von 1 Gliede mit $s^1$, von 2 Gliedern mit $s^{11}$, von 3 Gliedern mit $s^{111}$ u. s. w., und endlich die Summe von $n$ Gliedern mit $s^n = S$ bezeichnet; so ist das summatorische Glied einer jeden arithmetischen Reihe eines höhern Ranges

$$S = nz + \frac{n(n-1)\triangle z}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)\triangle^2 z}{2\,.\,3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\triangle^3 z}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

weil $s = z$; $s^{11} = z + z^1 = 2z + \triangle z$; $s^{111} = z + z^1 + z^{11} = 3z + 3\triangle z + \triangle^2 z$; $s^{IV} = 4z + 6\triangle z + 4\triangle^2 z + \triangle^3 z$ ist u. s. w.

## §. 316.

Bevor wir diese Abhandlung von den Reihen beschließen, wollen wir noch das summatorische Glied $s$ von der Reihe der $m^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen $1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots . n^m$, entwickeln.

Um dieses zu finden, setze man, weil die $m^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen in einer arithmetischen Reihe des $m^{ten}$ Ranges fortgehen, das summatorische Glied

$$s = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots .$$

weil (vermöge §. 247) das summatorische Glied dieser Function gleich gesetzt werden kann.

Ferner setze man in diesem summatorischen Gliede $n - 1$ statt $n$; so wird man die Summe $s^1$, von $(n - 1)$ Gliedern der vorgelegten Reihe haben; nähmlich es ist die Summe von $(n-1)$ Gliedern der vorgelegten Reihe

$$s^1 = A(n-1)^{m+1} + B(n-1)^m + C(n-1)^{m-1} + \ldots$$

Ziehet man nun die Summe $s^1$ von der Summe $s$ ab, so muß das $n^{te}$ Glied zum Vorschein kommen (§. 231); nähmlich es ist $s - s^1 = n^m$; und daher

$$n^m = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots . - A(n-1)^{m+1} - B(n-1)^m - C(n-1)^{m-1} - D(n-1)^{m-2} -$$

Entwickelt man nun jedes Glied der zweyten Reihe (nach §. 299) und bringet die ganze Gleichung auf Null; so findet man (vermöge §. 283) nach gehöriger Reduction

$$A = \frac{1}{m+1};\ B = \frac{1}{2};\ C = \frac{1}{6}\cdot\frac{2m}{2};\ D = 0;$$

$$E = -\frac{1}{30}\cdot\frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3.4};\ F = 0$$

$$G = +\frac{1}{42}\cdot\frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{2.3.4.5.6};\ H = 0 \text{ u. s. w.}$$

Es ist demnach das summatorische Glied von der Reihe der $m^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen

$$s = \frac{1}{m+1} \cdot n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m$$
$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{2} \cdot n^{m-1}$$
$$- \frac{1}{30} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4} \cdot n^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{42} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6} \cdot n^{m-5}$$

u. s. w.

Oder wenn man vom dritten Gliede angefangen die vorstehenden Coefficienten mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ . . . bezeichnet, so ist

$$s = \frac{1}{m+1} \cdot n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m$$
$$+ \mathfrak{A} \cdot \frac{m.n^{m-1}}{2}$$
$$+ \mathfrak{B} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)n^{m-3}}{2.3.4}$$
$$+ \mathfrak{C} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)n^{m-5}}{2.3.4.5.6}$$
$$+ \mathfrak{D} \cdot \frac{m(m-1).....(m-6)n^{m-7}}{2.3.4.5.6.7.8}$$
$$+ \mathfrak{E} \cdot \frac{m(m-1).....(m-8)n^{m-9}}{2.3...9.10}$$
$$+ \mathfrak{F} \cdot \text{u. s. w.}$$

wo $\mathfrak{A} = + \frac{1}{6}$, $\mathfrak{B} = - \frac{1}{30}$; $\mathfrak{C} = + \frac{1}{42}$ ist.

Und nun kann $\mathfrak{D}$ auf folgende Art gefunden werden. Man setze in dieser Formel $m = 8$, und $n = 1$; so ist $s = 1 =$ dem ersten Gliede in der Reihe der 8ten Potenzen der natürlichen Zahlen; folglich ist, wenn man auch für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die schon bekannten Werthe setzet,

$$1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot 4 - \frac{1}{30} \cdot 14 + \frac{1}{42} \cdot \frac{28}{3} + \mathfrak{D}$$

eine Gleichung, woraus $\mathfrak{D} = - \frac{1}{30}$ folget.

Und darauf kann auch $\mathfrak{E}$ bestimmet werden, wenn man für

$A$, $B$, $C$ und $D$ die schon bekannten Werthe substituiret, und $m = 10$, $n = 1$ und $s = 1$ setzet, um eine Gleichung zu erhalten, woraus $C = + \frac{5}{66}$ folget. Sodann findet man auf die nähmliche Art $F = - \frac{691}{2730}$, wenn man $m = 12$, $n = 1$, und $s = 1$ setzet u. s. w.

Aus dieser allgemeinen Formel folget das summatorische Glied für die natürlichen Quadratzahlen $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ wie im §. 239; für die Cubikzahlen $= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$ wie im §. 246; für die Biquadratzahlen $= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$ u. s. w.

## §. 317.

Setzet man nun in der allgemeinen Summenformel (§. 316) die Zahl der Glieder $n = \infty$, so verschwinden in dieser Summenformel alle Glieder in Rücksicht des ersten; weil solches ein unendlich großes eines höheren Ranges ist; folglich ist $s = \frac{1}{m+1} \cdot \infty^{m+1} =$ der Summe aller Glieder einer unendlichen Reihe der $m^{ten}$ Potenzen der natürlichen Zahlen. Z. B.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdot\cdot \infty^2 = \tfrac{1}{3}\infty^3$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdot\cdot \infty^3 = \tfrac{1}{4}\infty^4$$
$$1^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} + \cdot\cdot \infty^{\frac{1}{2}} = \tfrac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$$

Anmerkung. Wenn bey der Anwendung der Analysis des Unendlichen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben unendlich große Größen in Rücksicht einer andern unendlich großen Größe eines höhern Ranges, oder auch endliche Größen in Rücksicht einer unendlich großen weggelassen werden; so ist da immer in einem solchen Gliede, auch im Nenner, eine unendlich große Größe befindlich, so daß eigentlich bey der Anwendung jederzeit nur unendlich kleine Größen in Rücksicht endlicher weggelassen werden, wie es zum Theil schon aus §. 310 bis 313 zu ersehen ist. Z. B. (im §. 313, II.) ist

$$s = \frac{a(2b+d)n+adn^2}{2b[b+d][b+dn][b+(n+1)d]} = \frac{ad+a(2b+d):n}{2b(b+d)(d+b:n)(d+d:n+b:n)},$$

wo offenbar für $n = \infty$ die Summe $s = \frac{ad}{2b(b+d)\,.\,d\,.\,d}$

$= \frac{a}{2bd(b+d)}$ wird. Auf solche Art könnten überhaupt in allen Fällen bey der Anwendung der Analysis die verschiedenen Ordnungen des Unendlichen vermieden werden; welches aber unnöthig wäre, da eben diese verschiedenen Ordnungen bloß wegen Abkürzung der arithmetischen Arbeiten eingeführt sind. Nur muß man dabey immer die gehörige Aufmerksamkeit anwenden, damit die unendlich kleinen Größen in Rücksicht endlicher, oder endliche Größen in Rücksicht unendlich großer, und so auch unendlich große in Rücksicht anderer eines höhern Ranges nicht zu voreilig hinweggelassen werden. Wenn man z. B. bey einer arithmetischen Untersuchung findet, eine gesuchte Größe sey

$$z = \frac{a}{\infty} \times (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + - \ldots \text{ohne Ende})$$

so ist $z = \frac{a}{\infty} . (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots)$

$$- \frac{a}{\infty} . (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \ldots)$$

Nun ist die Summe der ersten Reihe $= \infty^2$, wenn man (im §. 234, Nr. 6) $a = 1$, $d = 2$, und $n = \infty$ setzet; und die Summe der zweyten Reihe ist $= \infty + \infty^2$, wegen $a = 2$, $d = 2$, $n = \infty$; daher ist $z = \frac{a}{\infty} . \infty^2 - \frac{a}{\infty} . (\infty + \infty^2) = -a$.

Würde man hier bey der Summirung der zweyten Reihe $\infty$ in Rücksicht $\infty^2$ gleich weglassen; so wäre sodann $z = \frac{a}{\infty} . 0$, und die Summe der unendlichen Reihe $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + - \ldots$ wäre daher $= 0$, welches nicht seyn kann; $\infty$ darf hier in Rücksicht $\infty^2$ nicht weggelassen werden, weil die zwey mit $\infty^2$ bezeichneten Größen bey der ersten und zweyten Summe, wegen der entgegen gesetzten Zeichen, einander aufheben.

Wenn man $(1 + x)^{-2}$ (nach §. 299) in eine unendliche Reihe auflöset, oder auch $(1 + x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+2x+x^2}$ $= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + - \ldots$ mittelst der Division entwickelt, und sodann $x = 1$ setzet; so scheinet $(1 - 2$

$+ 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + - \ldots$ ohne Ende) $= \frac{1}{4}$ zu seyn. Allein es ist wohl zu merken, daß bey einer steigenden Reihe, in welche eine gewisse Größe, entweder durch die Division, oder sonst auf eine andere Art aufgelöset worden, jederzeit noch ein Rest zu der Summe aller Glieder hinzuzusetzen sey, um eine wahre Gleichheit zu erhalten. Nur bey einer fallenden unendlichen Reihe kann man sagen, daß sie der Größe vollkommen gleich sey, aus der sie entsteht; weil der Rest bey einer solchen Reihe immer kleiner wird, jemehr Glieder man entwickelt, und endlich gar verschwindet, wenn die Reihe ins Unendliche fortgesetzet wird.

Man findet z. B., wenn $\frac{1}{3-1}$ durch die Division in die unendliche Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots$ aufgelöset wird, daß der Rest nach zwey Gliedern $= \frac{1}{2.(3)^2}$, nach drey Gliedern $= \frac{1}{2.(3)^3}$, nach vier Gliedern $= \frac{1}{2.(3)^4}$, nach $n$ Gliedern $= \frac{1}{2.(3)^n}$, und folglich nach $\infty$ Gliedern $= \frac{1}{(2.3)^\infty}$; nähmlich man findet, daß dieser Rest in Rücksicht einer endlichen Größe $= 0$ sey. Bey den wachsenden Reihen ist das Gegentheil; da wird der Rest immer größer, und endlich $= \infty$, wenn die Reihe ohne Ende fortgesetzet wird.

Wenn man z. B. $\frac{1}{1+2}$ durch die Division in die unendliche Reihe $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + - \ldots$ auflöset; so findet man den Rest nach $n$ Gliedern $= \frac{(-2)^n}{1+2} = \frac{(-2)^n}{3}$; und folglich nach $\infty$ Gliedern $= \frac{(-2)^\infty}{3}$; nähmlich unendlich groß. Eben dieses ist bey einer unendlichen Reihe von gleichen Gliedern zu beobachten; man findet z. B. daß $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ sich durch die Division in folgende Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots$ auflösen lasse, von der man nur sagen

kann, sie sey $= \frac{1}{2}$, wenn man den Rest hinzufüget, der unverändert, und immer $= + \frac{1}{2}$ oder $= - \frac{1}{2}$ ist; je nachdem man die Reihe entweder bey einer geraden, oder bey einer ungeraden Anzahl der Glieder endiget.

## §. 318.

Auch die Summe der $m^{ten}$ Potenzen einer jeden arithmetischen Reihe läßt sich nach den bisher angeführten Gründen bestimmen. Es ist nähmlich von der Reihe

$a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m + \ldots + z^m$,

wenn man die Summe aller Glieder $= s$ setzet,

$$s = \frac{z^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)b} + \tfrac{1}{2}(z^m + a^m)$$
$$+ \mathfrak{A} \cdot \frac{mb}{2}(z^{m-1} - a^{m-1})$$
$$+ \mathfrak{B} \cdot \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2.3.4}(z^{m-3} - a^{m-3})$$
$$+ \mathfrak{C} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-4)b^5}{2.3.4.5.6}(z^{m-5} - a^{m-5})$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. (die sogenannten Bernoullischen Zahlen) die nähmlichen Werthe haben, wie im §. 316, nähmlich $\mathfrak{A} = + \frac{1}{6}$, $\mathfrak{B} = - \frac{1}{30}$, $\mathfrak{C} = + \frac{1}{42}$, $\mathfrak{D} = - \frac{1}{30}$, $\mathfrak{E} = + \frac{5}{66}$, $\mathfrak{F} = - \frac{691}{2730}$, $\mathfrak{G} = + \frac{7}{6}$, $\mathfrak{H} = - \frac{3617}{510}$, u. s. w.

1) Denn wenn man das erste Glied der angeführten arithmetischen Reihe mit $A$, das zweyte mit $B$, das dritte mit $C$, das vierte mit $D$, und das fünfte $(a + 4b)$, welches wir hier bey der Erwägung für das letzte annehmen wollen, mit $z$ bezeichnet; so ist (vermöge §. 299)

$a^m = A^m$
$(a+b)^m = (A+b)^m = A^m + m A^{m-1} b$
$\quad + \frac{1}{2} m(m-1) A^{m-2} b^2 + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) A^{m-3} b^3 + \ldots = B^m$
$(a+2b)^m = (B+b)^m = B^m + m B^{m-1} b$
$\quad + \frac{1}{2} m(m-1) B^{m-2} b^2 + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) B^{m-3} b^3 + \ldots = C^m$

$(a+3b)^m=(C+b)^m=C^m+mC^{m-1}b$
$+\frac{1}{2}m(m-1)C^{m-2}b^2+\frac{1}{6}m(m-1).(m-2)C^{m-3}b^3+..=D^m$
$(a+4b)^m=(D+b)^m=D^m+mD^{m-1}b$
$+\frac{1}{2}m(m-1)D^{m-2}b^2+\frac{1}{6}m(m-1).(m-2)C^{m-3}b^3+..=z^m.$

2) Daraus folgt, wenn man für $D^m$, $C^m$, $B^m$, $A^m$ die gleichgeltenden Werthe setzt,

$z^m=mD^{m-1}b+\frac{1}{2}m(m-1)D^{m-2}b^2+...$
$+mC^{m-1}b+\frac{1}{2}m(m-1)C^{m-2}b^2+...$
$+mB^{m-1}b+\frac{1}{2}m(m-1)B^{m-2}b^2+...$
$+mA^{m-1}b+\frac{1}{2}m(m-1)A^{m-2}b^2+...$
$+a^m$

3) Und ferner, wenn man $(m+1)$ statt $m$ in Nr. 2 setzet,

$$\frac{z^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)b}=A^m+B^m+C^m+D^m+z^m-z^m$$
$$+\tfrac{1}{2}mb(A^{m-1}+B^{m-1}+D^{m-1}+z^{m-1}-z^{m-1})$$
$$+\tfrac{1}{6}m(m-1)b^2(A^{m-2}+.....-z^{m-2})$$
$$+\tfrac{1}{24}m(m-1)(m-2)b^3(A^{m-3}+.....)$$
$$+.....$$

4) Nun bezeichne man die Summe der $m^{ten}$ Potenzen aller Glieder mit $S^m$, die Summe der $(m-1)^{ten}$ Potenzen mit $S^{m-1}$, der $(m-2)^{ten}$ Potenzen mit $S^{m-2}$ u. s. w.; so folget aus Nr. 3

$$S^m=\frac{z^{m+1}-a^{m+1}}{(m+1)b}+z^m$$
$$+\tfrac{1}{2}mbz^{m-1}-\tfrac{1}{2}mbS^{m-1}$$
$$+\tfrac{1}{6}m(m-1)b^2z^{m-2}-\tfrac{1}{6}m(m-1)b^2S^{m-2}$$
$$+\tfrac{1}{24}m(m-1)(m-2)b^3z^{m-3}-...$$

5) Jetzt setze man $(m-1)$, sodann $(m-2)$, ferner $(m-4)$, $(m-6)$ u. s. f. statt $m$ in Nr. 4; so wird man Summenformeln $S^{m-1}$, $S^{m-2}$, $S^{m-4}$ für die $(m-1)$, $(m-2)$, $(m-4)^{ten}$ Potenzen erhalten; darauf muß man für $S^{m-1}$ in Nr. 4 einen solchen Werth substituiren; dadurch wird dort $S^{m-1}$ weggeschaffet werden. Sodann wird in dieser letztlich erhaltenen Summenformel statt $S^{m-2}$ der hier bemerkte gleiche Werth substituiret u. s. w. Setzet man nun auf diese Art die Arbeit fort, so wird allmählig die obenangeführte Summenformel zum Vorschein kommen.

## §. 319.

Nimmt man (im §. 318) den Exponenten $m$ negativ, und denkt sich die Reihe ohne Ende fortgesetzt; so erhält man von nachstehender unendlichen Reihe

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+b)^m} + \frac{1}{(a+2b)^m} + \frac{1}{(a+3b)^m} + \ldots;$$

die Summe aller Glieder

$$s = \frac{1}{(m-1)\,a^{m-1}\,b} + \frac{1}{2\,a^m} + \frac{1}{6}\cdot\frac{mb}{2\,a^{m+1}}$$
$$- \frac{1.}{30}\,\frac{m\,(m+1)(m+2)\,b^3}{2.3.4.a^{m+3}} + \frac{1}{42}\cdot\frac{m\,(m+1)\,.\,.\,(m+4)\,b^5}{2.3.4.5.6a^{m+5}}$$
$$- \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$$

weil die Glieder, wo $\frac{1}{z^{m-1}}$, $\frac{1}{z^m}$, $\frac{1}{z^{m+1}}$ ..... vorkommen, als unendlich kleine Größen verschwinden.

Diese angeführte Summenformel läuft sehr schnell zusammen, sobald $a$ beträchtlich größer ist als $b$, welches in einem jeden Falle sehr leicht erhalten wird, wenn man einige Glieder der summirenden Reihen vorher durch die Addition zusammen zählet. Es sey z. B. die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{14^2} + \ldots$$

zu summiren; so findet man durch die bloße Addition die Summe der ersten vier Glieder $= 0{,}355903$, und sodann mittelst der angeführten Formel die Summe aller übrigen Glieder $= 0{,}055328$, wenn man $a = 10$, $b = 2$, $m = 2$ setzet, und nur fünf Glieder der angeführten Summenformel entwickelt. Es ist daher die Summe der vorgelegten unendlichen Reihe $= 0{,}355903 + 0{,}055328 = 0{,}411231\ldots$.

Es ist leicht einzusehen, daß man von einer solchen Reihe auch eine bestimmte Anzahl der Glieder, z. B. die ersten 1000 summiren könne; denn wenn man zuerst die Summe aller Glieder, und sodann die Summe vom 1001ten Gliede angefangen, mittelst der angeführten Formel suchet; so wird deren Differenz die Summe der ersten 1000 Glieder seyn.

# Siebente Vorlesung.

## Von den höheren Gleichungen.

### Von den Eigenschaften und der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen.

§. 320.

Was eine verwickelte höhere Gleichung sey, ist schon oben (§. 213) gesagt worden; nur kömmt hier noch anzumerken, daß eine verwickelte höhere Gleichung, in welcher alle Potenzen der unbekannten Größe, von der ersten bis zur höchsten anzutreffen sind, eine vollständige höhere Gleichung genannt wird. Fehlet hingegen in der Gleichung irgend eine Potenz von der unbekannten Größe, so ist es eine unvollständige höhere Gleichung. So ist z. B. $x^3 - 4x^2 + 3x = 12$ eine vollständige cubische Gleichung; hingegen ist $x^4 - 5x^3 + 25x = 125$ eine unvollständige Gleichung des vierten Grades; weil darin die zweyte Potenz der unbekannten Größe abgehet.

§. 321.

Das erste, was bey der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen zu beobachten kommt, ist, daß man selbe ordne; das heißt:

1) Daß man alle Glieder der Gleichung auf eine Seite schaffe, damit sich auf der andern bloß 0 befindet; nähmlich, daß die Gleichung auf 0 gebracht werde.

2) Daß man die Glieder der Gleichung also stelle, daß in dem ersten Gliede die höchste Potenz der unbekannten Größe ohne Nenner und Coefficienten mit dem positiven Zeichen sich befinde.

3) Daß in den folgenden Gliedern die immer um eine Einheit niedrigeren Potenzen der unbekannten Größe mit ihren Zeichen und Coefficienten folgen; und daß im letzten Gliede sich die unbekannte Größe nicht mehr befindet; denn sonst könnte die ganze Gleichung durch selbe dividiret werden, wodurch die Gleichung um einen Grad vermindert wird.

4) Daß bey einer unvollständigen höheren Gleichung die Stellen, wo die Glieder der abgängigen Potenzen der unbekannten Größe hingehören, mit einem Zeichen z. B. mit einem Sternchen * besetzet werden.

5) Sollten sich in der Gleichung Glieder befinden, worin die unbekannte Größe mit einem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten behaftet ist; so schaffe man diese Glieder auf die eine, und alle anderen rationalen Glieder auf die andere Seite des Gleichheitszeichen; sodann erhebe man beyde Theile der Gleichung zur Potenz des Wurzelexponenten; dadurch werden die Wurzelzeichen, oder gebrochenen Exponenten aus der Gleichung fortgeschaffet, wo sodann dieselbe nach dem erst Gesagten geordnet werden kann.

## Beyspiele.

I. Die Gleichung $\frac{4x^2 - 2x^3}{3} = 8 - 5x$ geordnet

gibt $x^3 - 2x^2 - \frac{15}{2}x + 12 = 0.$

II. Die Gleichung $100 - 20x^2 = \frac{500}{x} - 4x^3$ geordnet

gibt $x^4 - 5x^3 * + 25x - 125 = 0.$

Da nähmlich hier die zweyte Potenz von $x$ abgehet, so wird die Stelle mit einem Sternchen bezeichnet.

II. Wäre die Gleichung $10x - \sqrt{12x} = 2x^2$ zu ordnen,

so ist $10x - 2x^2 = \sqrt{12x}$

und $100x^2 - 40x^3 + 4x^4 = 12x$ (§. 137, Nr. 1)

endlich $x^3 - 10x^2 + 25x - 3 = 0.$

IV. Ingleichen, es sey zu ordnen $2 - \sqrt{3x} = \sqrt[3]{2x^2}$;

so ist $8 - 12\sqrt{3x} + 18x - \sqrt{27x^3} = 2x^2,$

und $8 + 18x - 2x^2 = 12\sqrt{3x} + \sqrt{27x^3},$

ferner $64 + 288x + 292x^2 - 72x^3 + 4x^4 = 432x + 216x^2 + 27x^3$

endlich $x^4 - \frac{99}{4}x^3 + 19x^2 - 36x + 16 = 0$.

Es kann demnach jede geordnete höhere Gleichung durch die Formel

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + k = 0$$

vorgestellet werden. So ist im Beyspiele I. wenn man es mit dieser Formel vergleichet, $m = 3$, $a = -2$, $b = -\frac{15}{2}$, $c, d, e \ldots = 0$, und $k = 12$. Vergleicht man hingegen das Beyspiel II. mit dieser Formel; so ist $m = 4$, $a = -5$, $b = 0$, $c = 25$, $d, e, f \ldots\ldots = 0$, und $k = -125$.

## §. 322.

Derjenige Werth, welchen man in einer geordneten höheren Gleichung statt der unbekannten Größe setzen kann, damit sich alle Glieder wechselweise tilgen, und $= 0$ werden, wird eine Wurzel der Gleichung genannt; so ist z. B. in der Gleichung $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$, eine Wurzel $= 3$; weil 3 für $x$ in der Gleichung gesetzt richtig 0 zum Vorschein bringet. Eben so sind auch die Zahlen 7 und $-1$, Wurzeln dieser Gleichung, weil diese Zahlen statt $x$ gesetzt, ebenfalls der Gleichung ein Genüge leisten. Man sieht hieraus, daß eine höhere Gleichung mehr als eine Wurzel haben könne. Wie viel aber derley Wurzeln vorhanden seyn müssen, und wie solche gefunden werden können, wird erst weiter unten gezeiget werden.

## §. 323.

Wenn man eine einfache Gleichung, die auf Null gebracht ist, z. B. $x - a = 0$ mit einem binomischen Factor von der Form $(x - b)$ multipliciret; so erhält man

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b \\ \hline x^2 - a \\ \quad - b \end{array} \Big\} x \quad + ab = 0$$

eine quadratische Gleichung, worin sowohl $a$, als auch $b$ die Wurzel seyn kann; weil jedes für $x$ gesetzt der Gleichung Genüge leistet.

Multipliciret man diese erhaltene Gleichung abermahl mit einem binomischen Factor $x - c$, so erhält man

$$\left.\begin{matrix} x^3 - a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +ab \\ x^2 + ac \\ +bc \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -abc = 0 \\ x \end{matrix}\right.$$

eine cubische Gleichung, wovon $a$, oder $b$, oder auch $c$ die Wurzel seyn kann.

Multipliciret man diese Gleichung wieder mit $x - d$, so erhält man

$$\left.\begin{matrix} x^4 - a \\ -b \\ -c \\ -d \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ x^3 + ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -abc \\ -abd \\ x^2 - acd \\ -bcd \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +abcd = 0 \\ x \end{matrix}\right.$$

eine vollständige Gleichung des vierten Grades, wovon $a$, $b$, $c$, $d$ die Wurzeln sind; nähmlich $x = a$, oder $x = b$, oder $x = c$, oder endlich $x = d$.

### Beyspiele.

I. $(x-3)(x-5)(x-6)(x+10)=0$
gibt $x^4 - 4x^3 - 77x^2 + 540x - 900 = 0$, wovon 3, 5, 6, $-10$ die Wurzeln sind.

II. $(x+3)(x+6)(x-9)=0$ gibt
$x^3 - 63x - 162 = 0$, wovon $-3$, $-6$, $+9$, die Wurzeln sind.

III. $(x+\sqrt{-3})(x-4)(x-\sqrt{-3})=0$ gibt
$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$, wovon 4, $\sqrt{-3}$, und $-\sqrt{-3}$ die Wurzeln sind.

IV. $(x-2+\sqrt{5})(x+1)(x-4)(x-2)(x-2-\sqrt{5})=0$ gibt
$x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 34x - 8 = 0$, wovon $2-\sqrt{5}$, $-1$, $+4$, $+2$, $2+\sqrt{5}$ die Wurzeln sind.

### §. 324.

Man kann sich daher bey jeder geordneten höheren Gleichung vorstellen, daß solche aus so vielen binomischen Factoren durch die Multiplication zusammengesetzt sey, als der höchste Exponent in der Gleichung Einheiten enthält, und wo der be-

kannte Theil eines jeden binomischen Factors mit verändertem Zeichen genommen, eine Wurzel der Gleichung ist. Betrachtet man ferner aufmerksam die im §. 323 angeführten, und mehr dergleichen durch die Multiplication verschiedener Factoren zusammengesetzte geordnete höhere Gleichungen, so wird man dabey sehr leicht folgende Eigenschaften entdecken.

1. Jede höhere Gleichung hat so viele Wurzeln, als der höchste Exponent Einheiten enthält. Unter diesen Wurzeln können einige positiv, andere negativ; einige rational, andere irrational; einige wirklich oder möglich, andere nur eingebildet oder unmöglich seyn. Auch können einige dieser Wurzeln einander vollkommen gleich seyn.

2. Ist einmahl eine Wurzel der Gleichung bekannt, so muß sich die Gleichung durch ein Binomium, wovon die unbekannte Größe $x$ der erste Theil, und die bekannte Wurzel mit verkehrtem Zeichen der andere Theil ist, genau dividiren lassen, und der Quotient ist abermahl $= 0$, und man erhält dadurch eine um einen Grad niedrigere, geordnete höhere Gleichung.

3. In jeder geordneten höheren Gleichung ist der Coefficient des zweyten Gliedes gleich der Summe aller Wurzeln, aber mit entgegengesetzten Zeichen; fehlet demnach das zweyte Glied in der Gleichung, wie im Beyspiele II. (§. 323), so muß die Summe der positiven der Summe der negativen Wurzeln gleich seyn.

4. Der Coefficient des dritten Gliedes ist gleich der Summe der Producte aus je zwey und zwey Wurzeln mit ihren zugehörigen Zeichen; und der Coefficient des vierten Gliedes ist gleich der Summe der Producte aus jeder Verbindung der Wurzeln zu dreyen, aber mit verkehrten Zeichen u. s. w.

5. Das letzte Glied endlich ist das Product aus allen Wurzeln, und hat das zugehörige Zeichen, wenn der höchste Exponent der unbekannten Größe eine gerade Zahl ist; im Gegentheil hat es das entgegengesetzte Zeichen.

6. Wenn eine geordnete höhere Gleichung keine unmöglichen Wurzeln enthält; so kann die unbekannte Größe so viel positive Werthe, als Abwechslungen der Zeichen $+-$ oder $-+$,

und eben so viele negative Werthe haben, als Folgen der Zeichen + +, oder — — in der Gleichung vorhanden sind.

7. Wenn in einer geordneten Gleichung unmögliche Wurzeln sich befinden, wie im Beyspiele III.; so müssen solche in gerader Anzahl darinnen befindlich, und allzeit zwey davon nur bloß in den Zeichen + und — verschieden seyn. Das erste erhellet daraus, weil eine ungerade Anzahl unmöglicher Größen gar kein mögliches Product geben kann; enthielte demnach eine Gleichung eine ungerade Anzahl unmöglicher Wurzeln; so müßte das letzte Glied der Gleichung, als das Product von allen Wurzeln, auch eine unmögliche Größe seyn, welches wider unsere Voraussetzung ist, da wir die Gleichung schon geordnet annehmen. Das zweyte ist ebenfalls leicht einzusehen; denn würden nicht immer zwey und zwey unmögliche Wurzeln einander gleich, und nur in den Zeichen verschieden seyn; so müßten sie in dem zweyten Gliede der Gleichung erscheinen, welches vermöge Nr. 2 die Summe aller Wurzeln enthält; und dann wäre die Gleichung wieder nicht geordnet.

8. Jede geordnete höhere Gleichung, deren höchster Exponent eine ungerade Zahl ist, enthält demnach wenigstens eine mögliche Wurzel; die übrigen können theils möglich, theils unmöglich seyn. Hingegen kann eine geordnete Gleichung, deren höchster Exponent eine gerade Zahl ist, entweder lauter unmögliche, oder lauter mögliche, oder auch theils mögliche, theils unmögliche Wurzeln enthalten, unter der Bedingung in Nr. 7.

§. 325.

Es ist daher sehr leicht zu untersuchen, ob eine geordnete höhere Gleichung, deren Coefficienten und letztes Glied ganze Zahlen sind, rationale Wurzeln enthalte; weil dergleichen Wurzeln unter den Factoren des letzten Gliedes enthalten seyn müssen (§. 324, Nr. 5). Man zerlege demnach das letzte Glied in seine Factoren (§. 70), und substituire einen Factor nach dem andern statt der unbekannten Größe in der Gleichung; und zwar können alle Factoren positiv genommen werden, wenn man (nach § 324, Nr. 6) vermuthet, daß alle Wurzeln der Gleichung positiv seyn müssen. Sollte man aber vermuthen, daß alle

Wurzeln negativ seyn müssen; so können die Factoren negativ statt $x$ in der Gleichung substituiret werden; hingegen müssen alle diese Factoren positiv und auch negativ statt $x$ genommen werden, wenn die Gleichung positive und negative Wurzeln haben kann. Soll nun die Gleichung rationale Wurzeln enthalten, so müssen solche unter diesen Factoren enthalten seyn; und zwar diejenigen Factoren, welche statt der unbekannten Größe in der Gleichung gesetzt Null zum Vorschein bringen, sind die gesuchten rationalen Wurzeln.

### Beyspiele.

I. Es sollen die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$$

gefunden werden. Die Factoren des letzten Gliedes 12, sind 1, 2, 3, 4, 6, 12; und weil man hier, wegen der Abwechslung aller Zeichen, lauter positive Wurzeln vermuthet (§. 324, Nr. 6); so versuche man diese Factoren, positiv genommen, einen um den andern in der Gleichung statt $x$ zu substituiren; und man findet, daß 1, 2 und 6 der Gleichung Genüge leisten. Es ist daher $x = 1$, oder $x = 2$, oder auch $x = 6$.

II. Es sollen die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + 10x^2 + 31x + 30 = 0$$

gefunden werden. Die Factoren des letzten Gliedes 30, sind 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Da aber hier wegen einerley Zeichen lauter negative Wurzeln vermuthet werden, so versuche man diese Factoren, negativ genommen, in der Gleichung zu substituiren; und man findet, daß $-2$, $-3$ und $-5$ die Wurzeln der Gleichung sind.

III. Es sollen die rationalen Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + 18x^3* - 274x + 255 = 0$$

gefunden werden. Die Factoren des letzten Gliedes sind hier 1, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255; und da sich hier wegen der vorhandenen Zeichen und wegen der Abwechslung derselben positive und negative Wurzeln vermuthen lassen; so müssen diese Factoren, sowohl positiv, als negativ, versucht werden; und man findet, daß $+1$, $+3$, $-5$, $-17$ die gesuchten Wurzeln sind.

Es kann hier noch erinnert werden, daß, wenn eine Gleichung lauter positive, oder lauter negative Wurzeln hat, man nur jene Factoren des letzten Gliedes statt $x$ in der Gleichung substituiren darf, welche den Coefficienten des zweyten Gliedes nicht übersteigen; weil (vermöge §. 324, Nr. 3) das zweyte Glied die Summe aus allen Wurzeln ist. Z. B. in der Gleichung $x^3 - 13x^2 + 54x - 72 = 0$ sind die Factoren des letzten Gliedes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Allein weil die Gleichung lauter positive Wurzeln vermuthen läßt; so können die Factoren 18, 24, 36, 72 ausgelassen werden, weil sie den Coefficienten 13 des zweyten Gliedes übersteigen.

§. 326.

Sollte man durch dieses Verfahren nur einige, aber nicht so viele Wurzeln gefunden haben, als der Gleichung (vermöge §. 324, Nr. 1) zukommen; so ist es ein Zeichen, daß die übrigen Wurzeln entweder irrational, oder unmöglich, oder auch daß solche einigen von den schon gefundenen Wurzeln vollkommen gleich seyn. Man kann aber sodann die Gleichung um so viele Grade vermindern, als schon Wurzeln gefunden sind, wenn man selbe (§. 324, Nr. 2) durch jedes Binomium dividiret, wovon der erste Theil die unbekannte Größe $x$, und der andere schon eine bekannte Wurzel mit geändertem Zeichen ist. Man erhält sodann eine Gleichung von einem so vielten Grade, als noch Wurzeln unbekannt sind. Wären nur noch zwey Wurzeln zu suchen, so geräth man dadurch auf eine quadratische Gleichung, wovon sich (nach §. 215) die zwey übrigen Wurzeln finden lassen. Sollten aber noch mehr als zwey Wurzeln unbekannt verbleiben; so versuche man abermahl die schon gefundenen Wurzeln in der neuen erhaltenen Gleichung zu substituiren, um zu sehen, ob nicht die vorgelegte Gleichung einige gleiche Wurzeln enthalte.

Beyspiele.

I. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$$

gefunden werden. Die Factoren des letzten Gliedes sind 1, 2, 3, 4, 6, 12; man findet aber unter allen diesen Factoren so-

wohl positiv als negativ genommen, keinen andern, als + 4, welcher der Gleichung Genüge leistet. Man dividire deßwegen die vorgelegte Gleichung $x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0$ durch $x - 4$; und man findet nach geschehener Division $x^2 + 3 = 0$. Hieraus ist $x = \pm \sqrt{-3}$. Die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind demnach 4, $+\sqrt{-3}$ und $-\sqrt{-3}$.

II. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 - 34x - 8 = 0$$

gefunden werden. Hier sind die Factoren des letzten Gliedes 1, 2, 4, 8, wovon $-1, +2, +4$ der Gleichung Genüge leisten; und also sind noch 2 Wurzeln abgängig. Man multiplicire demnach die drey Binomien $x + 1$, $x - 2$, $x - 4$ miteinander; das Product hiervon ist $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$, und die vorgelegte Gleichung dadurch dividirt, gibt $x^2 - 4x - 1 = 0$. Hieraus ist (nach §. 215) $x = 2 + \sqrt{5}$ oder $x = 2 - \sqrt{5}$.

III. Es sollen die Wurzeln der Gleichung

$$x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 25x^2 + 8x + 60 = 0$$

gefunden werden. Die Factoren des letzten Gliedes sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; von diesen findet man, daß nur + 2 und − 3 der Gleichung ein Genügen leisten; dividiret man nun die vorgelegte Gleichung durch $x^2 + x - 6$, als durch das Product der Binomien $x - 2$ und $x + 3$; so erhält man $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0$, welches noch eine cubische Gleichung ist. Versuchet man nun die schon gefundenen Wurzeln statt $x$ in dieser erhaltenen Gleichung zu setzen, und zwar nur diejenigen, welche unter den Factoren des letzten Gliedes 10 dieser letzten Gleichung anzutreffen sind; so findet man, daß + 2 abermahl eine Wurzel ist, dividiret man daher diese Gleichung wieder durch $x - 2$, so erhält man $x^2 + 4x + 5 = 0$; woraus (§. 215) gefunden wird $x = -2 + \sqrt{-1}$, oder $x = -2 - \sqrt{-1}$. Die Gleichung hat demnach drey rationale Wurzeln, wovon zwey einander gleich sind, und zwey unmögliche Wurzeln.

Anmerkung. Das bisher (von §. 325) Angeführte findet auch eine nützliche Anwendung, um aus einer zusammengesetzten algebraischen Größe, worin verschiedene Potenzen eines nähm-

lichen Buchstabens sich befinden, die mehrnahmigen Factoren zu bestimmen, und zwar auf folgende Art:

1. Man dividire alle Glieder der vorgegebenen Größe durch jene einnahmigen Factoren, welche allen Gattungen gemein sind.

2. Den übrigen mehrnahmigen Factor, worin die Glieder keinen Buchstaben mehr gemein haben, setze man $= 0$; nähmlich man sehe selben für eine höhere Gleichung an, woraus diejenige Größe, die in verschiedenen Potenzen erscheint, gesucht werden soll; daher man nur einen solchen algebraischen Ausdruck, als eine höhere Gleichung zu ordnen, und überhaupt, wie bisher gesagt worden, zu verfahren hat.

Beyspiele.

I. Es soll die Größe $m^3 - 6m^3 + 11m^2 - 6m$ in Factoren zerlegt werden. Man dividire jedes Glied durch $m$, und setze sodann $m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$. Die Factoren des letzten Gliedes 6 sind 1, 2, 3, 6, und man findet, daß $m = 1$ der Gleichung Genüge leistet; daher ist $m - 1$ ein Factor. Dividiret man nun durch $m - 1$, so erhält man $m^2 - 5m + 6 = 0$; woraus $m = 2$, oder auch $m = 3$ folget. Die Factoren der vorgelegten Größe sind demnach $m$, $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$.

II. Es soll $x^3 + 2x^2 + 2x^2y + xy + xy^2 - 3x - y^2 - 3y$ in Factoren zerlegt werden.

Das letzte Glied, in welchem sich kein $x$ befindet, ist $-(y^2 + 3y)$; die Factoren hiervon sind $y$, und $y + 3$; und man findet, daß $-y$ statt $x$ in der Größe gesetzt, richtig 0 zum Vorschein bringet; mithin ist $x + y$ ein Factor. Dividiret man nun die vorgelegte Größe durch $(x + y)$, so erhält man $x^2 + xy + 2x - y - 3$; dieses $= 0$ gesetzt, gibt (nach §. 215) $x = 1$, oder auch $x = -(y + 3)$. Es sind demnach die gesuchten Factoren $x + y$, $x - 1$, und $x + y + 3$.

§. 327.

Wenn bey einer geordneten Gleichung keiner aus den Factoren des letzten Gliedes so beschaffen ist, daß er, mit dem Zeichen + oder − genommen, der Gleichung Genüge leistet; so kann man sicher schließen, daß die Gleichung keine rationale Wurzel enthalte. Würde man demungeachtet mögliche Wur-

zeln in der Gleichung vermuthen; so müssen selbe ganz gewiß irrationale Größen seyn, die man am füglichsten durch eine Annäherung bestimmen kann. Bevor wir aber diese Annäherung erörtern, wollen wir noch von einigen Verwandlungen, welche mit den Gleichungen vorgenommen werden können, eine Meldung machen.

## §. 328.

**Jede geordnete höhere Gleichung kann in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß alle ihre Wurzeln um eine beliebige Größe vermehret, oder vermindert sind.** So z. B. wird die Gleichung $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$; deren Wurzeln 4, $-1$, $-2$ sind, in eine andere verwandelt, deren Wurzeln um 3 größer sind, wenn $x + 3 = y$; nähmlich $x = y - 3$ gesetzet wird; denn es ist alsdann

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - 9y^2 + 27y - 27 \\ -x^2 & = & -y^2 + 6y - 9 \\ -10x & = & -10y + 30 \\ -8 & = & -8 \\ \hline 0 & = & y^3 - 10y^2 + 23y - 14 \end{array}$$

die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln 7, 2, 1 um 3 größer sind, als die vorhergehenden.

Wollte man nun diese letzte Gleichung in eine andere dergestalt verwandeln, daß jede ihrer Wurzeln um 10 vermindert wäre; so setze man $y - 10 = z$, nähmlich $y = z + 10$; alsdann ist

$$\begin{array}{rcl} y^3 & = & z^3 + 30z^2 + 300z + 1000 \\ -10y^2 & = & -10z^2 - 200z - 1000 \\ +23y & = & +23z + 230 \\ -14 & = & -14 \\ \hline 0 & = & z^3 + 20z^2 + 123z + 216 \end{array}$$

die verwandelte Gleichung, von deren Wurzeln $-3$, $-8$, $-9$, jede um 10 kleiner ist, als die vorhergehenden.

Nun setze man auch in der allgemeinen Formel

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + k = 0$$

$y + p$ statt $x$; so erhält man

$$\left.\begin{array}{rl} x^m = & y^m + mpy^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}p^2y^{m-2} + \ldots + p^m \\ + ax^{m-1} = & ay^{m-1} + a(m-1)py^{m-2} + \ldots + ap^{m-1} \\ + bx^{m-2} = & by^{m-2} + \ldots + bp^{m-2} \\ + \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + k = & + k \end{array}\right\} = 0$$

für die verwandelte Gleichung, in der jede Wurzel um $p$ größer oder kleiner ist, als in der vorhergehenden, je nachdem $p$ negativ oder positiv genommen wird.

## §. 829.

Die letzte Verwandlung biethet uns ein Mittel dar, aus jeder geordneten Gleichung das zweyte Glied hinweg zu schaffen, welches in Folgendem besteht. Man setze statt der unbekannten Größe $x$ in der gegebenen Gleichung eine andere unbekannte Größe $y$, zu welcher der Coefficient des zweyten Gliedes, getheilt durch den höchsten Exponenten, mit entgegengesetztem Zeichen hinzugefüget ist. Denn, wenn in unserer verwandelten Gleichung, die wir aus der allgemeinen Formel hergeleitet haben, das zweyte Glied verschwinden soll; so muß $mpy^{m-1} + ay^{m-1} = 0$; oder $mp + a = 0$, nähmlich $p = -\frac{a}{m}$ seyn; und folglich muß $x = y - \frac{a}{m}$ gesetzet werden.

Sollte man demnach aus folgender Gleichung

$$x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$$

das zweyte Glied hinwegschaffen,

so setze man $x = y + \frac{12}{3} = y + 4$; denn es ist sodann

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 12y^2 + 48y + 64 \\ - 12x^2 = & - 12y^2 - 96y - 192 \\ + 41x = & + 41y + 164 \\ - 42 = & - 42 \\ \hline & y^3 * - 7y - 6 = 0 \end{array}$$

die verwandelte Gleichung, in der das zweyte Glied verschwunden ist. Es ist in dieser Gleichung $y = -2$, oder $y = -1$,

oder endlich $y = 3$. Da nun $x = y + 4$, so ist in der vorhergehenden Gleichung $x = 2$, oder $x = 3$, oder endlich $x = 7$.

Alle verwickelte quadratische Gleichungen können nach dieser Methode in reine Gleichungen verwandelt werden. Z. B. wenn man $x = y - \frac{1}{2}a$ in der Gleichung $(x^2 + ax = b)$ setzet, so wird sie in folgende Gleichung $y^2 - \frac{1}{4}a^2 = b$, das ist, $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + 4b)}$ verwandelt; es ist aber $x = y - \frac{1}{2}a$ gesetzet worden; folglich $x = \frac{-a \pm \sqrt{(a^2+4b}}{2}$.

## §. 330.

Auch gibt uns die im §. 328 angeführte Verwandlung ein Mittel an die Hand, aus einer gegebenen geordneten höheren Gleichung, bloß das letzte Glied einer andern höheren Gleichung herbey zu schaffen, in welcher die Wurzeln um eine beliebige Zahl größer oder kleiner sind, als die in der vorgelegten Gleichung. Denn, da in der aus der allgemeinen Formel abgeleiteten verwandelten Gleichung das letzte Glied die nähmliche Form, wie die vorgelegte Gleichung hat; so setze man in der vorgelegten Gleichung eine positive Größe $p$ statt $x$, und reducire alles gehörig; so wird dieses Resultat das letzte Glied einer neuen Gleichung seyn, in welcher jede Wurzel um $p$ kleiner ist, als in der vorgelegten Gleichung: oder man setze in der vorgelegten Gleichung eine negative Größe $-p$ statt $x$; so wird dieses Resultat das letzte Glied einer neuen Gleichung seyn, in welcher jede Wurzel um $p$ größer ist, als in der vorgelegten. Dieses Mittel leistet uns bey Auflösung einer höheren Gleichung, in der das letzte Glied aus sehr vielen Factoren besteht, einen guten Nutzen. Denn man versuche nur in einem solchen Falle statt $x$ eine solche Zahl $p$ in der gegebenen Gleichung zu substituiren, daß das Resultat sehr wenige Factoren enthalte; löse dieses Resultat in die Factoren auf, addire zu jedem Factor die Zahl $p$, die man statt $x$ gesetzet hat, wenn sie positiv ist, oder ziehe diese Zahl $p$ von jedem Factor ab, wenn sie negativ ist, und versuche sodann, ob diese so gefundene Zahlen der vor-

gelegten Gleichung Genüge leisten. Z. B. wenn man diese Gleichung aufzulösen hätte, $x^4 - 40x^3 + 595x^2 - 3900x + 9504 = 0$, in der das letzte Glied ungemein viele Factoren enthält; so versuche man für $x$ eine solche Zahl zu substituiren, daß das Resultat nur aus sehr wenigen Factoren zusammengesetzet sey; setzet man + 10 statt $x$, so ist das Resultat $= 10000 - 40000 + 59500 - 39000 + 9504 = 4$; die Factoren davon sind 2, 1, — 1, — 2; nun addire man zu jedem Factor 10, weil man diese positive Zahl statt $x$ gesetzet hat; so erhält man die Zahlen 12, 11, 9, 8, deren jede obiger Gleichung ein Genügen leistet.

## §. 331.

Jede geordnete höhere Gleichung kann in eine andere so verwandelt werden, daß jede Wurzel mit einer beliebigen Größe multipliciret ist.

Um dieses zu erhalten, setze man in der allgemeinen Formel

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + k = 0$$

die Größe $\frac{y}{n}$ statt $x$, nähmlich $nx = y$; so erhält man

$$\left(\frac{y}{n}\right)^m + a\left(\frac{y}{n}\right)^{m-1} + b\left(\frac{y}{n}\right)^{m-2} + \ldots + k = 0;$$

oder wenn man beyde Theile der Gleichung mit $n^m$ multipliciret, so hat man

$$y^m + nay^{m-1} + n^2by^{m-2} + n^3cy^{m-3} + \ldots + n^mk = 0$$

für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln man erhält, wenn man die Wurzeln der vorgelegten Gleichung mit $n$ multipliciret; und folglich erhält man auch die Wurzeln der vorgelegten Gleichung, wenn man die Wurzeln dieser verwandelten Gleichung durch $n$ dividiret.

Aus dieser Formel ist zu ersehen, daß man, um die Wurzeln einer geordneten Gleichung mit einer beliebigen Größe $n$ zu multipliciren, nur unter die Glieder der Gleichung eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $= 1$, und der Quotient $= n$ ist, schreiben und sodann die Glieder der Gleichung mit den darunter stehenden Gliedern der Reihe multipliciren soll. Z. B. es sollte die Gleichung $y^3 - 10y^2 + 23y - 14 = 0$, deren Wurzeln 1, 2, 7 sind, in eine andere verwandelt werden, de-

ren Wurzeln dreymahl so groß, als die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind; so schreibe man also

$y^3 - 10y^2 + 23y - 14 = 0$

1 3 9 27, und man erhält

$y^3 - 30y^2 + 207y - 378 = 0$, für die verwandelte Gleichung; in welcher 3, 6, 21 die Wurzeln sind.

Nur muß man nicht vergessen, bey einer unvollständigen Gleichung auch unter die mit einem Sternchen bezeichneten Glieder die dazu gehörigen Glieder der Reihe zu schreiben. Z. B. wenn man diese Gleichung $x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0$ in eine andere Gleichung verwandeln will, in der jede Wurzel dieser gegebenen Gleichung mit 2 multipliciret ist; so schreibe man also

$x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0$

1, 2 4, 8, 16, und man erhält

$x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0$ für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln 2, 4, — 2, — 4 sind. Da nun diese Wurzeln mit 2 multiplicirt sind, so müssen die Wurzeln der vorhergehenden Gleichung 1, 2, — 1, — 2 seyn.

## §. 332.

Diese Verwandlung gibt uns ein Mittel an die Hand, aus jeder geordneten Gleichung die Brüche wegzuschaffen, welches in Folgendem besteht: Man suche eine Zahl auf, die sich durch jeden Nenner, der in der Gleichung befindlichen Brüche genau theilen läßt (§. 84), schreibe unter die Glieder der Gleichung eine geometrische Reihe, deren erstes Glied = 1, und der Quotient der gefundenen Zahl gleich sey; und multiplicire die Glieder der Gleichung mit den dazu gehörigen Gliedern der Reihe; so erhält man eine Gleichung, die von den Brüchen befreyet ist, und deren Wurzeln durch den angenommenen Quotienten der geometrischen Reihe dividiret, die Wurzeln der gegebenen Gleichung zum Vorschein bringen; z. B. um aus der Gleichung

$x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$ die Brüche wegzuschaffen, so schreibe man also $x^3 - \frac{9}{3}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$

$1, \quad 18, \quad (18)^2 \quad (18)^3$

oder auch auf diese Art $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$

$1, \quad 6, \quad 36, \quad 216$

und multiplicire die Glieder der Gleichung mit den darunter stehenden Gliedern der geometrischen Reihe; so erhält man im zweyten Falle $x^3 - 27x^2 + 110x + 336 = 0$ für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln $-2, 8, 21$ sind; nun sind diese Wurzeln nichts anders, als die mit 6 multiplicirten Wurzeln der vorhergehenden Gleichung. Es sind demnach die Wurzeln der gegebenen Gleichung $-\frac{2}{6}, \frac{8}{6}, \frac{21}{6}$, nähmlich $x = -\frac{1}{3}$, oder $x = \frac{4}{3}$, oder endlich $x = \frac{7}{2}$.

§. 333.

Setzen wir $n = \frac{1}{p}$ in der Gleichung $y^m + nay^{m-1} + n^2by^{m-2} + n^3cy^{m-3} + \ldots + n^m k = 0$; so erhalten wir $y^m + \frac{ay^{m-1}}{p} + \frac{by^{m-2}}{p^2} + \ldots + \frac{k}{p^m} = 0$, eine Gleichung, deren Wurzeln mit den Wurzeln der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0$ vollkommen einerley; nur daß sie durch $p$ getheilt sind. Wir ersehen aus diesem, daß man jede geordnete Gleichung dergestalt verwandeln kann, daß alle ihre Wurzeln durch eine beliebige Größe dividiret sind. Durch diese letzte, und die vorhergehende Verwandlung kann man zuweilen aus einer gegebenen Gleichung die irrationalen Coefficienten hinwegschaffen. Z. B. um aus der Gleichung $x^3 - 4x^2\sqrt{3} + 12x - 24\sqrt{3} = 0$ die irrationalen Glieder hinwegzuschaffen, schreibe man unter diese Gleichung folgende geometrische Reihe: $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$, und dividire, oder multiplicire die Glieder der Gleichung mit den dazu gehörigen Gliedern der geometrischen Reihe; in dem einen Falle erhält man $x^3 - 4x^2 + 4x - 8 = 0$, und in dem andern $x^3 - 12x^2 + 36x - 216 = 0$.

§. 334.

Wenn eine geordnete höhere Gleichung, welche den zwey-

ten Grad übersteiget, zwar mögliche, aber irrationale Wurzeln enthalten sollte; so können solche durch eine Annäherung auf folgende Art entwickelt werden.

1) Man substituire in der Gleichung, statt der unbekannten Größe, die positiven natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4.... wenn man in der Gleichung positive Wurzeln vermuthet; sollte man negative Wurzeln vermuthen, so substituire man statt $x$ die negativen Zahlen 0, — 1, — 2, — 3, — 4.... so wird die Zahl, bey der das Resultat das Zeichen ändert, größer, und die ihr vorhergehende Zahl kleiner seyn, als die gesuchte Wurzel. Z. B. es sey aus der Gleichung $x^3 - 3x^2 - 17x + 43 = 0$, welche zwey positive und eine negative Wurzel zu haben scheint, der Werth von $x$ zu bestimmen; so verfahre man auf folgende Art.

| $x$ | Resultate. |
|---|---|
| 0 | 0 0 0 + 43 = + 43 |
| 1 | 1 — 3 — 17 + 43 = + 24 |
| 2 | 8 — 12 — 34 + 43 = + 5 |
| 3 | 27 — 27 — 51 + 43 = — 8 |
| 4 | 64 — 48 — 68 + 43 = — 9 |
| 5 | 125 — 75 — 85 + 43 = + 8 |
| 6 | 216 — 108 — 102 + 43 = + 49 |

Der eine positive Werth von $x$ in der vorgelegten Gleichung ist demnach größer als 2, und kleiner als 3; der andere positive Werth aber ist größer als 4, und kleiner als 5.

2) Nachdem man nun die Zahlen bestimmet hat, zwischen welche eine Wurzel fallen muß; so setze man, daß die gesuchte Wurzel derjenigen Zahl, die das letzte Resultat mit ungeändertem Zeichen gegeben hat, nebst einem Bruch $f$ gleich sey. In unserem Beyspiele setze man also für die erste Wurzel $x = 2 + f$.

3) Nun substituire man diesen Werth in der gegebenen Gleichung statt der unbekannten Größe: in unserem Falle ist nähmlich

$$
\begin{array}{rcl}
x^3 & = & +\ 8 + 12f + 6f^2 + f^3 \\
-\ 3x^2 & = & -\ 12 - 12f - 3f^2 \\
-\ 17x & = & -\ 34 - 17f \\
+\ 43 & = & +\ 43 \\
\hline
0 & = & 5 - 17f + 3f^2 + f^3
\end{array}
$$

Da aber $f$ ein echter Bruch ist, so kann indessen, ohne einen großen Fehler zu begehen, die zweyte und dritte Potenz von $f$ in der Gleichung hinweggelassen werden; und es ist $0 = 5 - 17f$, woraus $f = \frac{5}{17} = 0{,}29$ folget. Es ist demnach in unserer Gleichung $x = 2{,}29$ beynahe.

Erfordern es nun die Umstände der Aufgabe, den Werth von $x$ genauer zu haben, so kann man die Arbeit wiederhohlen; nähmlich man substituire nun $2{,}29 + f$ statt $x$ in der vorgelegten Gleichung, und bestimme den Werth von $x$ auf die jetzt gezeigte Art noch einmahl u. s. w.

Wollte man auf eben diese Art die andere positive Wurzel bestimmen, welche zwischen 4 und 5 fallen muß; und man setzte in der Gleichung $4 + f$ statt $x$, so würde man finden $f = \frac{6}{7}$, ein Zeichen, daß die gesuchte Wurzel viel näher bey 5 als bey 4 liegen muß; nähmlich daß der Bruch, welcher zu 4 addirt werden muß, zu groß ist, als daß man dessen zweyte und dritte Potenz außer Acht lassen dürfte; man substituire deßwegen in der Gleichung $5 - f$ statt $x$, und man findet sodann $f = 0{,}28$ beynahe; und folglich $x = 4{,}72$.

Sollte nun auch die negative Wurzel dieser Gleichung gefunden werden; so setze man

| $x$ | Resultate |
|---|---|
| 0 | $0 \quad 0 \quad 0 + 43 = +\ 43$ |
| $-\ 1$ | $-\ 1 - 3 + 17 + 43 = +\ 56$ |
| $-\ 2$ | $-\ 8 - 12 + 34 + 43 = +\ 57$ |
| $-\ 3$ | $-\ 27 - 27 + 51 + 43 = +\ 40$ |
| $-\ 4$ | $-\ 64 - 48 + 68 + 43 = -\ 1$ |

Es liegt daher die negative Wurzel dieser Gleichung zwischen $-3$ und $-4$; setzet man deßwegen $x = -4 + f$, so findet man $f = 0{,}018$; folglich $x = -3{,}982$.

§. 335.

Es ereignet sich zuweilen auch, daß die Resultate wieder zu wachsen anfangen, nachdem sie ehevor abgenommen hatten. In einem solchen Falle ist gemeiniglich jene Zahl, wo die Resultate wieder zu steigen anfangen, von einer Wurzel der Gleichung um keine ganze Einheit mehr unterschieden; jedoch nur damahls, wenn man mittelst angenommener gebrochener Werthe für die unbekannte Größe die Resultate dem 0 immer näher bringen kann. Z. B. wenn man in der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 21x + 55 = 0$, wie bisher gesagt worden, verfährt, so erhält man

| $x$ | Resultate |
|---|---|
| 0 | 0 0 0 + 55 = + 55 |
| 1 | 1 — 2 — 21 + 55 = + 33 |
| 2 | 8 — 8 — 42 + 55 = + 13 |
| 3 | 27 — 18 — 63 + 55 = + 1 |
| 4 | 64 — 32 — 84 + 55 = + 3 |
| 5 | 125 — 50 — 105 + 55 = + 25 |

Es kann daher eine positive Wurzel dieser Gleichung zwischen 2 und 3, und die andere zwischen 3 und 4, oder auch beyde zwischen 2 und 3, oder endlich beyde zwischen 3 und 4 liegen; jedoch nur unter der Bedingung, daß die Resultate dem 0 sich immer mehr nähern, wenn gebrochene Zahlen, hier $3 \pm \frac{1}{n}$ statt $x$ gesetzet werden. Versuchet man nun in der vorgelegten Gleichung $3\frac{1}{2}$ statt $x$ zu setzen; so ist das Resultat $-\frac{1}{8}$; folglich liegt eine Wurzel der Gleichung zwischen 3 und $3\frac{1}{2}$, und die andere zwischen $3\frac{1}{2}$ und 4; denen man sich wie vorhin nach Belieben nähern kann, wenn man $x = 3\frac{1}{2} + f$, oder $x = 3\frac{1}{2} - f$ setzet, und so wie im §. 334 verfährt.

Sollten aber in einer Gleichung, nachdem man für die unbekannte Größe 0, 1, 2, 3 . . . . . und auch 0, — 1, — 2, — 3 . . gesetzet hat, die Resultate ununterbrochen steigen, ohne das Zeichen zu verändern; so kann man versichert seyn, daß die Gleichung lauter unmögliche Wurzeln enthalte. Z. B. in der Gleichung $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$ findet man, daß die

Resultate ohne Ende steigen, wenn man 0, 1, 2, 3 . . . . oder auch 0, — 1, — 2, — 3, — 4 . . . . statt $x$ setzet; folglich enthält diese Gleichung gar keine mögliche Wurzel.

Auch sind alle Wurzeln unmöglich, wenn die Resultate anfänglich zwar abnehmen, und sodann ohne Ende fortwachsen, dabey aber doch durch angenommene gebrochene Werthe für die unbekannte Größe dem 0 nicht näher gebracht werden können. So z. B. sind in der Gleichung $x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 120x + 101 = 0$ alle vier Wurzeln unmöglich, weil für $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ die Resultate $R = 101, 26, 5, 2, 5, 26, 101 \ldots$ erhalten werden, und zugleich für $x = 3 \pm \frac{1}{n}$ wieder $R > 2$ wird, dabey auch für negative Werthe von $x$ die Resultate ohne Ende fortwachsen.

## §. 336.

Wir können eine allgemeine Näherungsformel für alle geordnete höhere Gleichungen hierher setzen; diese ist folgende:

Wenn eine Wurzel dieser Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \ldots + k = 0$ beynahe gleich $w$ gefunden wird, so ist

$$x = \frac{(m-1)w^m + (m-2)aw^{m-1} + (m-3)bw^{m-2} + (m-4)cw^{m-3} + \ldots - k}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4} + (m-4)dw^{m-5} + \ldots}$$

Nähmlich bey den cubischen Gleichungen $x^3 + ax^2 + bx + k = 0$ ist $x = \frac{2w^3 + aw^2 - k}{3w^2 + 2aw + b}$

Bey den Gleichungen des vierten Grades $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + k = 0$ ist $x = \frac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - k}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw + c}$ u. s. w.

Denn da wir annehmen, daß $w$ von dem wahren Werthe nur noch etwa um einen kleinen Bruch verschieden sey; so ist $x = w + f$, wenn wir diesen Bruch mit $f$ bezeichnen; es ist also auch

$$x^m = w^m + mw^{m-1}f + \frac{m.(m-1)}{1.2} w^{m-2}f^2 + ..$$

$$+ax^{m-1} = aw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2}f + \frac{(m-1).(m-2)}{1.2} aw^{m-3}f^2 + ..$$

$$+bx^{m-2} = bw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3}f + \frac{(m-2).(m-3)}{1.2} bw^{m-4}f^2 + ..$$

$$+cx^{m-3} = cw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4}f + \frac{(m-3).(m-4)}{1.2} cw^{m-5}f^2 + ..$$

. . . . . .

$$+k = k$$

$$0 = 0$$

Da nun beyde Theile der Gleichung $= 0$ sind, und alle Potenzen des Bruches $f$, außer der ersten, ohne einen großen Fehler zu begehen, hinweggelassen werden können; so ist

$$0 = w^m + aw^{m-1} + bw^{m-2} + . . + k + f.[mw^{m-1} + (m-1).aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + . . .]$$

$$\text{folglich } f = \frac{-w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - . . . . . - k}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + . .}$$

$$\text{und } x = w + \frac{-w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - . . . . . - k}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + . .}$$

woraus endlich, wenn man hier alles auf einen gleichen Nenner bringet, und gehörig reduciret, die obenangeführte Formel folget.

Es sey z. B. aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$, der Werth von $x$ zu bestimmen. Nun findet man (vermöge §. 334, Nr. 1) das $x$ beynahe $= 3$ sey; vergleicht man daher dieses Beyspiel mit der Näherungsformel der cubischen Gleichungen; so ist $w = 3$, $a = -12$, $b = 57$, und $k = -94$; folglich

$$x = \frac{54 - 108 + 94}{27 - 72 + 57} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3{,}33 \text{ beynahe.}$$

Um $x$ genauer zu finden, kann man nun in der nähmlichen Formel $w = 3{,}33$ setzen, wodurch $x = 3{,}3622$ schon um Vieles genauer bestimmet wird u. s. w.

Ingleichen aus der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ sollen die Werthe von $x$ gefunden werden. Um diese zu bestimmen, setze man

| $x$ | Resultate |
|---|---|
| 0 | 0 0 0 — 109 = — 109 |
| 1 | 1 — 15 + 72 — 109 = — 51 |
| 2 | 8 — 60 + 144 — 109 = — 17 |
| 3 | 27 — 135 + 216 — 109 = — 1 |
| 4 | 64 — 240 + 288 — 109 = + 3 |
| 5 | 125 — 375 + 360 — 109 = + 1 |
| 6 | 216 — 540 + 432 — 109 = — 1 |
| 7 | 343 — 735 + 504 — 109 = + 3 |
| 8 | 512 — 960 + 576 — 109 = + 19 |

so findet man, daß der eine Werth von $x$ beynahe $= 3$, der zweyte beynahe $= 5$, und der dritte Werth endlich beynahe $= 6$ sey. Wir wollen den ersten Werth von $x$ durch die angeführte Näherungsformel bestimmen; es ist nähmlich in diesem Falle $w = 3$, $a = -15$, $b = 72$, und $k = -109$; folglich

$$x = \frac{54 - 135 + 109}{27 - 90 + 72} = \frac{28}{9} = 3{,}11 \text{ beynahe.}$$

Setzen wir nun $w = 3{,}11$; so ist

$$x = \frac{60{,}160462 - 145{,}0815 + 109}{29{,}0163 - 93{,}3 + 72} = \frac{24{,}078962}{7{,}7163}$$

$= 3{,}1205$ schon sehr genau. Wäre es erforderlich, den Werth von $x$ noch genauer zu haben; so müßte man nun $w = 3{,}1205$ setzen, und dann würde man $x = 3{,}1206148$ erhalten.

Um die zwey übrigen Werthe von $x$ zu finden, setze man in der Näherungsformel einmahl $w = 5$, und dann $w = 6$; oder auch man dividire die vorgelegte Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ durch $(x - 3{,}1206 = 0)$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 - 11{,}8794x + 34{,}92914 = 0$, in der $x = 5{,}9397 \pm \sqrt{[(5{,}9397)^2 - 34{,}92914]}$; nähmlich $x = 5{,}3473$, oder $x = 6{,}5321$ ist; es sind demnach die Wurzeln der vorgelegten Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ folgende Zahlen; 3,1206; 5,3473 und 6,5321.

Auf die nähmliche Art findet man die Wurzeln folgender Gleichung $x^4 * - 20x^2 - 12x + 13 = 0$, wenn man in der Näherungsformel der Gleichungen vom vierten Grade $a = 0$, $b = -20$, $c = -12$, $k = 13$, und $w = 1$, oder $w = 5$,

$w = -1$, $w = -4$ setzet; denn wenn 0, 1, 2, 3, 4, 5 und auch 0, — 1, — 2, — 3, — 4, — 5 für $x$ substituiret wird; so zeigt sichs, daß $w$ diese Werthe habe. Man erhält nach gehöriger Reduction $x = 0{,}563$; oder $x = 4{,}687$; oder $x = -1{,}223$; oder endlich $x = -4{,}027$.

## §. 337.

Wir können bey dieser Gelegenheit auch eine Näherungsformel für die Ausziehung was immer für einer Wurzel aus jeder vorgegebenen Zahl hierher setzen; diese ist folgende:

Wenn aus einer Zahl $x$ die Wurzel $m$ zu ziehen wäre, und es ist schon beynahe $\sqrt[m]{x} = w$, welches man entweder durch Hülfe der Logarithmen, oder sonst auf eine andere Art schon bestimmet hat; so ist

$$\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w \cdot (x - w^m)}{(m+1) \cdot w^m + (m-1) \cdot x}$$ sehr genau.

Denn es sey der kleine Bruch $= f$, den man zu $w$ noch hinzufügen muß, um $\sqrt[m]{x} = w + f$, zu erhalten; so ist auch $x = (w + f)^m$; nähmlich

$$x = w^m + mw^{m-1} f + \frac{m(m-1)}{1.2} w^{m-2} f.f + \ldots$$

folglich $f = \frac{x - w^m}{mw^{m-1}}$ ziemlich genau,

oder $f = \frac{x - w^m}{mw^{m-1} + \frac{1}{2} m(m-1) w^{m-2} f}$ um Vieles genauer.

Nun substituire man $\frac{x - w^m}{mw^{m-1}}$ statt $f$ in dem zweyten Gliede des Nenners bey dieser letzten Gleichung; so ist

$$f = \frac{w \cdot (x - w^m)}{mw^m + \frac{1}{2}(m-1)(x - w^m)}$$

$$= \frac{2w \cdot (x - w^m)}{(m+1) \cdot w^m + (m-1) \cdot x};$$

folglich $\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w \cdot (x - w^m)}{(m+1) \cdot w^m + (m-1) x}$.

3. B. $\sqrt{x} = w + \frac{2w \cdot (x - w^2)}{3w^2 + x}$

$$\sqrt[3]{x} = w + \frac{w \cdot (x - w^3)}{2w^3 + x}$$

$$\sqrt[4]{x} = w + \frac{2w \cdot (x - w^4)}{5w^4 + 3x}$$

$$\sqrt[5]{x} = w + \frac{w \cdot (x - w^5)}{3w^5 + 2x} \text{ u. s. w.}$$

Um den Gebrauch dieser Formeln deutlicher einzusehen, wollen wir die Cubikwurzel aus 572 ausziehen.

Nun ist $\frac{1}{3} \log 572 = \frac{2,7573960}{3} = 0,9191320$ wozu die Zahl 8,30103 gehöret; es ist demnach

$\sqrt[3]{572} = 8,30103$ beynahe; folglich $w = 8,30103$; und

$$\sqrt[3]{572} = 8,30103 + \frac{8,30103 \cdot [572 - (8,30103)^3]}{2 \cdot (8,30103)^3 + 572}$$

$$= 8,30103 + \frac{0,000859011314338091 19}{1715,999793035005454}$$

$$= 8,30103 + 0,000000500589404 4, \text{ nähmlich}$$

$\sqrt[3]{572} = 8,30103050058940 44$ sehr genau, und bis auf die letzte Decimalziffer verläßlich.

## §. 338.

Es läßt sich auch ein allgemeiner Ausdruck für die Wurzel einer jeden cubischen Gleichung, durch Hülfe der sogenannten Cardanischen Regel angeben; und zwar auf folgende Art.

Man schaffe bey einer geordneten vollständigen cubischen Gleichung (nach §. 329) das zweyte Glied hinweg, damit die Gleichung die Form $x^3 + px + q = 0$ erhalte. Um den Werth für $x$ in dieser letzten Gleichung zu bestimmen, setze man $x = y + z$; so ist alsdann

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + py + pz + q = 0.$$

Nun nehme man an, $y$ und $z$ sollen so beschaffen seyn, daß in dieser letzten Gleichung $y^3 + z^3 + q = 0$ sey; so ist auch $3y^2z + 3yz^2 + py + pz = 0$; oder $3yz(y + z) + p(y + z) = 0$, nähmlich $3yz = -p$; und folglich $y = -\frac{p}{3z}$. Substituiret man nun diesen Werth für $y$ in der Gleichung $y^3 + z^3 \mp q$

$= 0$, so erhält man $z^6 + qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$; woraus man (nach §. 215) findet,

$z = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$; folglich ist

$y = \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$;

und weil $x = y + z$, so ist endlich

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

eine Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

Z. B. es sey aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$ der Werth von $x$ zu bestimmen, so setze man $x = u + 4$, um (nach §. 329) das zweyte Glied wegzuschaffen; dadurch erhält man $u^3 + 9u + 6 = 0$. Setzet man nun vermöge obiger Formel $p = 9$, und $q = 6$, so ist hier $u = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$; und folglich ist in der vorgelegten Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$ eine Wurzel $x = 4 + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} = 3{,}3621659$, (wie im §. 336).

Wenn man mittelst der angeführten Formel aus der Gleichung $x^3 + 6x + 20 = 0$ den Werth für $x$ suchet; so findet man $x = \sqrt[3]{(-10 + 6\sqrt{3})} + \sqrt[3]{(-10 - 6\sqrt{3})}$. Obwohl nun hier der Werth von $x$ irrational zu seyn scheinet, so findet man doch nach vorgenommener Untersuchung, daß $\sqrt[3]{(-10 + 6\sqrt{3})} = -1 + \sqrt{3}$, und $\sqrt[3]{(-10 - 6\sqrt{3})} = -1 - \sqrt{3}$ sey; und folglich ist hier $x = -2$, welches man nach §. 325 noch leichter findet.

## §. 339.

Um in solchen Fällen zu untersuchen, ob sich die Cubikwurzel aus einer Größe $a \pm \sqrt{b}$, welche nähmlich aus einem rationalen Gliede $a$, und aus einer quadratischen Wurzelgröße $\sqrt{b}$ bestehet, abgekürzet angeben lasse; setze man I. $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})} = x \pm \sqrt{y}$, nähmlich $\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = x + \sqrt{y}$, und $\sqrt[3]{(a - \sqrt{b})} = x - \sqrt{y}$; daraus folgt durch die Multiplication dieser zwey Gleichungen $\sqrt[3]{(a^2 - b)} = x^2 - y$; folglich II. $y = x^2 - \sqrt[3]{(a^2 - b)}$.

Ferner folgt aus der Gleichung I. durch die Erhebung zur dritten Potenz $a \pm \sqrt{b} = x^3 \pm 3x^2\sqrt{y} + 3xy \pm y\sqrt{y}$, wo offenbar der rationale Theil $a = x^3 + 3xy$ seyn muß. Substituiret man endlich in dieser letzten Gleichung für $y$ den Werth aus der Gleichung II. so ist III. $x^3 - \frac{3}{4}x.\sqrt[3]{(a^2 - b)} - \frac{1}{4}a = 0$.

Aus dieser Gleichung III. muß man nun trachten, den Werth für $x$ (nach §. 325) zu bestimmen, nachdem man ehevor (nach §. 332 und 333) die gebrochenen, und auch die irrationalen Coefficienten weggeschaffet hat. Läßt sich nun auf diese Art $x$ bestimmen, so ergibt sich sodann aus der Gleichung II. auch $y$;

und $\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{b})}$ läßt sich dadurch abkürzen. So z. B. ist

$$\sqrt[3]{(20 - 12\sqrt{3})} = \sqrt[3]{(20 - \sqrt{432})} = (1 - \sqrt{3}).\sqrt[3]{2}.$$

Ingleichen $\sqrt[3]{(2 + 11\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 11\sqrt{-1})}$.

$= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$; u. s. w.

Anmerkung. Wenn die cubische Gleichung von der Form $x^3 + px + q = 0$ irrationale Wurzeln enthält, dabey aber $p$ negativ, und zugleich $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$ ist, so gibt die (im §. 338) angeführte Formel für den Werth von $x$ einen unmöglichen Ausdruck, der sich gar nicht abkürzen läßt. Und eben deßwegen ist auch die angeführte Formel in der Anwendung von keinem besondern Nutzen; wir wollen uns daher auch nicht länger dabey aufhalten; machen auch keine Erwähnung, daß man bey jeder Größe, nebst einer möglichen, auch noch zwey unmögliche Cubikwurzeln angeben könne; z. B. $\sqrt[3]{8} = 2$, oder $\sqrt[3]{8} = -1 + \sqrt{-3}$, oder endlich $\sqrt[3]{8} = -1 - \sqrt{-3}$; die zwey letzten unmöglichen Cubikwurzeln aus 8 werden gefunden, wenn die höhere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch $x - 2$ dividiret wird. Auch mit der Zerfällung einer höhern Gleichung in mehrere höhere Gleichungen wollen wir uns nicht beschäftigen. Man kann nähmlich zuweilen eine verwickelte Gleichung des vierten Grades, worin das zweyte Glied bereits weggeschaffet ist, von der Form $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$ in zwey quadratische Gleichungen zerlegen, wenn man $u^4 + pu^2 + qu + r = (u^2 + xu + y)$

$\times (u^2 - xu + z) = 0$ setzet; dadurch erhält man nach gemachter Multiplication $p = z - x^2 + y$, $q = (z - y)\, x$, $r = yz$, drey Gleichungen, um die drey unbekannten Größen $x$, $y$, $z$ bestimmen zu können.

Aus diesen drey Gleichungen folgt $z + y = p + x^2$, und $z - y = \frac{q}{x}$; daher ist I. $z = \frac{p + x^2}{2} + \frac{q}{2x}$, und II. $y = \frac{p + x^2}{2} - \frac{q}{2x}$; ferner $yz$, oder $r = \frac{(p + x^2)^2}{4} - \frac{q^2}{4x^2}$; und endlich III. $x^6 + 2px^4 + (p^2 - 4r)\, x^2 - q^2 = 0$ eine höhere Gleichung, die als eine cubische behandelt werden kann, um $x$ zu finden. Läßt sich nun auf diese Art $x$ bestimmen, so ist sodann in den zwey Gleichungen I. und II. auch $z$ und $y$ bekannt. Substituiret man endlich die gefundenen Werthe für $x$, $y$, $z$ in der Gleichung $(u^2 + xu + y) \times (u^2 - xu + z) = 0$, so hat man sodann die zwey quadratischen Gleichungen $u^2 + xu + y = 0$ und $u^2 - xu + z = 0$ aufzulösen, um alle vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung $u^4 + pu^2 + qu + r = 0$ zu bestimmen u. s. w.

Vollständige Untersuchungen über die Auflösung höherer Gleichungen findet man in Herrn L. Euler's Anleitung zur Algebra II. Thl. und in dessen Anleitung zur Analysis des Unendlichen von Herrn Michelsen übersetzet.

## §. 340.

Wenn aus einer verwickelten höhern Gleichung von zwey veränderlichen Größen eine aus diesen als eine Function von der andern zu entwickeln ist, so kann man dabey die Umkehrung der Functionen (§. 288) öfters mit Nutzen gebrauchen: z. B. um aus der Gleichung $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$ den Werth für $y$ zu finden, setze man $y = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + Dx^{p+3q} + \ldots$ und versuche für $p$ und $q$ solche Werthe anzunehmen, damit sich bey der Bestimmung der Coefficienten (nach §. 283), wenn man einen solchen Werth allenthalben in der vorgelegten Gleichung für $y$ substituiret, keine Widersprüche ergeben. Bey dem angeführten Beyspiele kann man $p = 0$ und $q = 1$, oder $p = 3$ und $q = 1$, oder endlich $p = 1$ und $q = -1$ annehmen. Im ersten Falle für $y = A + Bx$

$+ Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ ist $A = \pm a$, $B = + \frac{1}{2}$, $C = \mp \frac{1}{8a}$, $D = \pm \frac{7}{16a^2}$, $E = \pm \frac{59}{128a^3}$, ..... u. s. w. Zuweilen können für $p$ und $q$ auch gebrochene Werthe genommen werden: z. B. um aus der Gleichung $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$ den Werth für $y$ zu entwickeln, kann man annehmen entweder $p = 1$ und $q = 1$, oder $p = 0$ und $q = -3$, oder endlich $p = \frac{3}{2}$ und $q = -\frac{3}{2}$.

Diese Werthe für $p$ und $q$ im letzten Beyspiele können auf folgende Art gefunden werden. Man substituire den angenommenen Werth $y = Ax^p + Bx^{p+q} + Cx^{p+2q} + \ldots$ allenthalben statt $y$ in der gegebenen Gleichung, so ist sodann

$$0 = a A^3 x^{3p} + 3aA^2Bx^{3p+q} + 3aAB^2x^{3p+2q} + \ldots$$
$$- Ax^{p+3} - Bx^{p+q+3} - Cx^{p+2q+3} - \ldots$$
$$- ax^3$$

Nun sey 1) die Potenz $x^{3p} = x^3$, und $x^{3p+q} = x^{p+3}$ nähmlich $3p = 3$, und $3p + q = p + 3$, so ist $p = 1$ und $q = 1$; oder 2) es sey $x^{p+3} = x^2$, und $x^{p+q+3} = x^{3p}$, so ist $p = 0$ und $q = -3$; oder endlich 3) sey $x^{3p} = x^{p+3}$, und $x^{3p+q} = x^3$, so ist $p = \frac{3}{2}$ und $q = -\frac{3}{2}$. Und eben so bestimmet man auch in andern solchen Fällen vorläufig die Werthe für $p$ und $q$. Im letzten angeführten Falle für $y = Ax^{\frac{3}{2}} + B + Cx^{-\frac{3}{2}} + Dx^{-\frac{6}{2}} + Ex^{-\frac{9}{2}} + \ldots$ findet man

$A = + a^{-\frac{1}{2}}$, $B = \frac{1}{2} a^{\frac{2}{2}}$, $C = + \frac{3}{8} a^{\frac{5}{2}}$, $D = \frac{1}{2} a^{\frac{8}{2}}$, $E = \mp \frac{105}{128} a^{\frac{11}{2}}$ u. s. w.

Einige Schriftsteller brauchen in solchen Fällen, um die Werthe für $p$ und $q$ zu bestimmen, das sogenannte analytische Dreyeck, wovon in C. Scherfer Instit. Analyt. P. I. eine Abhandlung anzutreffen ist.

Schluß-Anmerkung. Die Richtigkeit einiger Sätze in diesem ersten Bande ist bloß durch die gemeine Induction dargethan worden, und zwar in der Absicht, damit mehrere Lehrlinge auf eine leicht begreifliche Art zur Kenntniß solcher Sätze gelangen, und damit sie nicht wegen einigen Schwie-

rigkeiten bey der schärfesten Beweisart alle Lust zur Mathematik verlieren. Z. B. daß die Anzahl der Amben bey $n$ Größen allgemein $= \frac{1}{2} n (n - 1)$ sey, ist bloß daraus geschlossen worden, weil man mittelst der Lehre von den arithmetischen Reihen des zweyten Ranges dargethan hat, daß diese Formel für 2, 3, 4, 5 Größen richtig sey, (§. 249), und weil man eben so zeigen konnte, daß solche auch für 6, 7, 8 und mehrere Größen gelte. Um nun in diesem Beyspiele mit der größten Schärfe zu erweisen, daß die Anzahl der Amben bey $n$ Größen ganz richtig $= \frac{1}{2} n (n - 1)$ sey, muß man noch aus den Eigenschaften der Amben zeigen, daß die Gestalt dieser Formel bey $(n + 1)$ Größen Statt finden müsse, wenn man solche bey $n$ Größen für richtig annimmt; nähmlich, daß bey $(n + 1)$ Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2} (n + 1) n$ seyn müsse, wenn bey $n$ Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2} n (n - 1)$ ist. Dieses kann auf folgende Art geschehen. Es sey bey $n$ Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2} n (n - 1)$; nun denke man sich noch eine Größe hinzugesetzet; so hat man sodann $(n + 1)$ Größen, und dabey $\frac{1}{2} n (n - 1) + n = \frac{1}{2} (n + 1) n$ Amben; weil die hinzugesetzte $(n + 1)$te Größe mit jeder der $n$ vorigen Größen verbunden noch $n$ neue Amben hervorbringet, welche mit den vorigen $\frac{1}{2} n (n - 1)$, zusammen $\frac{1}{2} (n + 1) n$ Amben betragen. Es muß daher ganz richtig für $(n + 1)$ Größen die Anzahl der Amben $= \frac{1}{2} (n + 1) n$ seyn, wenn für $n$ Größen die Anzahl $= \frac{1}{2} n (n - 1)$ ist. Nun gilt diese Formel $\frac{1}{2} n (n - 1)$ (wegen §. 249) ganz richtig für $n = 2$; also gilt solche, wegen des hier erwiesenen auch für $2 + 1 = 3$, und nun $n = 3$ gesetzt, gilt solche auch für $3 + 1 = 4$; und so gilt der Schluß immer für jede nächstfolgende um 1 größere Zahl; daher gilt die angeführte Formel in der größten Schärfe für jede beliebige Anzahl der Größen.

Eben so hat man (im §. 252) bloß mittelst der gemeinen Induction dargethan, daß bey $n$ ungleichen Größen die Anzahl der Versetzungen $= n . (n - 1) . (n - 2) \ldots 1$ sey, wo in jeder Versetzung $n$ Größen beysammen stehen. Weil man nähmlich die Formel für 2, 3, 4, 5 Größen richtig fand, und auf eben die Art zeigen konnte, daß solche auch für 6, 7, 8 und mehrere

Größen gelte, so behauptete man allgemein, sie sey für jede beliebige Anzahl $n$ von ungleichen Größen richtig. Um nun in der größten Schärfe zu erweisen, daß diese Formel $n.(n-1).(n-2)....1$ richtig für jede beliebige Anzahl $n$ von ungleichen Größen die Menge aller Versetzungen vorstelle, wo in jeder Versetzung alle $n$ Größen beysammen stehen, so muß man noch aus der Natur der Sache (hier aus der Beschaffenheit der Versetzung) erweisen, daß die Gestalt dieser Formel bey $(n+1)$ ungleichen Größen richtig seyn müsse, wenn man solche bey $n$ Größen für richtig annimmt; welches auf folgende Art geschehen kann. Wenn diese Formel bey $n$ Größen richtig ist, so ist bey $n$ ungleichen Größen die Anzahl der Versetzungen $= n.(n-1).(n-2)....1$; nun denke man sich noch eine ungleiche Größe hinzugefüget, so hat man $(n+1)$ Größen; und bey einer jeden der vorigen $n.(n-1).(n-2)...1$ Versetzungen gibt es $(n+1)$ Stellen, an denen die hinzugefügte $(n+1)$te Größe stehen kann, nähmlich hinten und vorne, und zwischen jeden zwey anliegenden Größen; daher ist bey $(n+1)$ ungleichen Größen die Anzahl der Versetzungen ganz richtig $= n.(n-1).(n-2)...1 \times (n+1) = (n+1).n.(n-1).(n-2)...1$, wenn die erste Formel bey $n$ ungleichen Größen richtig ist; nähmlich die Gestalt der angeführten Formel muß für $(n+1)$ Größen richtig seyn, wenn solche für $n$ Größen richtig ist. Es ist aber die Formel $n.(n-1).(n-2)....1$ (wegen §. 252) für $n = 2$ ganz richtig; daher ist solche wegen des hier erwiesenen auch für $2+1=3$ richtig; und nun $n=3$ gesetzt gilt eben diese Formel auch für $3+1=4$; und so gilt der Schluß immer für jede darauf folgende um 1 größere Zahl $n$; folglich gilt die angeführte Formel allgemein für jede beliebige Anzahl $n$ von ungleichen Größen.

Diese Beweisart beruhet überhaupt auf nachstehendem Grundsatze. Bey mehreren Größen, die in einem gewissen Zusammenhange miteinander stehen, findet ein gewisses Gesetz Statt: man findet aus richtigen Gründen, daß bey 2, 3 und 4 solchen Größen das Gesetz $= G$ sey; wenn man nun eben

dieses Gesetz = G bey $n$ Größen nach der gemeinen Induction für richtig annimmt, und dabey aus den obwaltenden Eigenschaften der vorhandenen Größen darthun kann, daß sodann eben dieses Gesetz auch bey $(n+1)$ Größen richtig seyn müsse, so ist das angenommene Gesetz = G für jede Anzahl $n$ der Größen wirklich allgemein richtig. Scharfsinnigen Anfängern wird zur Übung in dieser Beweisart bey analytischen Untersuchungen des Herrn J. Pasquich Unterricht in der mathematischen Analysis, Leipzig bey Weidman 1790, anempfohlen.

Wenn eine gesuchte Größe durch eine Reihe mittelst der Bestimmung der Coefficienten (nach §. 283 und 288) gefunden wird, so läßt sich öfters das Gesetz der Coefficienten gar nicht entdecken, oder wenn solches auch vermöge der gemeinen Inductionen in die Augen fällt, so läßt es sich doch nach den bereits vorgetragenen Gründen nicht allgemein erweisen; als z. B. bey der Reihe für log $(1+x)$ in (§. 289). In dergleichen Fällen muß man jederzeit trachten, für die gesuchte Größe eine sehr schnell abnehmende Reihe zu erhalten, und man kann dabey einmahl für allemahl so viele Glieder der Reihe wirklich bestimmen, als man deren zur Berechnung der gesuchten Größe nothwendig hat; dadurch ist die gesuchte Größe gewiß in hinlänglicher Schärfe richtig bestimmet.

# Anhang

## einiger Tafeln.

In folgender Tafel aller einfachen Factoren sind alle durch 2, 3 und 5 nicht theilbare Zahlen von 1 bis 10500 in ihre einfache Factoren aufgelöset; man findet diese Factoren, wenn man die Hunderter in der ersten horizontalen Colonne, die Zehner und Einheiten der vorgegebenen Zahl aber in der ersten verticalen Colonne, und endlich den Ort aufsucht, an welchem diese zwey Colonnen zusammenstoßen; denn an diesem Orte sind die Factoren anzutreffen, wenn die vorgegebene Zahl deren einige enthält; sollte hingegen an dem gefundenen Orte (....) anzutreffen seyn, so ist dieß ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl eine Primzahl sey. Z. B. auf der Seite 509 findet man, daß die Zahl 4199 aus den einfachen Factoren 13.17.19 zusammengesetzt sey; sie werden einfach genannt, um sie von den übrigen Factoren 221 = 13.17; 247 = 13.19; 323 = 17.19 zu unterscheiden, durch welche sich die vorgegebene Zahl ebenfalls genau theilen läßt. Auf der nähmlichen Seite findet man daß 4177 eine Primzahl sey. Die durch 2, 3 und 5 theilbaren Zahlen sind in der Tafel weggeblieben, weil die Factoren 2, 3 oder 5 einer vorgegebenen Zahl gleich bey ihrem Anblicke in die Augen fallen (§. 69). Würde nun eine durch 2, 3 oder 5 theilbare Zahl z. B. 111972 in die Factoren zu zerlegen seyn, so sieht man alsogleich, daß 111972 = 2.2.3.9331 sey; weiters findet man in der Tafel 9331 = 7.31.43; folglich ist 111972 = 2.2.3.7.31.43. Wenn jemand ein Belieben trägt, diese Tafel weiter fortzuführen, der kann Anton Felkels Factorentafel in diese geschmeidige Gestalt umschaffen; diese sehr seltene Felkel'sche Tafel, die im Jahre 1776 die von Gehlensche Presse zu Wien verließ; enthält auf 17 Regalbogen alle einfachen Fac-

toren der durch 2, 3 und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 408000.

Im zweyten Bande meiner logarithm. trigonometr. Tafeln, Leipzig 1797, ist eine solche Tafel der einfachen Factoren bis 102000, und ein Verzeichniß der Primzahlen bis 400000 enthalten, welche aus der erwähnten Felkel'schen Tafel abgeleitet sind. Genannter Ant. Felkel hat laut der monatl. Corresp. zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, August-Heft 1800, Seite 223, eine Herausgabe der von ihm berechneten Factoren-Tafeln bis 24 Millionen und 6 mahl Hundert-Tausend zu Lissabon angekündiget. Auch befindet sich im Stifte Klosterneuburg oberhalb Wien eine handschriftliche Tafel aller einfachen Factoren bis über eine Million, welche der kürzlich verstorbene Stifts-Herr Florian Ulbrich berechnet hat. Bey dieser Gelegenheit soll derselbe einige Fehler im oben erwähnten Verzeichnisse der Primzahlen und in der Felkel'schen Tafel entdecket haben, zu deren Kenntniß aber ich bisher noch nicht gelangen konnte, um solche zur Ausbesserung anzeigen zu können.

Die darauf folgende Tafel der Potenzen enthält die 2. 3. 4. 5. und 6. Potenz aller Wurzeln von 1 bis 100; sie kann sowohl bey der Auflösung der höheren Gleichungen, als auch bey dem Einschalten oder Interpoliren, wenn nähmlich zu einigen gegebenen Gliedern einer Reihe die übrigen zwischenliegenden Glieder (nach §. 314) zu bestimmen sind, und auch in anderen Fällen gute Dienste leisten. Durch Hülfe eben dieser Tafel findet man auch die Potenzen 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; .... 9,9; ingleichen die Potenzen von 0,01; 0,02; 0,03; .... 0,99; wenn man nur für die gesuchte Potenz die gehörigen Decimalziffern in der Tafel absondert.

Die Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen, wie auch die Tafeln der Quadrat- und Cubikwurzeln bedürfen keine Erläuterung, sie sind für sich deutlich genug. Daß diese nähmlichen Tafeln auch auf einige Decimalbrüche angewendet werden können, wird ohne meine Erinnerung ein jeder bey dem ersten Anblicke selbst einsehen.

| Nr. | 0 | 300 | 600 | 900 | 1200 | 1500 | 1800 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .... | 7 .. 43 | .... | 17 .. 53 | .... | 19 .. 79 | .... |
| 7 | .... | .... | .... | .... | 17 .. 71 | 11 .. 137 | 13 .. 139 |
| 11 | .... | .... | 13 .. 47 | .... | 7 .. 173 | .... | .... |
| 13 | .... | .... | .... | 11 .. 83 | .... | 17 .. 89 | 7 7 37 |
| 17 | .... | .... | .... | 7 .. 131 | .... | 37 .. 41 | 23 .. 79 |
| 19 | .... | 11 .. 29 | .... | .... | 23 .. 53 | 7 7 31 | 17 .. 107 |
| 23 | .... | 17 .. 19 | 7 .. 89 | 13 .. 71 | .... | .... | .... |
| 29 | .... | 7 .. 47 | 17 .. 37 | .... | .... | 11 .. 139 | 31 .. 59 |
| 31 | .... | .... | .... | 7 7 19 | .... | .... | .... |
| 37 | .... | .... | 7 7 13 | .... | .... | 29 .. 53 | 11 .. 167 |
| 41 | .... | 11 .. 31 | .... | .... | 17 .. 73 | 23 .. 67 | 7 .. 263 |
| 43 | .... | 7 7 7 | .... | 23 .. 41 | 11 .. 113 | .... | 19 .. 97 |
| 47 | .... | .... | .... | .... | 29 .. 43 | 7 13 17 | .... |
| 49 | 7 .. 7 | .... | 1 .. 59 | 13 .. 73 | .... | .... | 43 .. 43 |
| 53 | .... | .... | .... | .... | 7 .. 179 | .... | 17 .. 109 |
| 59 | .... | .... | .... | 7 .. 137 | .... | .... | 11 13 13 |
| 61 | .... | 19 .. 19 | .... | 31 .. 31 | 13 .. 97 | 7 .. 223 | .... |
| 67 | .... | .... | 23 .. 29 | .... | 7 .. 181 | .... | .... |
| 71 | .... | 7 .. 53 | 11 .. 61 | .... | 31 .. 41 | .... | .... |
| 73 | .... | .... | .... | 7 .. 139 | 19 .. 67 | 11 11 13 | .... |
| 77 | 7 .. 11 | 13 .. 29 | .... | .... | .... | 19 .. 83 | .... |
| 79 | .... | .... | 7 .. 97 | 11 .. 89 | .... | .... | .... |
| 83 | .... | .... | .... | .... | .... | .... | 7 .. 269 |
| 89 | .... | .... | 13 .. 53 | 23 .. 43 | .... | 7 .. 227 | .... |
| 91 | 7 .. 13 | 17 .. 23 | .... | .... | .... | 37 .. 43 | 31 .. 61 |
| 97 | .... | .... | 17 .. 41 | .... | .... | .... | 7 .. 271 |

| Nr. | 100 | 400 | 700 | 1000 | 1300 | 1600 | 1900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .... | .... | .... | 7 11 13 | .... | .... | .... |
| 3 | .... | 13 .. 31 | 19 .. 37 | 17 .. 59 | .... | 7 .. 229 | 11 .. 173 |
| 7 | .... | 11 .. 37 | 7 .. 101 | 19 .. 53 | .... | .... | .... |
| 9 | .... | .... | .... | .... | 7 11 17 | .... | 23 .. 83 |
| 13 | .... | 7 .. 59 | 23 .. 31 | .... | 13 .. 101 | .... | .... |
| 19 | 7 .. 17 | .... | .... | .... | .... | .... | 19 .. 101 |
| 21 | 11 .. 11 | .... | 7 .. 103 | .... | .... | .... | 17 .. 113 |
| 27 | .... | 7 .. 61 | .... | 13 .. 79 | .... | .... | 41 .. 47 |
| 31 | .... | .... | 17 .. 43 | .... | 11 11 11 | 7 .. 233 | .... |
| 33 | 7 .. 19 | .... | .... | .... | 31 .. 43 | 23 .. 71 | .... |
| 37 | .... | 19 .. 23 | 11 .. 67 | 17 .. 61 | 7 .. 191 | .... | 13 .. 149 |
| 39 | .... | .... | .... | .... | 13 .. 103 | 11 .. 149 | 7 .. 277 |
| 43 | 11 .. 13 | .... | .... | 7 .. 149 | 17 .. 79 | 31 .. 53 | 29 .. 67 |
| 49 | .... | .... | 7 .. 107 | .... | 19 .. 71 | 17 .. 97 | .... |

| Nr. | 100 | 400 | 700 | 1000 | 1300 | 1600 | 1900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | .... | 11 .. 41 | .... | .... | 7 .. 193 | 13 .. 127 | .... |
| 57 | .... | .... | .... | 7 .. 151 | 23 .. 59 | .... | 19 .. 103 |
| 61 | 7 .. 23 | .... | .... | .... | .... | 11 .. 151 | 37 .. 53 |
| 63 | .... | .... | 7 .. 109 | .... | 29 .. 47 | . .. | 13 .. 151 |
| 67 | .... | .... | 13 .. 59 | 11 .. 97 | .... | .... | 7 .. 281 |
| 69 | 13 .. 13 | 7 .. 67 | .... | .... | 37 .. 37 | .... | 11 .. 179 |
| 73 | .... | 11 .. 43 | .... | 29 .. 37 | .... | 7 .. 239 | .... |
| 79 | .... | .... | 19 .. 41 | 13 .. 83 | 7 .. 197 | 23 .. 73 | .... |
| 81 | .... | 13 .. 37 | 11 .. 71 | 23 .. 47 | .... | 41 .. 41 | 7 .. 283 |
| 87 | 11 .. 17 | .... | .... | .... | 19 .. 73 | 7 .. 241 | .... |
| 91 | .... | .... | 7 .. 113 | .... | 13 .. 107 | 19 .. 89 | 11 .. 181 |
| 93 | .... | 17 .. 29 | 13 .. 61 | .... | 7 .. 199 | .... | .... |
| 97 | .... | 7 .. 71 | .... | .... | 11 .. 127 | .... | .... |
| 99 | .... | .... | 17 .. 47 | 7 .. 157 | .... | .... | .... |

| Nr. | 200 | 500 | 800 | 1100 | 1400 | 1700 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 .. 29 | .... | 11 .. 73 | .... | 23 .. 61 | 13 .. 131 | .... |
| 9 | 11 .. 19 | .... | .... | .... | .... | .... | 7 7 41 |
| 11 | .... | 7 .. 73 | .... | 11 .. 101 | 17 .. 83 | 29 .. 59 | .... |
| 17 | 7 .. 31 | 11 .. 47 | 19 .. 43 | .... | 13 .. 109 | 17 .. 101 | .... |
| 21 | 13 .. 17 | .... | .... | 19 .. 59 | 7 7 29 | .... | 43 .. 47 |
| 23 | .... | .... | .... | .... | .... | .... | 7 17 17 |
| 27 | .... | 17 .. 31 | .... | 7 7 23 | .... | 11 .. 157 | .... |
| 29 | .... | 23 .. 23 | .... | .... | .... | 7 13 19 | .... |
| 33 | .... | 13 .. 41 | 7 7 17 | 11 .. 103 | .... | .... | 19 .. 107 |
| 39 | .... | 7 7 11 | .... | 17 .. 67 | .... | 37 .. 47 | .... |
| 41 | .... | .... | 29 .. 29 | 7 .. 163 | 11 .. 131 | .... | 13 .. 157 |
| 47 | 13 .. 19 | .... | 7 11 11 | 31 .. 37 | .... | .... | 23 .. 89 |
| 51 | .... | 19 .. 29 | 23 .. 37 | .... | .... | 17 .. 103 | 7 .. 293 |
| 53 | 11 .. 23 | 7 .. 79 | .... | .... | .... | .... | .... |
| 57 | .... | .... | .... | 13 .. 89 | 31 .. 47 | 7 .. 251 | 11 11 17 |
| 59 | 7 .. 37 | 13 .. 43 | .... | 19 .. 61 | .... | .... | 29 .. 71 |
| 63 | .... | .... | .... | .... | 7 11 19 | 41 .. 43 | .... |
| 69 | .... | .... | 11 .. 79 | 7 .. 167 | 13 .. 113 | 29 .. 61 | .... |
| 71 | .... | .... | 13 .. 67 | .... | .... | 7 11 23 | 19 .. 109 |
| 77 | .... | .... | .... | 11 .. 107 | 7 .. 211 | .... | 31 .. 67 |
| 81 | .... | 7 .. 83 | .... | .... | .... | 13 .. 137 | .... |
| 83 | .... | 11 .. 53 | .... | 7 13 13 | .... | .... | .... |
| 87 | 7 .. 41 | .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 89 | 17 .. 17 | 19 .. 31 | 7 .. 127 | 29 .. 41 | .... | .... | .... |
| 93 | .... | .... | 19 .. 47 | .... | .... | 11 .. 163 | 7 13 23 |
| 99 | 13 .. 23 | .... | 29 .. 31 | 11 .. 109 | .... | 7 .. 257 | .... |

| Nr. | 2100 | 2400 | 2700 | 3000 | 3300 | 3600 | 3900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 .. 191 | 7 7 7 7 | 37 .. 73 | .... | .... | 13 .. 277 | 47 .. 83 |
| 7 | 7 7 43 | 29 .. 83 | .... | 31 .. 97 | .... | .... | .... |
| 11 | .... | .... | .... | .... | 7 11 43 | 23 .. 157 | .... |
| 13 | .... | 19 .. 127 | .... | 23 .. 131 | .... | .... | 7 13 43 |
| 17 | 29 .. 73 | .... | 11 13 19 | 7 .. 431 | 31 .. 107 | .... | .... |
| 19 | 13 .. 163 | 41 .. 59 | .... | .... | .... | 7 11 47 | .... |
| 23 | 11 .. 193 | .... | 7 .. 389 | .... | .... | .... | .... |
| 29 | .... | 7 .. 347 | .... | 13 .. 233 | .... | 19 .. 191 | .... |
| 31 | .... | 11 13 17 | .... | 7 .. 433 | .... | .... | .... |
| 37 | .... | .... | 7 17 23 | .... | 47 .. 71 | .... | 31 .. 127 |
| 41 | .... | .... | .... | .... | 13 .. 257 | 11 .. 331 | 7 .. 563 |
| 43 | .... | 7 .. 349 | 13 .. 211 | 17 .. 179 | .... | .... | .... |
| 47 | 19 .. 113 | .... | 41 .. 67 | 11 .. 277 | .... | 7 .. 521 | .... |
| 49 | 7 .. 307 | 31 .. 79 | .... | .... | 17 .. 197 | 41 .. 89 | 11 .. 359 |
| 53 | .... | 11 .. 223 | .... | 43 .. 71 | 7 .. 479 | 13 .. 281 | 59 .. 67 |
| 59 | 17 .. 127 | .... | 31 .. 89 | 7 19 23 | .... | .... | 37 .. 107 |
| 61 | .... | 23 .. 107 | 11 .. 251 | .... | .... | 7 .. 523 | 17 .. 233 |
| 67 | 11 .. 197 | .... | .... | .... | 7 13 37 | 19 .. 193 | .... |
| 71 | 13 .. 167 | 7 .. 353 | 17 .. 163 | 37 .. 83 | .... | .... | 11 19 19 |
| 73 | 41 .. 53 | .... | 47 .. 59 | 7 .. 439 | .... | .... | 29 .. 137 |
| 77 | 7 .. 311 | .... | .... | 17 .. 181 | 11 .. 307 | .... | 41 .. 97 |
| 79 | .... | 37 .. 67 | 7 .. 397 | .... | 31 .. 109 | 13 .. 283 | 23 .. 173 |
| 83 | 37 .. 59 | 13 .. 191 | 11 11 23 | .... | 17 .. 199 | 29 .. 127 | 7 .. 569 |
| 89 | 11 .. 199 | 19 .. 131 | .... | .... | .... | 7 17 31 | .... |
| 91 | 7 .. 313 | 47 .. 53 | .... | 11 .. 281 | .... | .... | 13 .. 307 |
| 97 | 13 13 13 | 11 .. 227 | .... | 19 .. 163 | 43 .. 79 | .... | 7 .. 571 |

| Nr. | 2200 | 2500 | 2800 | 3100 | 3400 | 3700 | 4000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 31 .. 71 | 41 .. 61 | .... | 7 .. 443 | 19 .. 179 | .... | .... |
| 3 | .... | .... | .... | 29 .. 107 | 41 .. 83 | 7 23 23 | .... |
| 7 | .... | 23 .. 109 | 7 .. 401 | 13 .. 239 | .... | 11 .. 337 | .... |
| 9 | 47 .. 47 | 13 .. 193 | 53 .. 53 | .... | 7 .. 487 | .... | 19 .. 211 |
| 13 | .... | 7 .. 359 | 29 .. 97 | 11 .. 283 | .... | 47 .. 79 | .... |
| 19 | 7 .. 317 | 11 .. 229 | .... | .... | 13 .. 263 | .... | .... |
| 21 | .... | .... | 7 13 31 | .... | 11 .. 311 | 61 .. 61 | .... |
| 27 | 17 .. 131 | 7 19 19 | 11 .. 257 | 53 .. 59 | 23 .. 149 | .... | .... |
| 31 | 23 .. 97 | .... | 19 .. 149 | 31 .. 101 | 47 .. 73 | 7 13 41 | 29 .. 139 |
| 33 | 7 11 29 | 17 .. 149 | .... | 13 .. 241 | .... | .... | 37 .. 109 |
| 37 | .... | 43 .. 59 | .... | .... | 7 .. 491 | 37 .. 101 | 11 .. 367 |
| 39 | .... | .... | 17 .. 167 | 43 .. 73 | 19 .. 181 | .... | 7 .. 577 |
| 43 | .... | .... | .... | 7 .. 449 | 11 .. 313 | 19 .. 197 | 13 .. 311 |
| 49 | 13 .. 173 | .... | 7 11 37 | 47 .. 67 | .... | 23 .. 163 | .... |

| Nr. | 2200 | 2500 | 2800 | 3100 | 3400 | 3700 | 4000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | .... | .... | .... | 23 .. 137 | 7 17 29 | 11 11 31 | .... |
| 57 | 37 .. 61 | .... | .... | 7 11 41 | .... | 13 17 17 | .... |
| 61 | 7 17 19 | 13 .. 197 | .... | 29 .. 109 | .... | .... | 31 .. 131 |
| 63 | 31 .. 73 | 11 .. 233 | 7 .. 409 | .... | .... | 53 .. 71 | 17 .. 239 |
| 67 | .... | 17 .. 151 | 47 .. 61 | .... | .... | .... | 7 7 83 |
| 69 | .... | 7 .. 367 | 19 .. 151 | .... | .... | .... | 13 .. 313 |
| 73 | .... | 31 .. 83 | 13 13 17 | 19 .. 167 | 23 .. 151 | 7 7 7 11 | .... |
| 79 | 43 .. 53 | .... | .... | 11 17 17 | 7 7 71 | .... | .... |
| 81 | .... | 29 .. 89 | 43 .. 67 | .... | 59 .. 59 | 19 .. 199 | 7 11 53 |
| 87 | .... | 13 .. 199 | .... | .... | 11 .. 317 | 7 .. 541 | 61 .. 67 |
| 91 | 29 .. 79 | .... | 7 7 59 | .... | .... | 17 .. 223 | .... |
| 93 | .... | .... | 11 .. 263 | 31 .. 103 | 7 .. 499 | .... | .... |
| 97 | .... | 7 7 53 | .... | 23 .. 139 | 13 .. 269 | .... | 17 .. 241 |
| 99 | 11 11 19 | 23 .. 113 | 13 .. 223 | 7 .. 457 | .... | 29 .. 131 | .... |

| Nr. | 2300 | 2600 | 2900 | 3200 | 3500 | 3800 | 4100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 7 47 | 19 .. 137 | .... | .... | 31 .. 113 | .... | 11 .. 373 |
| 9 | .... | .... | .... | .... | 11 11 29 | 13 .. 293 | 7 .. 587 |
| 11 | .... | 7 .. 373 | 41 .. 71 | 13 13 19 | .... | 37 .. 103 | .... |
| 17 | 7 .. 331 | .... | .... | .... | .... | 11 .. 347 | 23 .. 179 |
| 21 | 11 .. 211 | .... | 23 .. 127 | .... | 7 .. 503 | .... | 13 .. 317 |
| 23 | 23 .. 101 | 43 .. 61 | 37 .. 79 | 11 .. 293 | 13 .. 271 | .... | 7 19 31 |
| 27 | 13 .. 179 | 37 .. 71 | .... | 7 .. 461 | .... | 43 .. 89 | .... |
| 29 | 17 .. 137 | 11 .. 239 | 29 .. 101 | .... | .... | 7 .. 547 | .... |
| 33 | .... | .... | 7 .. 419 | 53 .. 61 | .... | .... | .... |
| 39 | .... | 7 13 29 | .... | 41 .. 79 | .... | 11 .. 349 | .... |
| 41 | .... | 19 .. 139 | 17 .. 173 | 7 .. 463 | .... | 23 .. 167 | 41 .. 101 |
| 47 | .... | .... | 7 .. 421 | 17 .. 191 | .... | .... | 11 13 29 |
| 51 | .... | 11 .. 241 | 13 .. 227 | .... | 53 .. 67 | .... | 7 .. 593 |
| 53 | 13 .. 181 | 7 .. 379 | .... | .... | 11 17 19 | .... | .... |
| 57 | .... | .... | .... | .... | .... | 7 19 29 | .... |
| 59 | 7 .. 337 | .... | 11 .. 269 | .... | .... | 17 .. 227 | .... |
| 63 | 17 .. 139 | .... | .... | 13 .. 251 | 7 .. 509 | .... | 23 .. 181 |
| 69 | 23 .. 103 | 17 .. 157 | .... | 7 .. 467 | 43 .. 83 | 53 .. 73 | 11 .. 379 |
| 71 | .... | .... | .... | .... | .... | 7 7 79 | 43 .. 97 |
| 77 | .... | .... | 13 .. 229 | 29 .. 113 | 7 7 73 | .... | .... |
| 81 | .... | 7 .. 383 | 11 .. 271 | 17 .. 193 | .... | .... | 37 .. 113 |
| 83 | .... | .... | 19 .. 157 | 7 7 67 | .... | 11 .. 353 | 47 .. 89 |
| 87 | 7 11 31 | .... | 29 .. 103 | 19 .. 173 | 17 .. 211 | 13 13 23 | 53 .. 79 |
| 89 | .... | .... | 7 7 61 | 11 13 23 | 37 .. 97 | .... | 59 .. 71 |
| 93 | .... | .... | 41 .. 73 | 37 .. 89 | .... | 17 .. 229 | 7 .. 599 |
| 99 | .... | .... | .... | .... | 59 .. 61 | 7 .. 557 | 13 17 49 |

| Nr. | 4200 | 4500 | 4800 | 5100 | 5400 | 5700 | 6000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .... | 7 .. 643 | .... | .... | 11 .. 491 | .... | 17 .. 353 |
| 7 | 7 .. 601 | .... | 11 19 23 | .... | .... | 13 .. 439 | .... |
| 11 | .... | 13 .. 347 | 17 .. 283 | 19 .. 269 | 7 .. 773 | .... | .... |
| 13 | 11 .. 383 | .... | .... | .... | .... | 29 .. 197 | 7 .. 859 |
| 17 | .... | .... | .... | 7 17 43 | .... | .... | 11 .. 547 |
| 19 | .... | .... | 61 .. 79 | .... | .... | 7 19 43 | 13 .. 463 |
| 23 | 41 .. 103 | .... | 7 13 53 | 47 .. 109 | 11 17 29 | 59 .. 97 | 19 .. 317 |
| 29 | .... | 7 .. 647 | 11 .. 439 | 23 .. 223 | 61 .. 89 | 17 .. 337 | .... |
| 31 | .... | 23 .. 197 | .... | 7 .. 733 | .... | 11 .. 521 | 37 .. 163 |
| 37 | 19 .. 223 | 13 .. 349 | 7 .. 691 | 11 .. 467 | .... | .... | .... |
| 41 | .... | 19 .. 239 | 47 .. 103 | 53 .. 97 | .... | .... | 7 .. 863 |
| 43 | .... | 7 11 59 | 29 .. 167 | 37 .. 139 | .... | .... | .... |
| 47 | 31 .. 137 | .... | 37 .. 131 | .... | 13 .. 419 | 7 .. 821 | .... |
| 49 | 7 .. 607 | .... | 13 .. 373 | 19 .. 271 | .... | .... | 23 .. 263 |
| 53 | .... | 29 .. 157 | 23 .. 211 | .... | 7 19 41 | 11 .. 523 | .... |
| 59 | .... | 47 .. 97 | 43 .. 113 | 7 11 67 | 53 .. 103 | 13 .. 443 | 73 .. 83 |
| 61 | .... | .... | .... | 13 .. 397 | 43 .. 127 | 7 .. 823 | 11 19 29 |
| 67 | 17 .. 251 | .... | 31 .. 157 | .... | 7 11 71 | 73 .. 79 | .... |
| 71 | .... | 7 .. 653 | .... | .... | .... | 29 .. 199 | 13 .. 467 |
| 73 | .... | 17 .. 269 | 11 .. 443 | 7 .. 739 | 13 .. 421 | 23 .. 251 | .... |
| 77 | 7 13 47 | 23 .. 199 | .... | 31 .. 167 | .... | 53 .. 109 | 59 .. 103 |
| 79 | 11 .. 389 | 19 .. 241 | 7 17 41 | .... | .... | .... | .... |
| 83 | .... | .... | 19 .. 257 | 71 .. 73 | .... | .... | 7 11 79 |
| 89 | .... | 13 .. 353 | .... | .... | 11 .. 499 | 7 .. 827 | .... |
| 91 | 7 .. 613 | .... | 67 .. 73 | 29 .. 179 | 17 17 19 | .... | .... |
| 97 | .... | .... | 59 .. 83 | .... | 23 .. 239 | 11 17 31 | 7 13 67 |

| Nr. | 4300 | 4600 | 4900 | 5200 | 5500 | 5800 | 6100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 17 23 | 43 .. 107 | 13 13 29 | 7 .. 743 | .... | .... | .... |
| 3 | 13 .. 331 | .... | .... | 11 11 43 | .... | 7 .. 829 | 17 .. 359 |
| 7 | 59 .. 73 | 17 .. 271 | 7 .. 701 | 41 .. 127 | .... | .... | 31 .. 197 |
| 9 | 31 .. 139 | 11 .. 419 | .... | .... | 7 .. 787 | 37 .. 157 | 41 .. 149 |
| 13 | 19 .. 227 | 7 .. 659 | 17 17 17 | 13 .. 401 | 37 .. 149 | .... | .... |
| 19 | 7 .. 617 | 31 .. 149 | .... | 17 .. 307 | .... | 11 23 23 | 29 .. 211 |
| 21 | 29 .. 149 | .... | 7 19 37 | 23 .. 227 | .... | .... | .... |
| 27 | .... | 7 .. 661 | 13 .. 379 | .... | .... | .... | 11 .. 557 |
| 31 | 61 .. 71 | 11 .. 421 | .... | .... | .... | 7 7 7 17 | .... |
| 33 | 7 .. 619 | 41 .. 113 | .... | .... | 11 .. 503 | 19 .. 307 | .... |
| 37 | .... | .... | .... | .... | 7 7 113 | 13 .. 449 | 17 19 19 |
| 39 | .... | .... | 11 .. 449 | 13 13 31 | 29 .. 191 | .... | 7 .. 877 |
| 43 | 43 .. 101 | .... | .... | 7 7 107 | 23 .. 241 | .... | .... |
| 49 | .... | .... | 7 7 101 | 29 .. 181 | 31 .. 179 | .... | 11 13 43 |

| Nr. | 4300 | 4600 | 4900 | 5200 | 5500 | 5800 | 6100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 19 .. 229 | .... | .... | 59 .. 89 | 7 13 61 | .... | .... |
| 57 | .... | .... | .... | 7 .. 751 | .... | .... | 47 .. 131 |
| 61 | 7 7 89 | 59 .. 79 | 11 11 41 | .... | 67 .. 83 | .... | 61 .. 101 |
| 63 | .... | .... | 7 .. 709 | 19 .. 277 | .... | 11 13 41 | . .. |
| 67 | 11 .. 397 | 13 .. 359 | .... | 23 .. 229 | 19 .. 293 | .... | 7 .. 881 |
| 69 | 17 .. 257 | 7 23 29 | .... | 11 .. 479 | .... | .... | 31 .. 199 |
| 73 | .... | .... | .... | .... | .... | 7 .. 839 | .... |
| 79 | 29 .. 151 | .... | 13 .. 383 | .... | 7 .. 797 | .... | 37 .. 167 |
| 81 | 13 .. 337 | 31 .. 151 | 17 .. 293 | .... | .... | .... | 7 .. 883 |
| 87 | 41 .. 107 | 43 .. 109 | .... | 17 .. 311 | 37 .. 151 | 7 29 29 | 23 .. 269 |
| 91 | .... | .... | 7 23 31 | 11 13 37 | .... | 43 .. 137 | 41 .. 151 |
| 93 | 23 .. 191 | 13 19 19 | .... | 67 .. 79 | 7 17 47 | 71 .. 83 | 11 .. 563 |
| 97 | .... | 7 11 61 | 19 .. 263 | .... | 29 .. 193 | .... | .... |
| 99 | 53 .. 83 | 37 .. 127 | .... | 7 .. 757 | 11 .. 509 | 17 .. 347 | .... |

| Nr. | 4400 | 4700 | 5000 | 5300 | 5600 | 5900 | 6200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 17 37 | .... | .... | .... | 13 .. 431 | .... | .... |
| 9 | .... | 17 .. 277 | .... | .... | 71 .. 79 | 19 .. 311 | 7 .. 887 |
| 11 | 11 .. 401 | 7 .. 673 | .... | 47 .. 113 | 31 .. 181 | 23 .. 257 | .... |
| 17 | 7 .. 631 | 53 .. 89 | 29 .. 173 | 13 .. 409 | 41 .. 137 | 61 .. 97 | .... |
| 21 | .... | .... | .... | 17 .. 313 | 7 11 73 | 31 .. 191 | .... |
| 23 | .... | .... | .... | .... | .... | .... | 7 7 127 |
| 27 | 19 .. 233 | 29 .. 163 | 11 .. 457 | 7 .. 761 | 17 .. 331 | .... | 13 .. 479 |
| 29 | 43 .. 103 | .... | 47 .. 107 | 73 .. 73 | 13 .. 433 | 7 7 11 11 | .... |
| 33 | 11 13 31 | .... | 7 .. 719 | .... | 43 .. 131 | 17 .. 349 | 23 .. 271 |
| 39 | 23 .. 193 | 7 .. 677 | .... | 19 .. 281 | .... | .... | 17 .. 367 |
| 41 | .... | 11 .. 431 | 71 .. 71 | 7 7 109 | .... | 13 .. 457 | 79 .. 79 |
| 47 | .... | 47 .. 101 | 7 7 103 | .... | .... | 19 .. 313 | .... |
| 51 | .... | .... | .... | .... | .... | 11 .. 541 | 7 19 47 |
| 53 | 61 .. 73 | 7 7 97 | 31 .. 163 | 53 .. 101 | .... | .... | 13 13 37 |
| 57 | .... | 67 .. 71 | 13 .. 389 | 11 .. 487 | .... | 7 23 37 | .... |
| 59 | 7 7 7 13 | .... | .... | 23 .. 233 | .... | 59 .. 101 | 11 .. 569 |
| 63 | .... | 11 .. 433 | 61 .. 83 | 31 .. 173 | 7 .. 809 | 67 .. 89 | .... |
| 69 | 41 .. 109 | 19 .. 251 | 37 .. 137 | 7 13 59 | .... | 47 .. 127 | .... |
| 71 | 17 .. 263 | 13 .. 367 | 11 .. 461 | 41 .. 131 | 53 .. 107 | 7 .. 853 | .... |
| 77 | 11 11 37 | 17 .. 281 | .... | 19 .. 283 | 7 .. 811 | 43 .. 139 | .... |
| 81 | .... | 7 .. 683 | .... | .... | 13 19 23 | .... | 11 .. 571 |
| 83 | .... | .... | 13 17 23 | 7 .. 769 | .... | 31 .. 193 | 61 .. 103 |
| 87 | 7 .. 641 | .... | .... | .... | 11 11 47 | .... | .... |
| 89 | 67 .. 67 | .... | 7 .. 727 | 17 .. 317 | .... | 53 .. 113 | 19 .. 331 |
| 93 | .... | .... | 11 .. 463 | .... | .... | 13 .. 461 | 7 29 31 |
| 99 | 11 .. 409 | .... | .... | .... | 41 .. 139 | 7 .. 857 | .... |

| Nr. | 6300 | 6600 | 6900 | 7200 | 7500 | 7800 | 8100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .... | 7 23 41 | 67 .. 103 | 19 .. 379 | 13 .. 577 | 29 .. 269 | .... |
| 7 | 7 17 53 | .... | .... | .... | .... | 37 .. 211 | 11 11 67 |
| 11 | .... | 11 .. 601 | .... | .... | 7 29 37 | 73 .. 107 | .... |
| 13 | 59 .. 107 | 17 .. 389 | 31 .. 223 | .... | 11 .. 683 | 13 .. 601 | 7 19 61 |
| 17 | .... | 13 .. 509 | .... | 7 .. 1031 | .... | .... | .... |
| 19 | 71 .. 89 | .... | 11 17 37 | .... | 73 .. 103 | 7 .. 1117 | 23 .. 353 |
| 23 | .... | 37 .. 179 | 7 23 43 | 31 .. 233 | .... | .... | .... |
| 29 | .... | 7 .. 947 | 13 13 41 | .... | .... | .... | 11 .. 739 |
| 31 | 13 .. 487 | 19 .. 349 | 29 .. 239 | 7 .. 1033 | 17 .. 443 | 41 .. 191 | 47 .. 173 |
| 37 | .... | .... | 7 .. 991 | .... | .... | 17 .. 461 | 79 .. 103 |
| 41 | 17 .. 373 | 29 .. 229 | 11 .. 631 | 13 .. 557 | .... | .... | 7 .. 1163 |
| 43 | .... | 7 13 73 | 53 .. 131 | .... | 19 .. 397 | 11 23 31 | 17 .. 479 |
| 47 | 11 .. 577 | 17 17 23 | .... | .... | .... | 7 19 59 | .... |
| 49 | 7 .. 907 | 61 .. 109 | .... | 11 .. 659 | .... | 47 .. 167 | 29 .. 281 |
| 53 | .... | .... | 17 .. 409 | .... | 7 13 83 | .... | 31 .. 263 |
| 59 | .... | .... | .... | 7 17 61 | .... | 29 .. 271 | 41 .. 199 |
| 61 | .... | .... | .... | 53 .. 137 | .... | 7 .. 1123 | .... |
| 67 | .... | 59 .. 113 | .... | 13 13 43 | 7 23 47 | .... | .... |
| 71 | 23 .. 277 | 7 .. 953 | .... | 11 .. 661 | 67 .. 113 | 17 .. 463 | .... |
| 73 | .... | .... | 19 .. 367 | 7 .. 1039 | .... | .... | 11 .. 743 |
| 77 | 7 .. 911 | 11 .. 607 | .... | 19 .. 383 | .... | .... | 13 17 37 |
| 79 | .... | .... | 7 .. 997 | 29 .. 251 | 11 13 53 | .... | .... |
| 83 | 13 .. 491 | 41 .. 163 | .... | .... | .... | .... | 7 7 167 |
| 89 | .... | .... | 29 .. 241 | 37 .. 197 | .... | 7 7 7 23 | 19 .. 431 |
| 91 | 7 11 83 | .... | .... | 23 .. 317 | .... | 13 .. 607 | .... |
| 97 | .... | 37 .. 181 | .... | .... | 71 .. 107 | 53 .. 149 | 7 .. 1171 |

| Nr. | 6400 | 6700 | 7000 | 7300 | 7600 | 7900 | 8200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 37 .. 173 | .... | .... | 7 7 149 | 11 .. 691 | .... | 59 .. 139 |
| 3 | 19 .. 337 | .... | 47 .. 149 | 67 .. 109 | .... | 7 .. 1129 | 13 .. 631 |
| 7 | 43 .. 149 | 19 .. 353 | 7 7 11 13 | .... | .... | .... | 29 .. 283 |
| 9 | 13 17 29 | .... | 43 .. 163 | .... | 7 .. 1087 | 11 .. 719 | .... |
| 13 | 11 11 53 | 7 7 137 | .... | 71 .. 103 | 23 .. 331 | 41 .. 193 | 43 .. 191 |
| 19 | 7 7 131 | .... | .... | 13 .. 563 | 19 .. 401 | .... | .... |
| 21 | .... | 11 13 47 | 7 17 59 | .... | .... | 89 .. 89 | .... |
| 27 | .... | 7 31 31 | .... | 17 .. 431 | 29 .. 263 | .... | 19 .. 433 |
| 31 | 59 .. 109 | 53 .. 127 | 79 .. 89 | .... | 13 .. 587 | 7 11 103 | .... |
| 33 | 7 . 919 | .... | 13 .. 541 | .... | 17 .. 449 | .... | .... |
| 37 | 41 .. 157 | .... | 31 .. 227 | 11 23 29 | 7 .. 1091 | .... | .... |
| 39 | 47 .. 137 | 23 .. 293 | .... | 41 .. 179 | .... | 17 .. 467 | 7 11 107 |
| 43 | 17 .. 379 | 11 .. 613 | .... | 7 .. 1049 | .... | 13 13 47 | .... |
| 49 | .... | 17 .. 397 | 7 19 53 | .... | .... | .... | 73 .. 113 |

| Nr. | 6400 | 6700 | 7000 | 7300 | 7600 | 7900 | 8200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | .... | 43 .. 157 | 11 .. 641 | .... | 7 .. 1093 | .... | 37 .. 223 |
| 57 | 11 .. 587 | 29 .. 233 | .... | 7 .. 1051 | 13 19 31 | 73 .. 109 | 23 .. 359 |
| 61 | 7 13 71 | .... | 23 .. 307 | 17 .. 433 | 47 .. 163 | 19 .. 419 | 11 .. 751 |
| 63 | 23 .. 281 | .... | 7 .. 1009 | 37 .. 199 | 79 .. 97 | .... | .... |
| 67 | 29 .. 223 | 67 .. 101 | 37 .. 191 | 53 .. 139 | 11 17 41 | 31 .. 257 | 7 .. 1181 |
| 69 | .... | 7 .. 967 | .... | .... | .... | 13 .. 613 | .... |
| 73 | .... | 13 .. 521 | 11 .. 643 | 73 .. 101 | .... | 7 17 67 | .... |
| 79 | 11 19 31 | .... | .... | 47 .. 157 | 7 .. 1097 | 79 .. 101 | 17 .. 487 |
| 81 | .... | .... | 73 .. 97 | 11 11 61 | .... | 23 .. 347 | 7 7 13 13 |
| 87 | 13 .. 499 | 11 .. 617 | 19 .. 373 | 83 .. 89 | .... | 7 7 163 | .... |
| 91 | .... | .... | 7 .. 1013 | 19 .. 389 | .... | 61 .. 131 | .... |
| 93 | 43 .. 151 | .... | 41 .. 173 | .... | 7 7 157 | .... | .... |
| 97 | 73 .. 89 | 7 .. 971 | 47 .. 151 | 13 .. 569 | 43 .. 179 | 11 .. 727 | .... |
| 99 | 67 .. 97 | 13 .. 523 | 31 .. 229 | 7 7 151 | .... | 19 .. 421 | 43 .. 193 |

| Nr. | 6500 | 6800 | 7100 | 7400 | 7700 | 8000 | 8300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 .. 929 | .... | .... | 11 .. 673 | .... | 53 .. 151 | 19 19 23 |
| 9 | 23 .. 283 | 11 .. 619 | .... | 31 .. 239 | 13 .. 593 | .... | 7 .. 1187 |
| 11 | 17 .. 383 | 7 7 139 | 13 .. 547 | .... | 11 .. 701 | .... | .... |
| 17 | 7 7 7 19 | 17 .. 401 | 11 .. 647 | .... | .... | .... | .... |
| 21 | .... | 19 .. 359 | .... | 41 .. 181 | 7 .. 1103 | 13 .. 617 | 53 .. 157 |
| 23 | 11 .. 593 | .... | 17 .. 419 | 13 .. 571 | .... | 71 .. 113 | 7 29 41 |
| 27 | 61 .. 107 | .... | .... | 7 .. 1061 | .... | 23 .. 349 | 11 .. 757 |
| 29 | .... | .... | .... | 17 19 23 | 59 .. 131 | 7 31 37 | .... |
| 33 | 47 .. 139 | .... | 7 .. 1019 | .... | 11 19 37 | 29 .. 277 | 13 .. 641 |
| 39 | 13 .. 503 | 7 .. 977 | 11 11 59 | 43 .. 173 | 71 .. 109 | .... | 31 .. 269 |
| 41 | 31 .. 211 | .... | 37 .. 193 | 7 .. 1063 | .... | 11 17 43 | 19 .. 439 |
| 47 | .... | 41 .. 167 | 7 .. 1021 | 11 .. 677 | 61 .. 127 | 13 .. 619 | 17 .. 491 |
| 51 | .... | 13 17 31 | .... | .... | 23 .. 337 | 83 .. 97 | 7 .. 1193 |
| 53 | .... | 7 11 89 | 23 .. 311 | 29 .. 257 | .... | .... | .... |
| 57 | 79 .. 83 | .... | 17 .. 421 | .... | .... | 7 .. 1151 | 61 .. 137 |
| 59 | 7 .. 937 | 19 19 19 | .... | .... | .... | .... | 13 .. 643 |
| 63 | .... | .... | 13 19 29 | 17 .. 439 | 7 .. 1109 | 11 .. 733 | .... |
| 69 | .... | .... | 67 .. 107 | 7 11 97 | 17 .. 457 | .... | .... |
| 71 | .... | .... | 71 .. 101 | 31 .. 241 | 19 .. 409 | 7 .. 1153 | 11 .. 761 |
| 77 | .... | 13 23 23 | .... | .... | 7 11 101 | 41 .. 197 | .... |
| 81 | .... | 7 .. 983 | 43 .. 167 | .... | 31 .. 251 | .... | 17 17 29 |
| 83 | 29 .. 227 | .... | 11 .. 653 | 7 .. 1069 | 43 .. 181 | 59 .. 137 | 83 .. 101 |
| 87 | 7 .. 941 | 71 .. 97 | .... | .... | 13 .. 599 | .... | .... |
| 89 | 11 .. 599 | 83 .. 83 | 7 13 79 | .... | .... | .... | .... |
| 93 | 19 .. 347 | 61 .. 113 | .... | 59 .. 127 | .... | .... | 7 11 109 |
| 99 | .... | .... | 23 .. 313 | .... | 11 .. 709 | 7 13 89 | 37 .. 227 |

| Nr. | 8400 | 8700 | 9000 | 9300 | 9600 | 9900 | 10200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 31 .. 271 | 7 11 113 | .... | 71 .. 131 | .... | .... | 101 .. 101 |
| 7 | 7 .. 1201 | .... | .... | 41 .. 227 | 13 .. 739 | .... | 59 .. 173 |
| 11 | 13 .. 647 | 31 .. 281 | .... | .... | 7 .. 1373 | 11 17 53 | .... |
| 13 | 47 .. 179 | .... | .... | 67 .. 139 | .... | 23 .. 431 | 7 .. 1459 |
| 17 | 19 .. 443 | 23 .. 379 | 71 .. 127 | 7 11 11 11 | 59 .. 163 | 47 .. 211 | 17 .. 601 |
| 19 | .... | .... | 29 .. 311 | .... | .... | 7 13 109 | 11 .. 929 |
| 23 | .... | 11 13 61 | 7 .. 1289 | .... | .... | .... | .... |
| 29 | .... | 7 29 43 | .... | 19 .. 491 | .... | .... | 53 .. 193 |
| 31 | .... | .... | 11 .. 821 | 7 31 43 | .... | .... | 13 .. 787 |
| 37 | 11 13 59 | .... | 7 .. 1291 | .... | 23 .. 419 | 19 .. 523 | 29 .. 353 |
| 41 | 23 .. 367 | .... | .... | .... | 31 .. 311 | .... | 7 7 11 19 |
| 43 | .... | 7 .. 1249 | .... | .... | .... | 61 .. 163 | .... |
| 47 | .... | .... | 83 .. 109 | 13 .. 719 | 11 . 877 | 7 7 7 29 | .... |
| 49 | 7 17 71 | 13 .. 673 | .... | .... | .... | .... | 37 .. 277 |
| 53 | 79 .. 107 | .... | 11 .. 823 | 47 .. 199 | 7 7 197 | 37 .. 269 | .... |
| 59 | 11 .. 769 | 19 .. 461 | .... | 7 7 191 | 13 .. 743 | 23 .. 433 | .... |
| 61 | .... | .... | 13 17 41 | 11 23 37 | .... | 7 .. 1423 | 31 .. 331 |
| 67 | .... | 11 .. 797 | .... | 17 19 29 | 7 .. 1381 | .... | .... |
| 71 | 43 .. 197 | 7 7 179 | 47 .. 193 | .... | 19 .. 509 | 13 13 59 | .... |
| 73 | 37 .. 229 | 31 .. 283 | 43 .. 211 | 7 13 103 | 17 .. 569 | .... | .... |
| 77 | 7 7 173 | 67 .. 131 | 29 .. 313 | .... | .... | 11 .. 907 | 43 .. 239 |
| 79 | 61 .. 139 | .... | 7 .. 1297 | 83 .. 113 | .... | 17 .. 587 | 19 .. 541 |
| 83 | 17 .. 499 | .... | 31 .. 293 | 11 .. 853 | 23 .. 421 | 67 .. 149 | 7 13 113 |
| 89 | 13 .. 653 | 11 17 47 | 61 .. 149 | 41 .. 229 | .... | 7 .. 1427 | .... |
| 91 | 7 .. 1213 | 59 .. 149 | .... | .... | 11 .. 881 | 97 .. 103 | 41 .. 251 |
| 97 | 29 .. 293 | 19 .. 463 | 11 .. 827 | .... | .... | 13 .. 769 | 7 .. 1471 |

| Nr. | 8500 | 8800 | 9100 | 9400 | 9700 | 10000 | 10300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .... | 13 .. 677 | 19 .. 479 | 7 17 79 | 89 .. 109 | 73 .. 137 | .... |
| 3 | 11 .. 773 | .... | .... | .... | 31 .. 313 | 7 .. 1429 | .... |
| 7 | 47 .. 181 | .... | 7 .. 1301 | 23 .. 409 | 17 .. 571 | .... | 11 .. 937 |
| 9 | 67 .. 127 | 23 .. 383 | .... | 97 .. 97 | 7 19 73 | .... | 13 13 61 |
| 13 | .... | 7 .. 1259 | 13 .. 701 | .... | 11 .. 883 | 17 19 31 | .... |
| 19 | 7 .. 1217 | .... | 11 .. 829 | .... | .... | 43 .. 233 | 17 .. 607 |
| 21 | .... | .... | 7 .. 1303 | .... | .... | 11 .. 911 | .... |
| 27 | .... | 7 13 97 | .... | 11 .. 857 | 71 .. 137 | 37 .. 271 | 23 .. 449 |
| 31 | 19 .. 449 | .... | 23 .. 397 | .... | 37 .. 263 | 7 .. 1433 | .... |
| 33 | 7 23 53 | 11 11 73 | .... | .... | .... | 79 .. 127 | .... |
| 37 | .... | .... | .... | .... | 7 13 107 | .... | .... |
| 39 | .... | .... | 13 19 37 | .... | .... | .... | 7 7 211 |
| 43 | .... | 37 .. 239 | 41 .. 223 | 7 19 71 | .... | 11 11 83 | .... |
| 49 | 83 .. 103 | .... | 7 .. 1307 | 11 .. 859 | .... | 13 .. 773 | 79 .. 131 |

| Nr. | 8500 | 8800 | 9100 | 9400 | 9700 | 10000 | 10300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 17 .. 503 | 53 .. 167 | .... | 13 .. 727 | 7 7 199 | 19 23 23 | 11 .. 941 |
| 57 | 43 .. 199 | 17 .. 521 | .... | 7 7 193 | 11 .. 887 | 89 .. 113 | .... |
| 61 | 7 .. 1223 | .... | .... | .... | 43 .. 227 | .... | 13 .. 797 |
| 63 | .... | .... | 7 7 11 17 | .... | 13 .. 751 | 29 .. 347 | 43 .. 241 |
| 67 | 13 .. 659 | .... | 89 .. 103 | .... | .... | .... | 7 .. 1481 |
| 69 | 11 19 41 | 7 7 181 | 53 .. 173 | 17 .. 557 | .... | .... | .... |
| 73 | .... | 19 .. 467 | .... | .... | 29 .. 337 | 7 .. 1439 | 11 23 41 |
| 79 | 23 .. 373 | 13 .. 683 | 67 .. 137 | .... | 7 11 127 | .... | 97 .. 107 |
| 81 | .... | 83 .. 107 | .... | 19 .. 499 | .... | 17 .. 593 | 7 .. 1483 |
| 87 | 31 .. 277 | .... | .... | 53 .. 179 | .... | 7 11 131 | 13 17 47 |
| 91 | 11 11 71 | 17 .. 523 | 7 13 101 | .... | .... | .... | .... |
| 93 | 13 .. 661 | .... | 29 .. 317 | 11 .. 863 | 7 .. 1399 | .... | 19 .. 547 |
| 97 | .... | 7 31 41 | 17 .. 541 | .... | 97 .. 101 | 23 .. 439 | 37 .. 281 |
| 99 | .... | 11 .. 809 | .... | 7 23 59 | 41 .. 239 | .... | .... |

| Nr. | 8600 | 8900 | 9200 | 9500 | 9800 | 10100 | 10400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 .. 1229 | 29 .. 307 | .... | 13 17 43 | .... | .... | 101 .. 103 |
| 9 | .... | 59 .. 151 | .... | 37 .. 257 | 17 .. 577 | 11 .. 919 | 7 .. 1487 |
| 11 | 79 .. 109 | 7 19 67 | 61 .. 151 | .... | .... | .... | 29 .. 359 |
| 17 | 7 .. 1231 | 37 .. 241 | 13 .. 709 | 31 .. 307 | .... | 67 .. 151 | 11 .. 947 |
| 21 | 37 .. 233 | 11 .. 811 | .... | .... | 7 23 61 | 29 .. 349 | 17 .. 613 |
| 23 | .... | .... | 23 .. 401 | 89 .. 107 | 11 19 47 | 53 .. 191 | 7 .. 1489 |
| 27 | .... | 79 .. 113 | .... | 7 .. 1361 | 31 .. 317 | 13 19 41 | .... |
| 29 | .... | .... | 11 .. 839 | 13 .. 733 | .... | 7 .. 1447 | .... |
| 33 | 89 .. 97 | .... | 7 .. 1319 | .... | .... | .... | .... |
| 39 | 53 .. 163 | 7 .. 1277 | .... | .... | .... | .... | 11 13 73 |
| 41 | .... | .... | .... | 7 29 47 | 13 .. 757 | .... | 53 .. 197 |
| 47 | .... | 23 .. 389 | 7 .. 1321 | .... | 43 .. 229 | 73 .. 139 | 31 .. 337 |
| 51 | 41 .. 211 | .... | 11 29 29 | .... | .... | .... | 7 .. 1493 |
| 53 | 17 .. 509 | 7 .. 1279 | 19 .. 487 | 41 .. 233 | 59 .. 167 | 11 13 71 | .... |
| 57 | 11 .. 787 | 13 13 53 | .... | 19 .. 503 | .... | 7 .. 1451 | .... |
| 59 | 7 .. 1237 | 17 17 31 | 47 .. 197 | 11 11 79 | .... | .... | .... |
| 63 | .... | .... | 59 .. 157 | 73 .. 131 | 7 .. 1409 | .... | .... |
| 69 | .... | .... | 13 23 31 | 7 .. 1367 | 71 .. 139 | .... | 19 19 29 |
| 71 | 13 23 29 | .... | 73 .. 127 | 17 .. 563 | .... | 7 .. 1453 | 37 .. 283 |
| 77 | .... | 47 .. 191 | .... | 61 .. 157 | 7 17 83 | .... | .... |
| 81 | .... | 7 .. 1283 | .... | 11 13 67 | 41 .. 241 | .... | 47 .. 223 |
| 83 | 19 .. 457 | 13 .. 691 | .... | 7 37 37 | .... | 17 .. 599 | 11 .. 953 |
| 87 | 7 17 73 | 11 19 43 | 37 .. 251 | .... | . .. | 61 .. 167 | .... |
| 89 | .... | 89 .. 101 | 7 .. 1327 | 43 .. 223 | 11 29 31 | 23 .. 443 | 17 .. 617 |
| 93 | .... | 17 23 23 | .... | 53 .. 181 | 13 .. 761 | .... | 7 .. 1499 |
| 99 | .... | .... | 17 .. 547 | 29 .. 331 | 19 .. 521 | 7 31 47 | .... |

| $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | 4096 |
| 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | 15625 |
| 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | 46656 |
| 7 | 49 | 343 | 2401 | 16807 | 117649 |
| 8 | 64 | 512 | 4096 | 32768 | 262144 |
| 9 | 81 | 729 | 6561 | 59049 | 531441 |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
| 11 | 121 | 1331 | 14641 | 161051 | 1771561 |
| 12 | 144 | 1728 | 20736 | 248832 | 2985984 |
| 13 | 169 | 2197 | 28561 | 371293 | 4826809 |
| 14 | 196 | 2744 | 38416 | 537824 | 7529536 |
| 15 | 225 | 3375 | 50625 | 759375 | 11390625 |
| 16 | 256 | 4096 | 65536 | 1048576 | 16777216 |
| 17 | 289 | 4913 | 83521 | 1419857 | 24137569 |
| 18 | 324 | 5832 | 104976 | 1889568 | 34012224 |
| 19 | 361 | 6859 | 130321 | 2476099 | 47045881 |
| 20 | 400 | 8000 | 160000 | 3200000 | 64000000 |
| 21 | 441 | 9261 | 194481 | 4084101 | 85766121 |
| 22 | 484 | 10648 | 234256 | 5153632 | 113379904 |
| 23 | 529 | 12167 | 279841 | 6436343 | 148035889 |
| 24 | 576 | 13824 | 331776 | 7962624 | 191102976 |
| 25 | 625 | 15625 | 390625 | 9765625 | 244140625 |
| 26 | 676 | 17576 | 456976 | 11881376 | 308915776 |
| 27 | 729 | 19683 | 531441 | 14348907 | 387420489 |
| 28 | 784 | 21952 | 614656 | 17210368 | 481890304 |
| 29 | 841 | 24389 | 707281 | 20511149 | 594823321 |
| 30 | 900 | 27000 | 810000 | 24300000 | 729000000 |
| 31 | 961 | 29791 | 923521 | 28629151 | 887503681 |
| 32 | 1024 | 32768 | 1048576 | 33554432 | 1073741824 |
| 33 | 1089 | 35937 | 1185921 | 39135393 | 1291467969 |
| 34 | 1156 | 39304 | 1336336 | 45435424 | 1544804416 |
| 35 | 1225 | 42875 | 1500625 | 52521875 | 1838265625 |
| 36 | 1296 | 46656 | 1679616 | 60466176 | 2176782336 |
| 37 | 1369 | 50653 | 1874161 | 69343957 | 2565726409 |
| 38 | 1444 | 54872 | 2085136 | 79235168 | 3010936384 |
| 39 | 1521 | 59319 | 2313441 | 90224199 | 3518743761 |
| 40 | 1600 | 64000 | 2560000 | 102400000 | 4096000000 |
| 41 | 1681 | 68921 | 2825761 | 115856201 | 4750104241 |
| 42 | 1764 | 74088 | 3111696 | 130691232 | 5489031744 |
| 43 | 1849 | 79507 | 3418801 | 147008443 | 6321363049 |
| 44 | 1936 | 85184 | 3748096 | 164916224 | 7256313856 |
| 45 | 2025 | 91125 | 4100625 | 184528125 | 8303765625 |
| 46 | 2116 | 97336 | 4477456 | 205962976 | 9474296896 |
| 47 | 2209 | 103823 | 4879681 | 229345007 | 10779215329 |
| 48 | 2304 | 110592 | 5308416 | 254803968 | 12230590464 |
| 49 | 2401 | 117649 | 5764801 | 282475249 | 13841287201 |
| 50 | 2500 | 125000 | 6250000 | 312500000 | 15625000000 |

| $x$ | $x^2$ | $x^3$ | $x^4$ | $x^5$ | $x^6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 2601 | 132651 | 6765201 | 345025251 | 17596287801 |
| 52 | 2704 | 140608 | 7311616 | 380204032 | 19770609664 |
| 53 | 2809 | 148877 | 7890481 | 418195493 | 22164361129 |
| 54 | 2916 | 157464 | 8503056 | 459165024 | 24794911296 |
| 55 | 3025 | 166375 | 9150625 | 503284375 | 27680640625 |
| 56 | 3136 | 175616 | 9834496 | 550731776 | 30840979456 |
| 57 | 3249 | 185193 | 10556001 | 601692057 | 34296447249 |
| 58 | 3364 | 195112 | 11316496 | 656356768 | 38068692544 |
| 59 | 3481 | 205379 | 12117361 | 714924299 | 42180533641 |
| 60 | 3600 | 216000 | 12960000 | 777600000 | 46656000000 |
| 61 | 3721 | 226981 | 13845841 | 844596301 | 51520374361 |
| 62 | 3844 | 238328 | 14776336 | 916132832 | 56800235584 |
| 63 | 3969 | 250047 | 15752961 | 992436543 | 62523502209 |
| 64 | 4096 | 262144 | 16777216 | 1073741824 | 68719476736 |
| 65 | 4225 | 274625 | 17850625 | 1160290625 | 75418890625 |
| 66 | 4356 | 287496 | 18974736 | 1252332576 | 82653950016 |
| 67 | 4489 | 300763 | 20151121 | 1350125107 | 90458382169 |
| 68 | 4624 | 314432 | 21381876 | 1453933568 | 98867482624 |
| 69 | 4761 | 328509 | 22667121 | 1564031349 | 107918163081 |
| 70 | 4900 | 343000 | 24010000 | 1680700000 | 117649000000 |
| 71 | 5041 | 357911 | 25411681 | 1804229351 | 128100283921 |
| 72 | 5184 | 373248 | 26873856 | 1934917632 | 139314069504 |
| 73 | 5329 | 389017 | 28398241 | 2073071593 | 151334226289 |
| 74 | 5476 | 405224 | 29986576 | 2219006624 | 164206490176 |
| 75 | 5625 | 421875 | 31640625 | 2373046875 | 177978515625 |
| 76 | 5776 | 438976 | 33362176 | 2535525376 | 192699928576 |
| 77 | 5929 | 456533 | 35153041 | 2706784157 | 208422380089 |
| 78 | 6084 | 474552 | 37015056 | 2887174368 | 225199600704 |
| 79 | 6241 | 493039 | 38950081 | 3077056399 | 243087455521 |
| 80 | 6400 | 512000 | 40960000 | 3276800000 | 262144000000 |
| 81 | 6561 | 531441 | 43046721 | 3486784401 | 282429536481 |
| 82 | 6724 | 551368 | 45212176 | 3707398432 | 304006671424 |
| 83 | 6889 | 571787 | 47458321 | 3939040643 | 326940373369 |
| 84 | 7056 | 592704 | 49787136 | 4182119424 | 351298031616 |
| 85 | 7225 | 614125 | 52200625 | 4437053125 | 377149515625 |
| 86 | 7396 | 636056 | 54700816 | 4704270176 | 404567235136 |
| 87 | 7569 | 658503 | 57289761 | 4984209207 | 433626201009 |
| 88 | 7744 | 681472 | 59969536 | 5277319168 | 464404086784 |
| 89 | 7921 | 704969 | 62742241 | 5584059449 | 496981290961 |
| 90 | 8100 | 729000 | 65610000 | 5904900000 | 531441000000 |
| 91 | 8281 | 753571 | 68574961 | 6240321451 | 567869252041 |
| 92 | 8464 | 778688 | 71639296 | 6590815232 | 606355001344 |
| 93 | 8649 | 804357 | 74805201 | 6956883693 | 646990183449 |
| 94 | 8836 | 830584 | 78074896 | 7339040224 | 689869781056 |
| 95 | 9025 | 857375 | 81450625 | 7737809375 | 735091890625 |
| 96 | 9216 | 884736 | 84934656 | 8153726976 | 782757789696 |
| 97 | 9409 | 912673 | 88529281 | 8587340257 | 832972004929 |
| 98 | 9604 | 941192 | 92236816 | 9039207968 | 885842380864 |
| 99 | 9801 | 970299 | 96059601 | 9509900499 | 941480149401 |
| 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 | 10000000000 | 1000000000000 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10201 | 40401 | 90601 | 160801 |
| 2 | 4 | 10404 | 40804 | 91204 | 161604 |
| 3 | 9 | 10609 | 41209 | 91809 | 162409 |
| 4 | 16 | 10816 | 41616 | 92416 | 163216 |
| 5 | 25 | 11025 | 42025 | 93025 | 164025 |
| 6 | 36 | 11236 | 42436 | 93636 | 164836 |
| 7 | 49 | 11449 | 42849 | 94249 | 165649 |
| 8 | 64 | 11664 | 43264 | 94864 | 166464 |
| 9 | 81 | 11881 | 43681 | 95481 | 167281 |
| 10 | 100 | 12100 | 44100 | 96100 | 168100 |
| 11 | 121 | 12321 | 44521 | 96721 | 168921 |
| 12 | 144 | 12544 | 44944 | 97344 | 169744 |
| 13 | 169 | 12769 | 45369 | 97969 | 170569 |
| 14 | 196 | 12996 | 45796 | 98596 | 171396 |
| 15 | 225 | 13225 | 46225 | 99225 | 172225 |
| 16 | 256 | 13456 | 46656 | 99856 | 173056 |
| 17 | 289 | 13689 | 47089 | 100489 | 173889 |
| 18 | 324 | 13924 | 47524 | 101124 | 174724 |
| 19 | 361 | 14161 | 47961 | 101761 | 175561 |
| 20 | 400 | 14400 | 48400 | 102400 | 176400 |
| 21 | 441 | 14641 | 48841 | 103041 | 177241 |
| 22 | 484 | 14884 | 49284 | 103684 | 178084 |
| 23 | 529 | 15129 | 49729 | 104329 | 178929 |
| 24 | 576 | 15376 | 50176 | 104976 | 179776 |
| 25 | 625 | 15625 | 50625 | 105625 | 180625 |
| 26 | 676 | 15876 | 51076 | 106276 | 181476 |
| 27 | 729 | 16129 | 51529 | 106929 | 182329 |
| 28 | 784 | 16384 | 51984 | 107584 | 183184 |
| 29 | 841 | 16641 | 52441 | 108241 | 184041 |
| 30 | 900 | 16900 | 52900 | 108900 | 184900 |
| 31 | 961 | 17161 | 53361 | 109561 | 185761 |
| 32 | 1024 | 17424 | 53824 | 110224 | 186624 |
| 33 | 1089 | 17689 | 54289 | 110889 | 187489 |
| 34 | 1156 | 17956 | 54756 | 111556 | 188356 |
| 35 | 1225 | 18225 | 55225 | 112225 | 189225 |
| 36 | 1296 | 18496 | 55696 | 112896 | 190096 |
| 37 | 1369 | 18769 | 56169 | 113569 | 190969 |
| 38 | 1444 | 19044 | 56644 | 114244 | 191844 |
| 39 | 1521 | 19321 | 57121 | 114921 | 192721 |
| 40 | 1600 | 19600 | 57600 | 115600 | 193600 |
| 41 | 1681 | 19881 | 58081 | 116281 | 194481 |
| 42 | 1764 | 20164 | 58564 | 116964 | 195364 |
| 43 | 1849 | 20449 | 59049 | 117649 | 196249 |
| 44 | 1936 | 20736 | 59536 | 118336 | 197136 |
| 45 | 2025 | 21025 | 60025 | 119025 | 198025 |
| 46 | 2116 | 21316 | 60516 | 119716 | 198916 |
| 47 | 2209 | 21609 | 61009 | 120409 | 199809 |
| 48 | 2304 | 21904 | 61504 | 121104 | 200704 |
| 49 | 2401 | 22201 | 62001 | 121801 | 201601 |
| 50 | 2500 | 22500 | 62500 | 122500 | 202500 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 251001 | 361201 | 491401 | 641601 | 811801 |
| 2 | 252004 | 362404 | 492804 | 643204 | 813604 |
| 3 | 253009 | 363609 | 494209 | 644809 | 815409 |
| 4 | 254016 | 364816 | 495616 | 646416 | 817216 |
| 5 | 255025 | 366025 | 497025 | 648025 | 819025 |
| 6 | 256036 | 367236 | 498436 | 649636 | 820836 |
| 7 | 257049 | 368449 | 499849 | 651249 | 822649 |
| 8 | 258064 | 369664 | 501264 | 652864 | 824464 |
| 9 | 259081 | 370881 | 502681 | 654481 | 826281 |
| 10 | 260100 | 372100 | 504100 | 656100 | 828100 |
| 11 | 261121 | 373321 | 505521 | 657721 | 829921 |
| 12 | 262144 | 374544 | 506944 | 659344 | 831744 |
| 13 | 263169 | 375769 | 508369 | 660969 | 833569 |
| 14 | 264196 | 376996 | 509796 | 662596 | 835396 |
| 15 | 265225 | 378225 | 511225 | 664225 | 837225 |
| 16 | 266256 | 379456 | 512656 | 665856 | 839056 |
| 17 | 267289 | 380689 | 514089 | 667489 | 840889 |
| 18 | 268324 | 381924 | 515524 | 669124 | 842724 |
| 19 | 269361 | 383161 | 516961 | 670761 | 844561 |
| 20 | 270400 | 384400 | 518400 | 672400 | 846400 |
| 21 | 271441 | 385641 | 519841 | 674041 | 848241 |
| 22 | 272484 | 386884 | 521284 | 675684 | 850084 |
| 23 | 273529 | 388129 | 522729 | 677329 | 851929 |
| 24 | 274576 | 389376 | 524176 | 678976 | 853776 |
| 25 | 275625 | 390625 | 525625 | 680625 | 855625 |
| 26 | 276676 | 391876 | 527076 | 682276 | 857476 |
| 27 | 277729 | 393129 | 528529 | 683929 | 859329 |
| 28 | 278784 | 394384 | 529984 | 685584 | 861184 |
| 29 | 279841 | 395641 | 531441 | 687241 | 863041 |
| 30 | 280900 | 396900 | 532900 | 688900 | 864900 |
| 31 | 281961 | 398161 | 534361 | 690561 | 866761 |
| 32 | 283024 | 399424 | 535824 | 692224 | 868624 |
| 33 | 284089 | 400689 | 537289 | 693889 | 870489 |
| 34 | 285156 | 401956 | 538756 | 695556 | 872356 |
| 35 | 286225 | 403225 | 540225 | 697225 | 874225 |
| 36 | 287296 | 404496 | 541696 | 698896 | 876096 |
| 37 | 288369 | 405769 | 543169 | 700569 | 877969 |
| 38 | 289444 | 407044 | 544644 | 702244 | 879844 |
| 39 | 290521 | 408321 | 546121 | 703921 | 881721 |
| 40 | 291600 | 409600 | 547600 | 705600 | 883600 |
| 41 | 292681 | 410881 | 549081 | 707281 | 885481 |
| 42 | 293764 | 412164 | 550564 | 708964 | 887364 |
| 43 | 294849 | 413449 | 552049 | 710649 | 889249 |
| 44 | 295936 | 414736 | 553536 | 712336 | 891136 |
| 45 | 297025 | 416025 | 555025 | 714025 | 893025 |
| 46 | 298116 | 417316 | 556516 | 715716 | 894916 |
| 47 | 299209 | 418609 | 558009 | 717409 | 896809 |
| 48 | 300304 | 419904 | 559504 | 719104 | 898704 |
| 49 | 301401 | 421201 | 561001 | 720801 | 900601 |
| 50 | 302500 | 422500 | 562500 | 722500 | 902500 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 2601 | 22801 | 63001 | 123201 | 203401 |
| 52 | 2704 | 23104 | 63504 | 123904 | 204304 |
| 53 | 2809 | 23409 | 64009 | 124609 | 205209 |
| 54 | 2916 | 23716 | 64516 | 125316 | 206116 |
| 55 | 3025 | 24025 | 65025 | 126025 | 207025 |
| 56 | 3136 | 24336 | 65536 | 126736 | 207936 |
| 57 | 3249 | 24649 | 66049 | 127449 | 208849 |
| 58 | 3364 | 24964 | 66564 | 128164 | 209764 |
| 59 | 3481 | 25281 | 67081 | 128881 | 210681 |
| 60 | 3600 | 25600 | 67600 | 129600 | 211600 |
| 61 | 3721 | 25921 | 68121 | 130321 | 212521 |
| 62 | 3844 | 26244 | 68644 | 131044 | 213444 |
| 63 | 3969 | 26569 | 69169 | 131769 | 214369 |
| 64 | 4096 | 26896 | 69696 | 132496 | 215296 |
| 65 | 4225 | 27225 | 70225 | 133225 | 216225 |
| 66 | 4356 | 27556 | 70756 | 133956 | 217156 |
| 67 | 4489 | 27889 | 71289 | 134689 | 218089 |
| 68 | 4624 | 28224 | 71824 | 135424 | 219024 |
| 69 | 4761 | 28561 | 72361 | 136161 | 219961 |
| 70 | 4900 | 28900 | 72900 | 136900 | 220900 |
| 71 | 5041 | 29241 | 73441 | 137641 | 221841 |
| 72 | 5184 | 29584 | 73984 | 138384 | 222784 |
| 73 | 5329 | 29929 | 74529 | 139129 | 223729 |
| 74 | 5476 | 30276 | 75076 | 139876 | 424676 |
| 75 | 5625 | 30625 | 75625 | 140625 | 225625 |
| 76 | 5776 | 30976 | 76176 | 141376 | 226576 |
| 77 | 5929 | 31329 | 76729 | 142129 | 227529 |
| 78 | 6084 | 31684 | 77284 | 142884 | 228484 |
| 79 | 6241 | 32041 | 77841 | 143641 | 229441 |
| 80 | 6400 | 32400 | 78400 | 144400 | 230400 |
| 81 | 6561 | 32761 | 78961 | 145161 | 231361 |
| 82 | 6724 | 33124 | 79524 | 145924 | 232324 |
| 83 | 6889 | 33489 | 80089 | 146689 | 233289 |
| 84 | 7056 | 33856 | 80656 | 147456 | 234256 |
| 85 | 7225 | 34225 | 81225 | 148225 | 235225 |
| 86 | 7396 | 34596 | 81796 | 148996 | 236196 |
| 87 | 7569 | 34969 | 82369 | 149769 | 237169 |
| 88 | 7744 | 35344 | 82944 | 150544 | 238144 |
| 89 | 7921 | 35721 | 83521 | 151321 | 239121 |
| 90 | 8100 | 36100 | 84100 | 152100 | 240100 |
| 91 | 8281 | 36481 | 84681 | 152881 | 241081 |
| 92 | 8464 | 36864 | 85264 | 153664 | 242064 |
| 93 | 8649 | 37249 | 85849 | 154449 | 243049 |
| 94 | 8836 | 37636 | 86436 | 155236 | 244036 |
| 95 | 9025 | 38025 | 87025 | 156025 | 245025 |
| 96 | 9216 | 38416 | 87616 | 156816 | 246016 |
| 97 | 9409 | 38809 | 88209 | 157609 | 247009 |
| 98 | 9604 | 39204 | 88804 | 158404 | 248004 |
| 99 | 9801 | 39601 | 89401 | 159201 | 249001 |
| 100 | 10000 | 40000 | 90000 | 160000 | 250000 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 303601 | 423801 | 564001 | 724201 | 904401 |
| 52 | 304704 | 425104 | 565504 | 725904 | 906304 |
| 53 | 305809 | 426409 | 567009 | 727609 | 908209 |
| 54 | 306916 | 427716 | 568516 | 729316 | 910116 |
| 55 | 308025 | 429025 | 570025 | 731025 | 912025 |
| 56 | 309136 | 430336 | 571536 | 732736 | 913936 |
| 57 | 310249 | 431649 | 573049 | 734449 | 915849 |
| 58 | 311364 | 432964 | 574564 | 736164 | 917764 |
| 59 | 312481 | 434281 | 576081 | 737881 | 919681 |
| 60 | 313600 | 435600 | 577600 | 739600 | 921600 |
| 61 | 314721 | 436921 | 579121 | 741321 | 923521 |
| 62 | 315844 | 438244 | 580644 | 743044 | 925444 |
| 63 | 316969 | 439569 | 582169 | 744769 | 927369 |
| 64 | 318096 | 440896 | 583696 | 746496 | 929296 |
| 65 | 319225 | 442225 | 585225 | 748225 | 931225 |
| 66 | 320356 | 443556 | 586756 | 749956 | 933156 |
| 67 | 321489 | 444889 | 588289 | 751689 | 935089 |
| 68 | 322624 | 446224 | 589824 | 753424 | 937024 |
| 69 | 323761 | 447561 | 591361 | 755161 | 938961 |
| 70 | 324900 | 448900 | 592900 | 756900 | 940900 |
| 71 | 326041 | 450241 | 594441 | 758641 | 942841 |
| 72 | 327184 | 451584 | 595984 | 760384 | 944784 |
| 73 | 328329 | 452929 | 597529 | 762129 | 946729 |
| 74 | 329476 | 454276 | 599076 | 763876 | 948676 |
| 75 | 330625 | 455625 | 600625 | 765625 | 950625 |
| 76 | 331776 | 456976 | 602176 | 767376 | 952576 |
| 77 | 332929 | 458329 | 603729 | 769129 | 954529 |
| 78 | 334084 | 459684 | 605284 | 770884 | 956484 |
| 79 | 335241 | 461041 | 606841 | 772641 | 958441 |
| 80 | 336400 | 462400 | 608400 | 774400 | 960400 |
| 81 | 337561 | 463761 | 609961 | 776161 | 962361 |
| 82 | 338724 | 465124 | 611524 | 777924 | 964324 |
| 83 | 339889 | 466489 | 613089 | 779689 | 966289 |
| 84 | 341056 | 467856 | 614656 | 781456 | 968256 |
| 85 | 342225 | 469225 | 616225 | 783225 | 970225 |
| 86 | 343396 | 470596 | 617796 | 784996 | 972196 |
| 87 | 344569 | 471969 | 619369 | 786769 | 974169 |
| 88 | 345744 | 473344 | 620944 | 788544 | 976144 |
| 89 | 346921 | 474721 | 622521 | 790321 | 978121 |
| 90 | 348100 | 476100 | 624100 | 792100 | 980100 |
| 91 | 349281 | 477481 | 625681 | 793881 | 982081 |
| 92 | 350464 | 478864 | 627264 | 795664 | 984064 |
| 93 | 351649 | 480249 | 628849 | 797449 | 986049 |
| 94 | 352836 | 481636 | 630436 | 799236 | 988036 |
| 95 | 354025 | 483025 | 632025 | 801025 | 990025 |
| 96 | 355216 | 484416 | 633616 | 802816 | 992016 |
| 97 | 356409 | 485809 | 635209 | 804609 | 994009 |
| 98 | 357604 | 487204 | 636804 | 806404 | 996004 |
| 99 | 358801 | 488601 | 638401 | 808201 | 998001 |
| 100 | 360000 | 490000 | 640000 | 810000 | 1000000 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1030301 | 8120601 | 27270901 | 64481201 |
| 2 | 8 | 1061208 | 8242408 | 27543608 | 64964808 |
| 3 | 27 | 1092727 | 8365427 | 27818127 | 65450827 |
| 4 | 64 | 1124864 | 8489664 | 28094464 | 65939264 |
| 5 | 125 | 1157625 | 8615125 | 28372625 | 66430125 |
| 6 | 216 | 1191016 | 8741816 | 28652616 | 66923416 |
| 7 | 343 | 1225043 | 8869743 | 28934443 | 67419143 |
| 8 | 512 | 1259712 | 8998912 | 29218112 | 67917312 |
| 9 | 729 | 1295029 | 9129329 | 29503629 | 68417929 |
| 10 | 1000 | 1331000 | 9261000 | 29791000 | 68921000 |
| 11 | 1331 | 1367631 | 9393931 | 30080231 | 69426531 |
| 12 | 1728 | 1404928 | 9528128 | 30371328 | 69934528 |
| 13 | 2197 | 1442897 | 9663597 | 30664297 | 70444997 |
| 14 | 2744 | 1481544 | 9800344 | 30959144 | 70957944 |
| 15 | 3375 | 1520875 | 9938375 | 31255875 | 71473375 |
| 16 | 4096 | 1560896 | 10077696 | 31554496 | 71991296 |
| 17 | 4913 | 1601613 | 10218313 | 31855013 | 72511713 |
| 18 | 5832 | 1643032 | 10360232 | 32157432 | 73034632 |
| 19 | 6859 | 1685159 | 10503459 | 32461759 | 73560059 |
| 20 | 8000 | 1728000 | 10648000 | 32768000 | 74088000 |
| 21 | 9261 | 1771561 | 10793861 | 33076161 | 74618461 |
| 22 | 10648 | 1815848 | 10941048 | 33386248 | 75151448 |
| 23 | 12167 | 1860867 | 11089567 | 33698267 | 75686967 |
| 24 | 13824 | 1906624 | 11239424 | 34012224 | 76225024 |
| 25 | 15625 | 1953125 | 11390625 | 34328125 | 76765625 |
| 26 | 17576 | 2000376 | 11543176 | 34645976 | 77308776 |
| 27 | 19683 | 2048383 | 11697083 | 34965783 | 77854483 |
| 28 | 21952 | 2097152 | 11852352 | 35287552 | 78402752 |
| 29 | 24389 | 2146689 | 12008989 | 35611289 | 78953589 |
| 30 | 27000 | 2197000 | 12167000 | 35937000 | 79507000 |
| 31 | 29791 | 2248091 | 12326391 | 36264691 | 80065991 |
| 32 | 32768 | 2299968 | 12487168 | 36594368 | 80621568 |
| 33 | 35937 | 2352637 | 12649337 | 36926037 | 81182737 |
| 34 | 39304 | 2406104 | 12812904 | 37259704 | 81746504 |
| 35 | 42875 | 2460375 | 12977875 | 37595375 | 82312875 |
| 36 | 46656 | 2515456 | 13144256 | 37933056 | 82881856 |
| 37 | 50653 | 2571353 | 13312053 | 38272753 | 83453453 |
| 38 | 54872 | 2628072 | 13481272 | 38614472 | 84027672 |
| 39 | 59319 | 2685619 | 13651919 | 38958219 | 84604519 |
| 40 | 64000 | 2744000 | 13824000 | 39304000 | 85184000 |
| 41 | 68921 | 2803221 | 13997521 | 39651821 | 85766121 |
| 42 | 74088 | 2863288 | 14172488 | 40001688 | 86350888 |
| 43 | 79507 | 2924207 | 14348907 | 40353607 | 86938307 |
| 44 | 85184 | 2985984 | 14526784 | 40707584 | 87528384 |
| 45 | 91125 | 3048625 | 14706125 | 41063625 | 88121125 |
| 46 | 97336 | 3112136 | 14886936 | 41421736 | 88716536 |
| 47 | 103823 | 3176523 | 15069223 | 41781923 | 89314623 |
| 48 | 110592 | 3241792 | 15252992 | 42144192 | 89915392 |
| 49 | 117649 | 3307949 | 15438249 | 42508549 | 90518849 |
| 50 | 125000 | 3375000 | 15625000 | 42875000 | 91125000 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 125751501 | 217081801 | 344472101 | 513922401 | 731432701 |
| 2 | 126506008 | 218167208 | 345948408 | 515849608 | 733870808 |
| 3 | 127263527 | 219256227 | 347428927 | 517781627 | 736314327 |
| 4 | 128024064 | 220348864 | 348913664 | 519718464 | 738763264 |
| 5 | 128787625 | 221445125 | 350402625 | 521660125 | 741217625 |
| 6 | 129554216 | 222545016 | 351895816 | 523606616 | 743677416 |
| 7 | 130323843 | 223648543 | 353393243 | 525557943 | 746142643 |
| 8 | 131096512 | 224755712 | 354894912 | 527514112 | 748613312 |
| 9 | 131872229 | 225866529 | 356400829 | 529475129 | 751089429 |
| 10 | 132651000 | 226981000 | 357911000 | 531441000 | 753571000 |
| 11 | 133432831 | 228099131 | 359425431 | 533411731 | 756058031 |
| 12 | 134217728 | 229220928 | 360944128 | 535387328 | 758550528 |
| 13 | 135005697 | 230346397 | 362467097 | 537367797 | 761048497 |
| 14 | 135796744 | 231475544 | 363994344 | 539353144 | 763551944 |
| 15 | 136590875 | 232608375 | 365525875 | 541343375 | 766060875 |
| 16 | 137388096 | 233744896 | 367061696 | 543338496 | 768575296 |
| 17 | 138188413 | 234885113 | 368601813 | 545338513 | 771095213 |
| 18 | 138991832 | 236029032 | 370146232 | 547343432 | 773620632 |
| 19 | 139798359 | 237176659 | 371694959 | 549353259 | 776151559 |
| 20 | 140608000 | 238328000 | 373248000 | 551368000 | 778688000 |
| 21 | 141420761 | 239483061 | 374805361 | 553387661 | 781229961 |
| 22 | 142236648 | 240641848 | 376367048 | 555412248 | 783777448 |
| 23 | 143055667 | 241804367 | 377933067 | 557441767 | 786330467 |
| 24 | 143877824 | 242970624 | 379503424 | 559476224 | 788889024 |
| 25 | 144703125 | 244140625 | 381078125 | 561515625 | 791453125 |
| 26 | 145531576 | 245314376 | 382657176 | 563559976 | 794022776 |
| 27 | 146363183 | 246491883 | 384240583 | 565609283 | 796597983 |
| 28 | 147197952 | 247673152 | 385828352 | 567663552 | 799178752 |
| 29 | 148035889 | 248858189 | 387420489 | 569722789 | 801765089 |
| 30 | 148877000 | 250047000 | 389017000 | 571787000 | 804357000 |
| 31 | 149721291 | 251239591 | 390617891 | 573856191 | 806954491 |
| 32 | 150568768 | 252435968 | 392223168 | 575930368 | 809557568 |
| 33 | 151419437 | 253636137 | 393832837 | 578009537 | 812166237 |
| 34 | 152273304 | 254840104 | 395446904 | 580093704 | 814780504 |
| 35 | 153130375 | 256047875 | 397065375 | 582182875 | 817400375 |
| 36 | 153990656 | 257259456 | 398688256 | 584277056 | 820025856 |
| 37 | 154854153 | 258474853 | 400315553 | 586376253 | 822656953 |
| 38 | 155720872 | 259694072 | 401947272 | 588480472 | 825293672 |
| 39 | 156590819 | 260917119 | 403583419 | 590589719 | 827936019 |
| 40 | 157464000 | 262144000 | 405224000 | 592704000 | 830584000 |
| 41 | 158340421 | 263374721 | 406869021 | 594823321 | 833237621 |
| 42 | 159220088 | 264609288 | 408518488 | 596947688 | 835896888 |
| 43 | 160103007 | 265847707 | 410172407 | 599077107 | 838561807 |
| 44 | 160989184 | 267089984 | 411830784 | 601211584 | 841232384 |
| 45 | 161878625 | 268336125 | 413493625 | 603351125 | 843908625 |
| 46 | 162771336 | 269586136 | 415160936 | 605495736 | 846590536 |
| 47 | 163667323 | 270840023 | 416832723 | 607645423 | 849278123 |
| 48 | 164566592 | 272097792 | 418508992 | 609800192 | 851971392 |
| 49 | 16469149 | 273359449 | 420189749 | 611960049 | 854670349 |
| 50 | 166375000 | 274625000 | 421875000 | 614125000 | 857375000 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 132651 | 3442951 | 15813251 | 43243551 | 91733851 |
| 52 | 140608 | 3511808 | 16003008 | 43614208 | 92345408 |
| 53 | 148877 | 3581577 | 16194277 | 43986977 | 92959677 |
| 54 | 157464 | 3652264 | 16387064 | 44361864 | 93576664 |
| 55 | 166375 | 3723875 | 16581375 | 44738875 | 94196375 |
| 56 | 175616 | 3796416 | 16777216 | 45118016 | 94818816 |
| 57 | 185193 | 3869893 | 16974593 | 45499293 | 95443993 |
| 58 | 195112 | 3944312 | 17173512 | 45882712 | 96071912 |
| 59 | 205379 | 4019679 | 17373979 | 46268279 | 96702579 |
| 60 | 216000 | 4096000 | 17576000 | 46656000 | 97336000 |
| 61 | 226981 | 4173281 | 17779581 | 47045881 | 97972181 |
| 62 | 238328 | 4251528 | 17984728 | 47437928 | 98611128 |
| 63 | 250047 | 4330747 | 18191447 | 47832147 | 99252847 |
| 64 | 262144 | 4410944 | 18399744 | 48228544 | 99897344 |
| 65 | 274625 | 4492125 | 18609625 | 48627125 | 100544625 |
| 66 | 287496 | 4574296 | 18821096 | 49027896 | 101194696 |
| 67 | 300763 | 4657463 | 19034163 | 49430863 | 101847563 |
| 68 | 314432 | 4741632 | 19248832 | 49836032 | 102503232 |
| 69 | 328509 | 4826809 | 19465109 | 50243409 | 103161709 |
| 70 | 343000 | 4913000 | 19683000 | 50653000 | 103823000 |
| 71 | 357911 | 5000211 | 19902511 | 51064811 | 104487111 |
| 72 | 373248 | 5088448 | 20123648 | 51478848 | 105154048 |
| 73 | 389017 | 5177717 | 20346417 | 51895117 | 105823817 |
| 74 | 405224 | 5268024 | 20570824 | 52313624 | 106496424 |
| 75 | 421875 | 5359375 | 20796875 | 52734375 | 107171875 |
| 76 | 438976 | 5451776 | 21024576 | 53157376 | 107850176 |
| 77 | 456533 | 5545233 | 21253933 | 53582633 | 108531333 |
| 78 | 474552 | 5639752 | 21484952 | 54010152 | 109215352 |
| 79 | 493039 | 5735339 | 21717639 | 54439939 | 109902239 |
| 80 | 512000 | 5832000 | 21952000 | 54872000 | 110592000 |
| 81 | 531441 | 5929741 | 22188041 | 55306341 | 111284641 |
| 82 | 551368 | 6028568 | 22425768 | 55742968 | 111980168 |
| 83 | 571787 | 6128487 | 22665187 | 56181887 | 112678587 |
| 84 | 592704 | 6229504 | 22906304 | 56623104 | 113379904 |
| 85 | 614125 | 6331625 | 23149125 | 57066625 | 114084125 |
| 86 | 636056 | 6434856 | 23393656 | 57512456 | 114791256 |
| 87 | 658503 | 6539203 | 23639903 | 57960603 | 115501303 |
| 88 | 681472 | 6644672 | 23887872 | 58411072 | 116214272 |
| 89 | 704969 | 6751269 | 24137569 | 58863869 | 116930169 |
| 90 | 729000 | 6859000 | 24389000 | 59319000 | 117649000 |
| 91 | 753571 | 6967871 | 24642171 | 59776471 | 118370771 |
| 92 | 778688 | 7077888 | 24897088 | 60236288 | 119095488 |
| 93 | 804357 | 7189057 | 25153757 | 60698457 | 119823157 |
| 94 | 830584 | 7301384 | 25412184 | 61162984 | 120553784 |
| 95 | 857375 | 7414875 | 25672375 | 61629875 | 121287375 |
| 96 | 884736 | 7529536 | 25934336 | 62099136 | 122023936 |
| 97 | 912673 | 7645373 | 26198073 | 62570773 | 122763473 |
| 98 | 941192 | 7762392 | 26463592 | 63044792 | 123505992 |
| 99 | 970299 | 7880599 | 26730899 | 63521199 | 124251499 |
| 100 | 1000000 | 8000000 | 27000000 | 64000000 | 125000000 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 167284151 | 275894451 | 423564751 | 616295051 | 860085351 |
| 52 | 168196608 | 277167808 | 425259008 | 618470208 | 862801408 |
| 53 | 169112377 | 278445077 | 426957777 | 620650477 | 865523177 |
| 54 | 170031464 | 279726264 | 428661064 | 622835864 | 868250664 |
| 55 | 170953875 | 281011375 | 430368875 | 625026375 | 870983875 |
| 56 | 171879616 | 282300416 | 432081216 | 627222016 | 873722816 |
| 57 | 172808693 | 283593393 | 433798093 | 629422793 | 876467493 |
| 58 | 173741112 | 284890312 | 435519512 | 631628712 | 879217912 |
| 59 | 174676879 | 286191179 | 437245479 | 633839779 | 881974079 |
| 60 | 175616000 | 287496000 | 438976000 | 636056000 | 884736000 |
| 61 | 176558481 | 288804781 | 440711081 | 638277381 | 887503681 |
| 62 | 177504328 | 290117528 | 442450728 | 640503928 | 890277128 |
| 63 | 178453547 | 291434247 | 444194947 | 642735647 | 893056347 |
| 64 | 179406144 | 292754944 | 445943744 | 644972544 | 895841344 |
| 65 | 180362125 | 294079625 | 447697125 | 647214625 | 898632125 |
| 66 | 181321496 | 295408296 | 449455096 | 649461896 | 901428696 |
| 67 | 182284263 | 296740963 | 451217663 | 651714363 | 904231063 |
| 68 | 183250432 | 298077632 | 452984832 | 653972032 | 907039232 |
| 69 | 184220009 | 299418309 | 454756609 | 656234909 | 909853209 |
| 70 | 185193000 | 300763000 | 456533000 | 658503000 | 912673000 |
| 71 | 186169411 | 302111711 | 458314011 | 660776311 | 915498611 |
| 72 | 187149248 | 303464448 | 460099648 | 663054848 | 918330048 |
| 73 | 188132517 | 304821217 | 461889917 | 665338617 | 921167317 |
| 74 | 189119224 | 306182024 | 463684824 | 667627624 | 924010424 |
| 75 | 190109375 | 307546875 | 465484375 | 669921875 | 926859375 |
| 76 | 191102976 | 308915776 | 467288576 | 672221376 | 929714176 |
| 77 | 192100033 | 310288733 | 469097433 | 674526133 | 932574833 |
| 78 | 193100552 | 311665752 | 470910952 | 676836152 | 935441352 |
| 79 | 194104539 | 313046839 | 472729139 | 679151439 | 938313739 |
| 80 | 195112000 | 314432000 | 474552000 | 681472000 | 941192000 |
| 81 | 196122941 | 315821241 | 476379541 | 683797841 | 944076141 |
| 82 | 197137368 | 317214568 | 478211768 | 686128968 | 946966168 |
| 83 | 198155287 | 318611987 | 480048687 | 688465387 | 949862087 |
| 84 | 199176704 | 320013504 | 481890304 | 690807104 | 952763904 |
| 85 | 200201625 | 321419125 | 483736625 | 693154125 | 955671625 |
| 86 | 201230056 | 322828856 | 485587656 | 695506456 | 958585256 |
| 87 | 202262003 | 324242703 | 487443403 | 697864103 | 961504803 |
| 88 | 203297472 | 325660672 | 489303872 | 700227072 | 964430272 |
| 89 | 204336469 | 327082769 | 491169069 | 702595369 | 967361669 |
| 90 | 205379000 | 328509000 | 493039000 | 704969000 | 970299000 |
| 91 | 206425071 | 329939371 | 494913671 | 707347971 | 973242271 |
| 92 | 207474688 | 331373888 | 496793088 | 709732288 | 976191488 |
| 93 | 208527857 | 332812557 | 498677257 | 712121957 | 979146657 |
| 94 | 209584584 | 334255384 | 500566184 | 714516984 | 982107784 |
| 95 | 210644875 | 335702375 | 502459875 | 716917375 | 985074875 |
| 96 | 211708736 | 337153536 | 504358336 | 719323136 | 988047936 |
| 97 | 212776173 | 338608873 | 506261573 | 721734273 | 991026973 |
| 98 | 213847192 | 340068392 | 508169592 | 724150792 | 994011992 |
| 99 | 214921799 | 341532099 | 510082399 | 726572699 | 997002999 |
| 100 | 216000000 | 343000000 | 512000000 | 729000000 | 1000000000 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,000000 | 10,04988 | 14,17745 | 17,34935 | 20,02498 |
| 2 | 1,414214 | 09950 | 21267 | 37815 | 04994 |
| 3 | 1,732051 | 14889 | 24781 | 40690 | 07486 |
| 4 | 2,000000 | 19894 | 28286 | 43560 | 09975 |
| 5 | 236068 | 24695 | 31782 | 46425 | 12461 |
| 6 | 449490 | 29563 | 35270 | 49286 | 14944 |
| 7 | 645751 | 34408 | 38749 | 52142 | 17424 |
| 8 | 2,828427 | 39230 | 42221 | 54993 | 19901 |
| 9 | 3,000000 | 44031 | 45683 | 57840 | 22375 |
| 10 | 162278 | 10,48809 | 14,49138 | 17,60682 | 20,24846 |
| 11 | 316625 | 53565 | 52584 | 63519 | 27313 |
| 12 | 464102 | 58301 | 56022 | 66352 | 29778 |
| 13 | 605551 | 63015 | 59452 | 69181 | 32240 |
| 14 | 741657 | 67708 | 62874 | 72005 | 34699 |
| 15 | 3,872983 | 72381 | 66288 | 74824 | 37155 |
| 16 | 4,000000 | 77033 | 69694 | 77639 | 39608 |
| 17 | 123106 | 81665 | 73092 | 80449 | 42058 |
| 18 | 242641 | 86278 | 46482 | 83255 | 44505 |
| 19 | 358899 | 90871 | 79865 | 86057 | 46949 |
| 20 | 472136 | 10,95445 | 14,83240 | 17,88854 | 20,49390 |
| 21 | 582576 | 11,00000 | 86607 | 91647 | 51828 |
| 22 | 690416 | 04536 | 89966 | 94436 | 54264 |
| 23 | 795832 | 09054 | 93318 | 17,97220 | 56696 |
| 24 | 4,898980 | 13553 | 14,96663 | 18,00000 | 59126 |
| 25 | 5,000000 | 18034 | 15,00000 | 02776 | 61553 |
| 26 | 099020 | 22497 | 15,03330 | 05547 | 63977 |
| 27 | 196152 | 26943 | 06652 | 08314 | 66398 |
| 28 | 291503 | 31371 | 09967 | 11077 | 68816 |
| 29 | 385165 | 35782 | 13275 | 13836 | 71232 |
| 30 | 477226 | 11,40175 | 15,16575 | 18,16590 | 20,73644 |
| 31 | 567764 | 44552 | 19868 | 19341 | 76054 |
| 32 | 656854 | 48913 | 23155 | 22087 | 78461 |
| 33 | 744563 | 53256 | 26434 | 24829 | 80865 |
| 34 | 830952 | 57584 | 29706 | 27567 | 83267 |
| 35 | 5,916080 | 61895 | 32971 | 30301 | 85665 |
| 36 | 6,000000 | 66190 | 36229 | 33030 | 88061 |
| 37 | 082763 | 70470 | 39480 | 35756 | 90455 |
| 38 | 164414 | 74734 | 42725 | 38478 | 92845 |
| 39 | 244998 | 78983 | 45962 | 41195 | 95233 |
| 40 | 324555 | 83216 | 15,49193 | 18,43909 | 20,97618 |
| 41 | 403124 | 87434 | 52417 | 46619 | 21,00000 |
| 42 | 480741 | 91638 | 55635 | 49324 | 02380 |
| 43 | 557439 | 11,95826 | 58846 | 52026 | 04757 |
| 44 | 633250 | 12,00000 | 62050 | 54724 | 07131 |
| 45 | 708204 | 94159 | 65248 | 57418 | 09502 |
| 46 | 782330 | 08305 | 68439 | 60108 | 11871 |
| 47 | 655655 | 12436 | 71623 | 62794 | 14237 |
| 48 | 6,928203 | 16553 | 74802 | 65476 | 16601 |
| 49 | 7,000000 | 20656 | 77973 | 68154 | 18962 |
| 50 | 7,071068 | 12,24745 | 15,81139 | 18,70829 | 21,21320 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 22,38303 | 24,51530 | 26,47640 | 28,30194 | 30,01666 |
| 2 | 40536 | 53569 | 49528 | 31960 | 03331 |
| 3 | 42766 | 55606 | 51415 | 33725 | 04996 |
| 4 | 44994 | 57641 | 53300 | 35489 | 06659 |
| 5 | 47221 | 59675 | 55184 | 37252 | 08322 |
| 6 | 49444 | 61707 | 57066 | 39014 | 09983 |
| 7 | 51666 | 63737 | 58947 | 40775 | 11644 |
| 8 | 53886 | 65766 | 60827 | 42534 | 13304 |
| 9 | 56103 | 67793 | 62705 | 44293 | 14963 |
| 10 | 22,58318 | 24,69818 | 26,64583 | 28,46050 | 30,16621 |
| 11 | 60531 | 71841 | 66458 | 47806 | 18278 |
| 12 | 62742 | 73863 | 68333 | 49561 | 19934 |
| 13 | 64950 | 75884 | 70206 | 51315 | 21589 |
| 14 | 67157 | 77902 | 72078 | 53069 | 23243 |
| 15 | 69361 | 79919 | 73948 | 54820 | 24897 |
| 16 | 71563 | 81935 | 75818 | 56571 | 26549 |
| 17 | 73763 | 83948 | 77686 | 58321 | 28201 |
| 18 | 75961 | 85961 | 79552 | 60070 | 29851 |
| 19 | 78157 | 87971 | 81418 | 61818 | 31501 |
| 20 | 22,80351 | 24,89980 | 26,83282 | 28,63564 | 30,33150 |
| 21 | 82542 | 91987 | 85144 | 65310 | 34798 |
| 22 | 84732 | 93993 | 87006 | 67054 | 36445 |
| 23 | 86919 | 95997 | 88866 | 68798 | 38092 |
| 24 | 89105 | 24,97999 | 90725 | 70540 | 39737 |
| 25 | 91288 | 25,00000 | 92582 | 72281 | 41381 |
| 26 | 93469 | 01999 | 94439 | 74022 | 43025 |
| 27 | 95648 | 03997 | 96294 | 75761 | 44667 |
| 28 | 22,97825 | 05993 | 26,98148 | 77499 | 46309 |
| 29 | 23,00000 | 07987 | 27,00000 | 79236 | 47950 |
| 30 | 02173 | 25,09980 | 01851 | 28,80972 | 30,49590 |
| 31 | 04344 | 11971 | 03701 | 82707 | 51229 |
| 32 | 06513 | 13961 | 05550 | 84441 | 52868 |
| 33 | 08679 | 15949 | 07397 | 86174 | 54505 |
| 34 | 10844 | 17936 | 09243 | 87906 | 56141 |
| 35 | 13007 | 19921 | 11088 | 89637 | 57777 |
| 36 | 15167 | 21904 | 12932 | 91366 | 59412 |
| 37 | 17326 | 23886 | 14774 | 93095 | 61046 |
| 38 | 19483 | 25866 | 16616 | 94823 | 62679 |
| 39 | 21637 | 27845 | 18455 | 96550 | 64311 |
| 40 | 23,23790 | 25,29822 | 27,20294 | 28,98275 | 30,65942 |
| 41 | 25941 | 31798 | 22132 | 29,00000 | 67572 |
| 42 | 28089 | 33772 | 23968 | 01724 | 69202 |
| 43 | 30236 | 35744 | 25803 | 03446 | 70831 |
| 44 | 32381 | 37716 | 27636 | 05168 | 72458 |
| 45 | 34524 | 39685 | 29469 | 06888 | 74085 |
| 46 | 36664 | 41653 | 31300 | 08608 | 75711 |
| 47 | 38803 | 43619 | 33130 | 10326 | 77337 |
| 48 | 40940 | 45584 | 34959 | 12044 | 78961 |
| 49 | 43075 | 47548 | 36786 | 13760 | 80584 |
| 50 | 23,45208 | 25,49510 | 27,38613 | 29,15476 | 30,82207 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 7,141428 | 12,28821 | 15,84298 | 18,73499 | 21,23676 |
| 52 | 211103 | 32883 | 87451 | 76166 | 26029 |
| 53 | 280110 | 36932 | 90597 | 78829 | 28380 |
| 54 | 348469 | 40967 | 93738 | 81489 | 30728 |
| 55 | 416199 | 44990 | 15,96872 | 84144 | 33073 |
| 56 | 483315 | 49000 | 16,00000 | 86796 | 35416 |
| 57 | 549834 | 52996 | 03122 | 89444 | 37756 |
| 58 | 615773 | 56981 | 06238 | 92089 | 40093 |
| 59 | 681146 | 60952 | 09348 | 94730 | 42429 |
| 60 | 745967 | 12,64911 | 12452 | 18,97367 | 21,44761 |
| 61 | 810250 | 68858 | 15549 | 19,00000 | 47091 |
| 62 | 874008 | 72792 | 18641 | 02630 | 49419 |
| 63 | 7,937254 | 76715 | 21727 | 05256 | 51743 |
| 64 | 8,000000 | 80625 | 24808 | 07878 | 54066 |
| 65 | 062258 | 84523 | 16,27882 | 10497 | 56386 |
| 66 | 124033 | 88410 | 30951 | 13113 | 58703 |
| 67 | 185353 | 92285 | 34013 | 15724 | 61018 |
| 68 | 246211 | 12,96148 | 37071 | 18333 | 63331 |
| 69 | 306624 | 13,00000 | 40122 | 20937 | 65641 |
| 70 | 366600 | 03840 | 43168 | 19,23538 | 21,67948 |
| 71 | 426150 | 07670 | 46208 | 26136 | 70253 |
| 72 | 485281 | 11488 | 49242 | 28730 | 72556 |
| 73 | 544004 | 15295 | 52271 | 31321 | 74856 |
| 74 | 602325 | 19091 | 55295 | 33908 | 77154 |
| 75 | 660254 | 22876 | 16,58312 | 36492 | 79449 |
| 76 | 717798 | 26650 | 61325 | 39072 | 81742 |
| 77 | 774964 | 30413 | 64332 | 41649 | 84033 |
| 78 | 831761 | 34166 | 67333 | 44222 | 86321 |
| 79 | 888194 | 37909 | 70329 | 46792 | 88607 |
| 80 | 8,944272 | 13,41641 | 16,73320 | 19,49359 | 21,90890 |
| 81 | 9,000000 | 45362 | 76305 | 51922 | 93171 |
| 82 | 055385 | 49074 | 79286 | 54482 | 95450 |
| 83 | 110434 | 52775 | 82260 | 57039 | 21,97726 |
| 84 | 165151 | 56466 | 85230 | 59592 | 22,00000 |
| 85 | 219545 | 60147 | 88194 | 62142 | 02272 |
| 86 | 273619 | 63818 | 91153 | 64688 | 04541 |
| 87 | 327379 | 67479 | 94107 | 67232 | 06808 |
| 88 | 380832 | 71131 | 16,97056 | 69772 | 09072 |
| 89 | 433981 | 74773 | 17,00000 | 72308 | 11334 |
| 90 | 486833 | 78405 | 02939 | 19,74842 | 13594 |
| 91 | 539392 | 82027 | 05872 | 77372 | 15852 |
| 92 | 591663 | 85641 | 08801 | 79899 | 18107 |
| 93 | 643651 | 89244 | 11724 | 82423 | 20360 |
| 94 | 695360 | 92839 | 14643 | 84943 | 22611 |
| 95 | 746794 | 13,96424 | 17556 | 87461 | 24860 |
| 96 | 797959 | 14,00000 | 20465 | 89975 | 27106 |
| 97 | 848858 | 03567 | 23369 | 92486 | 29350 |
| 98 | 899495 | 07125 | 26268 | 94994 | 31591 |
| 99 | 9,949874 | 10674 | 29162 | 19,97498 | 33831 |
| 100 | 10,000000 | 14,14214 | 17,32051 | 20,00000 | 22,36068 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 23,47339 | 25,51470 | 27,40438 | 29,17190 | 30,83829 |
| 52 | 49468 | 53429 | 42262 | 18904 | 85450 |
| 53 | 51595 | 55386 | 44085 | 20616 | 87070 |
| 54 | 53720 | 57342 | 45906 | 22328 | 88689 |
| 55 | 55844 | 59297 | 47726 | 24038 | 90307 |
| 56 | 57965 | 61250 | 49545 | 25748 | 91925 |
| 57 | 60085 | 63201 | 51363 | 27456 | 93542 |
| 58 | 62202 | 65151 | 53180 | 29164 | 95158 |
| 59 | 64318 | 67100 | 54995 | 30870 | 96773 |
| 60 | 23,66432 | 25,69047 | 27,56810 | 29,32576 | 30,98387 |
| 61 | 68544 | 70992 | 58623 | 34280 | 31,00000 |
| 62 | 70654 | 72936 | 60435 | 35984 | 01612 |
| 63 | 72762 | 74879 | 62245 | 37686 | 02224 |
| 64 | 74868 | 76820 | 64055 | 39388 | 04835 |
| 65 | 76973 | 78759 | 65863 | 41088 | 06445 |
| 66 | 79075 | 80698 | 67671 | 42788 | 08054 |
| 67 | 81176 | 82634 | 69476 | 44486 | 09662 |
| 68 | 83275 | 84570 | 71281 | 46184 | 11270 |
| 69 | 85372 | 86503 | 73085 | 47881 | 12876 |
| 70 | 23,87467 | 25,88436 | 27,74887 | 29,49576 | 31,14482 |
| 71 | 89561 | 90367 | 76689 | 51271 | 16087 |
| 72 | 91652 | 92296 | 78489 | 52965 | 17691 |
| 73 | 93742 | 94224 | 80288 | 54657 | 19295 |
| 74 | 95830 | 96151 | 82086 | 56349 | 20897 |
| 75 | 23,97916 | 25,98076 | 83882 | 58040 | 22499 |
| 76 | 24,00000 | 26,00000 | 85678 | 59730 | 24100 |
| 77 | 02082 | 01922 | 87472 | 61419 | 25700 |
| 78 | 04163 | 03843 | 89265 | 63106 | 27299 |
| 79 | 06242 | 05763 | 91057 | 64793 | 28898 |
| 80 | 08319 | 07681 | 92848 | 29,66479 | 31,30495 |
| 81 | 10394 | 09598 | 94638 | 68164 | 32092 |
| 82 | 12468 | 11513 | 96426 | 69848 | 33688 |
| 83 | 14539 | 13427 | 27,98214 | 71532 | 35283 |
| 84 | 16609 | 15339 | 28,00000 | 73214 | 36877 |
| 85 | 24,18677 | 26,17250 | 01785 | 74895 | 38471 |
| 86 | 20744 | 19160 | 03569 | 76575 | 40064 |
| 87 | 22808 | 21068 | 05352 | 78255 | 41656 |
| 88 | 24871 | 22975 | 07134 | 79933 | 43247 |
| 89 | 26932 | 24881 | 08914 | 81610 | 44837 |
| 90 | 28992 | 26785 | 10694 | 29,83287 | 31,46427 |
| 91 | 31049 | 28688 | 12472 | 84962 | 48015 |
| 92 | 33105 | 30589 | 14249 | 86637 | 49603 |
| 93 | 35159 | 32489 | 16026 | 88311 | 51190 |
| 94 | 37212 | 34388 | 17801 | 89983 | 52777 |
| 95 | 24,39262 | 26,36285 | 28,19574 | 91655 | 54362 |
| 96 | 41311 | 38181 | 21347 | 93326 | 55947 |
| 97 | 43358 | 40076 | 23119 | 94996 | 57531 |
| 98 | 45404 | 41969 | 24889 | 96665 | 59114 |
| 99 | 47448 | 43861 | 26659 | 29,98333 | 60696 |
| 100 | 24,49490 | 26,45751 | 28,28427 | 30,00000 | 31,62278 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,000000 | 4,657010 | 5,857766 | 6,701759 | 7,374198 |
| 2 | 259921 | 672329 | 67464 | 09173 | 80323 |
| 3 | 442250 | 687548 | 77131 | 16570 | 86437 |
| 4 | 587401 | 4,702669 | 86765 | 23951 | 92542 |
| 5 | 709976 | 17694 | 5,896369 | 31316 | 7,398636 |
| 6 | 817121 | 32623 | 5,905941 | 38664 | 7,404721 |
| 7 | 1,912931 | 47459 | 15482 | 45997 | 10795 |
| 8 | 2,000000 | 62203 | 24992 | 53313 | 16860 |
| 9 | 080084 | 76856 | 34472 | 60614 | 22914 |
| 10 | 154435 | 4 791420 | 43922 | 67899 | 28959 |
| 11 | 223980 | 4,805896 | 53342 | 75169 | 34994 |
| 12 | 289429 | 20285 | 62732 | 82423 | 41019 |
| 13 | 351335 | 34588 | 72093 | 89661 | 47034 |
| 14 | 410142 | 48808 | 81424 | 6,796884 | 53040 |
| 15 | 466212 | 62944 | 5,990726 | 6,804092 | 59036 |
| 16 | 519842 | 76999 | 6,000000 | 11285 | 65022 |
| 17 | 571282 | 4,890973 | 09245 | 18462 | 70999 |
| 18 | 620741 | 4,904868 | 18462 | 25624 | 76966 |
| 19 | 668402 | 18685 | 27650 | 32771 | 82924 |
| 20 | 2,714418 | 32424 | 36811 | 39904 | 88872 |
| 21 | 758924 | 46087 | 45944 | 47021 | 7,494811 |
| 22 | 802039 | 59676 | 55049 | 54124 | 7,500741 |
| 23 | 843867 | 73190 | 64127 | 61212 | 06661 |
| 24 | 884499 | 4,986631 | 73178 | 68286 | 12572 |
| 25 | 924018 | 5,000000 | 82202 | 75344 | 18473 |
| 26 | 2,962496 | 13298 | 6,091199 | 82389 | 20365 |
| 27 | 3,000000 | 26526 | 6,100170 | 89419 | 30248 |
| 28 | 036589 | 39684 | 09115 | 6,896434 | 36122 |
| 29 | 072317 | 52774 | 18033 | 6,903436 | 41987 |
| 30 | 107233 | 65797 | 26926 | 10423 | 47842 |
| 31 | 141381 | 78753 | 35792 | 17396 | 53689 |
| 32 | 174802 | 5,091643 | 44634 | 24356 | 59526 |
| 33 | 207534 | 5,104469 | 53449 | 31301 | 65355 |
| 34 | 239612 | 17230 | 62240 | 38232 | 71174 |
| 35 | 271066 | 29928 | 71006 | 45150 | 76985 |
| 36 | 301927 | 42563 | 79747 | 52053 | 82787 |
| 37 | 332222 | 55137 | 88463 | 58943 | 88579 |
| 38 | 361975 | 67649 | 6,197154 | 65820 | 7,594363 |
| 39 | 391211 | 80101 | 6,205822 | 72683 | 7,600139 |
| 40 | 3,419952 | 5,192494 | 14465 | 79532 | 05905 |
| 41 | 448217 | 5,204828 | 23084 | 86368 | 11663 |
| 42 | 476027 | 17103 | 31680 | 6,993191 | 17412 |
| 43 | 503398 | 29322 | 40252 | 7,000000 | 23152 |
| 44 | 530348 | 41483 | 48800 | 06796 | 28884 |
| 45 | 556893 | 53588 | 57325 | 13579 | 34607 |
| 46 | 583048 | 65637 | 65827 | 20349 | 40321 |
| 47 | 608826 | 77632 | 74305 | 27106 | 46027 |
| 48 | 634241 | 5,289573 | 82761 | 33850 | 51725 |
| 49 | 659306 | 5,301459 | 91195 | 40580 | 57414 |
| 50 | 3,684031 | 5,313293 | 6,299605 | 7,047298 | 7,663094 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,942293 | 8,439010 | 8,883262 | 9,287044 | 9,658468 |
| 2 | 47574 | 43688 | 87488 | 90907 | 62040 |
| 3 | 52848 | 48361 | 91706 | 94767 | 65610 |
| 4 | 58114 | 53028 | 8,896920 | 9,298624 | 69176 |
| 5 | 63374 | 57691 | 8,900130 | 9,302478 | 72740 |
| 6 | 68627 | 62348 | 04337 | 06328 | 76302 |
| 7 | 73873 | 67000 | 08539 | 10175 | 79860 |
| 8 | 79112 | 71647 | 12737 | 14019 | 83417 |
| 9 | 84358 | 76289 | 16931 | 17860 | 86970 |
| 10 | 89570 | 80926 | 21121 | 21698 | 90521 |
| 11 | 7,994788 | 85558 | 25308 | 25532 | 94069 |
| 12 | 8,000000 | 90185 | 29490 | 29363 | 9,697615 |
| 13 | 05205 | 94806 | 33669 | 33192 | 9,701158 |
| 14 | 10403 | 8,499423 | 37843 | 37016 | 04699 |
| 15 | 15595 | 8,504035 | 42014 | 40839 | 08237 |
| 16 | 20779 | 08642 | 46181 | 44657 | 11772 |
| 17 | 25957 | 13243 | 50344 | 48473 | 15305 |
| 18 | 31128 | 17840 | 54503 | 52286 | 18835 |
| 19 | 36293 | 22432 | 58658 | 56095 | 22363 |
| 20 | 41452 | 27019 | 62810 | 59902 | 25888 |
| 21 | 46603 | 31601 | 66957 | 63705 | 29411 |
| 22 | 51748 | 36178 | 71101 | 67505 | 32931 |
| 23 | 56886 | 40750 | 75241 | 71302 | 36449 |
| 24 | 62018 | 45317 | 79377 | 75096 | 39963 |
| 25 | 67143 | 49880 | 83509 | 78887 | 43476 |
| 26 | 72263 | 54437 | 87637 | 82675 | 46986 |
| 27 | 77374 | 58990 | 91762 | 86460 | 50493 |
| 28 | 82480 | 63538 | 8,995883 | 90242 | 53998 |
| 29 | 87579 | 68081 | 9,000000 | 94021 | 57500 |
| 30 | 92672 | 72619 | 04113 | 9,397796 | 61000 |
| 31 | 8,097759 | 77152 | 08223 | 9,401569 | 64497 |
| 32 | 8,102839 | 81681 | 12329 | 05339 | 67992 |
| 33 | 07913 | 86205 | 16431 | 09105 | 71485 |
| 34 | 12983 | 90724 | 20529 | 12869 | 74974 |
| 35 | 18041 | 95238 | 24624 | 16630 | 78462 |
| 36 | 23096 | 8,599748 | 28715 | 20387 | 81947 |
| 37 | 28145 | 8,604252 | 32802 | 24142 | 85429 |
| 38 | 33187 | 08753 | 36886 | 27894 | 88909 |
| 39 | 38223 | 13248 | 40966 | 31642 | 92386 |
| 40 | 43253 | 17739 | 45042 | 35388 | 95861 |
| 41 | 48276 | 22225 | 49114 | 39131 | 9,799334 |
| 42 | 53294 | 26706 | 53133 | 42870 | 9,802804 |
| 43 | 58306 | 31183 | 57248 | 46607 | 06271 |
| 44 | 63310 | 35655 | 61310 | 50341 | 09736 |
| 45 | 68309 | 40123 | 65368 | 54072 | 13199 |
| 46 | 73302 | 44586 | 69422 | 57800 | 16659 |
| 47 | 78289 | 49044 | 73473 | 61525 | 20117 |
| 48 | 83269 | 53497 | 77520 | 65247 | 23572 |
| 49 | 88244 | 57947 | 81563 | 68966 | 27025 |
| 50 | 8,193213 | 8,662390 | 9,085603 | 9,472683 | 9,330476 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 3,708430 | 5,325074 | 6,307994 | 7,054004 | 7,668766 |
| 52 | 732511 | 36803 | 16360 | 60697 | 74430 |
| 53 | 756286 | 48481 | 24704 | 67377 | 80086 |
| 54 | 779763 | 60109 | 33026 | 74044 | 85733 |
| 55 | 802953 | 71685 | 41326 | 80699 | 91372 |
| 56 | 825862 | 83213 | 49604 | 87341 | 7,697002 |
| 57 | 848501 | 5,394691 | 57861 | 7,093971 | 7,702624 |
| 58 | 870877 | 5,406120 | 66097 | 7,100588 | 08239 |
| 59 | 892997 | 17502 | 74311 | 07194 | 13845 |
| 60 | 914868 | 28835 | 82504 | 13787 | 19443 |
| 61 | 936497 | 40122 | 90677 | 20367 | 25032 |
| 62 | 957892 | 51362 | 6,398828 | 26936 | 30614 |
| 63 | 3,979057 | 62556 | 6,406959 | 33492 | 36188 |
| 64 | 4,000000 | 73704 | 15069 | 40037 | 41753 |
| 65 | 020726 | 84807 | 23158 | 46569 | 47311 |
| 66 | 041240 | 5,495865 | 31228 | 53090 | 52861 |
| 67 | 061548 | 5,506878 | 39277 | 59599 | 58402 |
| 68 | 081655 | 17848 | 47306 | 66096 | 63936 |
| 69 | 101566 | 28775 | 55315 | 72581 | 69462 |
| 70 | 121285 | 39658 | 63304 | 79054 | 74981 |
| 71 | 140818 | 50499 | 71274 | 85516 | 80490 |
| 72 | 160168 | 61298 | 79224 | 91966 | 85993 |
| 73 | 179339 | 72055 | 87155 | 7,198405 | 91488 |
| 74 | 198336 | 82770 | 6,495065 | 7,204832 | 7,796975 |
| 75 | 217163 | 5,593445 | 6,502957 | 11248 | 7,802454 |
| 76 | 235824 | 5,604079 | 10830 | 17652 | 07925 |
| 77 | 254321 | 14672 | 18684 | 24045 | 13389 |
| 78 | 272659 | 25226 | 26519 | 30427 | 18845 |
| 79 | 290840 | 35741 | 34335 | 36797 | 24294 |
| 80 | 4,308870 | 46216 | 42133 | 43156 | 29735 |
| 81 | 326749 | 56653 | 49912 | 49505 | 35169 |
| 82 | 344482 | 67051 | 57672 | 55842 | 40595 |
| 83 | 362071 | 77411 | 65414 | 62167 | 46013 |
| 84 | 379519 | 87734 | 73139 | 68482 | 51424 |
| 85 | 396830 | 5,698019 | 80844 | 74786 | 56828 |
| 86 | 414005 | 5,708267 | 88532 | 81079 | 62224 |
| 87 | 431048 | 18479 | 6,596202 | 87362 | 67613 |
| 88 | 447960 | 28654 | 6,603855 | 93633 | 72994 |
| 89 | 464745 | 38794 | 11489 | 7,299894 | 78368 |
| 90 | 481405 | 48897 | 19106 | 7,306144 | 83735 |
| 91 | 497941 | 58965 | 26705 | 12383 | 89095 |
| 92 | 514357 | 68999 | 34287 | 18611 | 94447 |
| 93 | 530655 | 78997 | 41852 | 24829 | 7,899792 |
| 94 | 546836 | 88960 | 49400 | 31037 | 7,905129 |
| 95 | 562903 | 5,798891 | 56930 | 37234 | 10460 |
| 96 | 578857 | 5,808786 | 64444 | 43420 | 15783 |
| 97 | 594701 | 18648 | 71940 | 49597 | 21099 |
| 98 | 610436 | 28477 | 79420 | 55762 | 26409 |
| 99 | 626065 | 38272 | 86883 | 61918 | 31710 |
| 100 | 4,641589 | 5,848035 | 6,694330 | 7,368063 | 7,937006 |

| | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 8,198175 | 8,666831 | 9,089639 | 9,476396 | 9,833924 |
| 52 | 8,203132 | 71267 | 93672 | 80106 | 37370 |
| 53 | 08082 | 75697 | 9,097701 | 83814 | 40813 |
| 54 | 13027 | 80124 | 9,101727 | 87518 | 44254 |
| 55 | 17966 | 84546 | 05749 | 91220 | 47692 |
| 56 | 22899 | 88963 | 09767 | 94919 | 51128 |
| 57 | 27825 | 93376 | 13782 | 9,498615 | 54562 |
| 58 | 32746 | 8,697784 | 17793 | 9,502308 | 57993 |
| 59 | 37661 | 8,702188 | 21801 | 05998 | 61422 |
| 60 | 42571 | 06588 | 25805 | 09685 | 64848 |
| 61 | 47474 | 10983 | 29806 | 13370 | 68272 |
| 62 | 52372 | 15373 | 33803 | 17052 | 71694 |
| 63 | 57263 | 19760 | 37797 | 20730 | 75113 |
| 64 | 62149 | 24141 | 41787 | 24406 | 78531 |
| 65 | 67029 | 28519 | 45774 | 28080 | 81945 |
| 66 | 71904 | 32892 | 49758 | 31750 | 85357 |
| 67 | 76773 | 37260 | 53738 | 35417 | 88767 |
| 68 | 81636 | 41625 | 57714 | 39082 | 92175 |
| 69 | 86493 | 45985 | 61687 | 42744 | 95580 |
| 70 | 91344 | 50340 | 65656 | 46403 | 9,898983 |
| 71 | 8,296190 | 54692 | 69623 | 50059 | 9,902384 |
| 72 | 8,301031 | 59038 | 73585 | 53712 | 05782 |
| 73 | 05865 | 63381 | 77544 | 57363 | 09178 |
| 74 | 10694 | 67719 | 81500 | 61011 | 12571 |
| 75 | 15518 | 72053 | 85453 | 64656 | 15962 |
| 76 | 20335 | 76383 | 89402 | 68298 | 19351 |
| 77 | 25148 | 80708 | 93345 | 71938 | 22738 |
| 78 | 29954 | 85030 | 9,197290 | 75575 | 26122 |
| 79 | 34755 | 89347 | 9,201229 | 79209 | 29504 |
| 80 | 39551 | 93659 | 05164 | 82840 | 32884 |
| 81 | 44341 | 8,797968 | 09096 | 86468 | 36262 |
| 82 | 49126 | 8,802272 | 13025 | 90094 | 39636 |
| 83 | 53905 | 06572 | 16951 | 93717 | 43009 |
| 84 | 58678 | 10868 | 20873 | 9,597337 | 46380 |
| 85 | 63447 | 15160 | 24791 | 9,600955 | 49747 |
| 86 | 68209 | 19447 | 28707 | 04570 | 53114 |
| 87 | 72967 | 23731 | 32619 | 08182 | 56478 |
| 88 | 77719 | 28010 | 36528 | 11791 | 59839 |
| 89 | 82465 | 32285 | 40433 | 15398 | 63198 |
| 90 | 87207 | 36556 | 44336 | 19002 | 66554 |
| 91 | 91942 | 40823 | 48234 | 22603 | 69910 |
| 92 | 8,396673 | 45085 | 52130 | 26202 | 73262 |
| 93 | 8,401398 | 49345 | 56022 | 29797 | 76612 |
| 94 | 06118 | 53599 | 59911 | 33391 | 79960 |
| 95 | 10833 | 57849 | 63797 | 36981 | 83305 |
| 96 | 15542 | 62095 | 67680 | 40569 | 86649 |
| 97 | 20246 | 66337 | 71559 | 44154 | 89990 |
| 98 | 24945 | 70576 | 75435 | 47737 | 93329 |
| 99 | 29638 | 74810 | 79308 | 51317 | 9,996666 |
| 100 | 8,434327 | 8,879040 | 9,283178 | 9,654894 | 10,000000 |

# Verwandlung der Fuße, Zolle, Linien und Puncte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles; wie auch umgekehrt.

| Fuß. | = Klaft. | Zoll. | = Klaft. | Lin. | = Klaft. | Punct. | = Klaft. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,1666666 | 1 | 0,0138888 | 1 | 0,0011574 | 1 | 0,0000964 |
| 2 | 0,3333333 | 2 | 0,0277777 | 2 | 0,0023148 | 2 | 0,0001929 |
| 3 | 0,5000000 | 3 | 0,0416666 | 3 | 0,0034722 | 3 | 0,0002893 |
| 4 | 0,6666666 | 4 | 0,0555555 | 4 | 0,0046296 | 4 | 0,0003858 |
| 5 | 0,8333333 | 5 | 0,0694444 | 5 | 0,0057870 | 5 | 0,0004822 |
| 6 | 1,0000000 | 6 | 0,0833333 | 6 | 0,0069444 | 6 | 0,0005787 |
| 7 | 1,1666666 | 7 | 0,0972222 | 7 | 0,0081018 | 7 | 0,0006751 |
| 8 | 1,3333333 | 8 | 0,1111111 | 8 | 0,0092592 | 8 | 0,0007716 |
| 9 | 1,5000000 | 9 | 0,1250000 | 9 | 0,0104166 | 9 | 0,0008680 |
| 10 | 1,6666666 | 10 | 0,1388888 | 10 | 0,0115740 | 10 | 0,0009645 |
| 11 | 1,8333333 | 11 | 0,1527777 | 11 | 0,0127314 | 11 | 0,0010609 |

| Zoll. | = Fuß. | Lin. | = Fuß. | Punct. | = Fuß. | $1\frac{1}{2}$ P. | = Fuß. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0833333 | 1 | 0,0069444 | 1 | 0,0005787 | 1 | 0,0000482 |
| 2 | 0,1666666 | 2 | 0,0138888 | 2 | 0,0011574 | 2 | 0,0000965 |
| 3 | 0,2500000 | 3 | 0,0208333 | 3 | 0,0017361 | 3 | 0,0001447 |
| 4 | 0,3333333 | 4 | 0,0277777 | 4 | 0,0023148 | 4 | 0,0001929 |
| 5 | 0,4166666 | 5 | 0,0347222 | 5 | 0,0028935 | 5 | 0,0002411 |
| 6 | 0,5000000 | 6 | 0,0416666 | 6 | 0,0034722 | 6 | 0,0002894 |
| 7 | 0,5833333 | 7 | 0,0486111 | 7 | 0,0040509 | 7 | 0,0003376 |
| 8 | 0,6666666 | 8 | 0,0555555 | 8 | 0,0046296 | 8 | 0,0003858 |
| 9 | 0,7500000 | 9 | 0,0625000 | 9 | 0,0052083 | 9 | 0,0004340 |
| 10 | 0,8333333 | 10 | 0,0694444 | 10 | 0,0057870 | 10 | 0,0004823 |
| 11 | 0,9166666 | 11 | 0,0763888 | 11 | 0,0063657 | 11 | 0,0005305 |

| Lin. | = Zoll. | Punct. | = Zoll. | $1\frac{1}{2}$ P. | = Zoll. | $\frac{1}{144}$ P. | = Zoll. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0833333 | 1 | 0,0069444 | 1 | 0,0005787 | 1 | 0,0000482 |
| 2 | 0,1666666 | 2 | 0,0138888 | 2 | 0,0011574 | 2 | 0,0000965 |
| 3 | 0,2500000 | 3 | 0,0208333 | 3 | 0,0017361 | 3 | 0,0001447 |
| 4 | 0,3333333 | 4 | 0,0277777 | 4 | 0,0023148 | 4 | 0,0001929 |
| 5 | 0,4166666 | 5 | 0,0347222 | 5 | 0,0028935 | 5 | 0,0002411 |
| 6 | 0,5000000 | 6 | 0,0416666 | 6 | 0,0034722 | 6 | 0,0002894 |
| 7 | 0,5833333 | 7 | 0,0486111 | 7 | 0,0040509 | 7 | 0,0003376 |
| 8 | 0,6666666 | 8 | 0,0555555 | 8 | 0,0046296 | 8 | 0,0003858 |
| 9 | 0,7500000 | 9 | 0,0625000 | 9 | 0,0052083 | 9 | 0,0004340 |
| 10 | 0,8333333 | 10 | 0,0694444 | 10 | 0,0057870 | 10 | 0,0004823 |
| 11 | 0,9166666 | 11 | 0,0763888 | 11 | 0,0063657 | 11 | 0,0005305 |

# Inhalt.


## Erste Vorlesung, von den Rechnungsarten mit ganzen Größen.

### I. Abschnitt, vorläufige Einleitung.

§. 1. Einheit; Zahl. 2. Größe. 3. Mathematik; stetige, unstetige Größe; Arithmetik; Geometrie; reine, angewandte Mathematik, deren Haupttheile; technische Mathematik. 4 bis 8. das Bezeichnen und Aussprechen der Zahlen. 9. bis 11. unbenannte und benannte, ungleichnahmige und gleichnahmige Zahlen; die einfachste Vergleichung der letztern. 12. Drey Grundsätze.

### II. Abschnitt, von der Addition.

§. 13 bis 15. Summe, Addition und deren Bezeichnung. 16. Zwey Grundsätze. 17. und 18. Regel und Prüfung der Addition.

### III. Abschnitt, von der Subtraction.

§. 19 bis 21. Differenz, Subtraction, Minuendus, Subtrahendus, Bezeichnung. 22. Drey Grundsätze. 23. und 24. Regeln und Prüfung der Subtraction. 25. Einige Beyspiele zur Anwendung der Addition und Subtraction.

### IV. Abschnitt, von der Multiplication.

§. 26 bis 28. Multipliciren, Multiplicandus, Multiplicator, Factoren, Product, Bezeichnung, Einmahleins. §. 29. Zwey Grundsätze. 30. bis 33. Regeln und Prüfung der Multiplication. 34. Einige Beyspiele zur Anwendung.

### V. Abschnitt, von der Division.

§. 35 bis 38. Dividiren, Dividendus, Divisor Quotient, Bezeichnung; Division einer benannten Zahl durch eine gleichnahmig benannte, durch eine unbenannte Zahl. 39. Drey Grundsätze. 40. Unveränderlichkeit des Quotienten in gewissen Fällen bey geändertem Dividendus und Divisor. 41 bis 44. Regeln und Prüfung der Division. 45. Einige Beyspiele zur Anwendung.

### VI. Abschnitt, von den Rechnungsarten mit ungleichnahmigen Größen, welche gleichnahmig gemacht werden können.

§. 46. Benennung und Eintheilung einiger in Rechnungen vorkommenden Dinge. 47 bis 51. Addition, Subtraction, Multiplication und Division bey solchen ungleichnahmigen Dingen.

### VII. Abschnitt, von den Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 52 bis 58. Was jeder Buchstab einzeln bedeute? Gemeine und allgemeine Arithmetik. Bezeichnung der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der durch Buchstaben ausgedrückten Größen; Exponent; Coefficient; algebraische Größe, einnahmige, mehrnahmige; deren Glieder, gleichnahmige, ungleichnahmige. 59 und 60. Entgegengesetzte Größen, positive, negative. 61 bis 67. Addition, Subtraction, Multiplication und Division der algebraischen Größen. 68. Zerlegung der algebraischen Größen in Factoren durch mehrere Beyspiele erläutert. 69. Kennzeichen der Theilbarkeit der Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12; was eine Primzahl sey? 70. Zerlegung einer Zahl in alle einfache und zusammengesetzte Factoren.

## Zweyte Vorlesung, von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

### I. Abschnitt, von den Brüchen überhaupt.

§. 71 und 72. Was ein Bruch sey? dessen Nenner, Zähler, Bezeichnung; eigentlicher, uneigentlicher Bruch. 73 und 74.

Der Werth eines bezeichneten Bruches, und dessen Bestimmung. 75. Verwandlung einer unbenannten ganzen Zahl in einen uneigentlichen, und einer benannten Zahl in einen eigentlichen Bruch. 76. Verwandlung einer ganzen Zahl nebst einem Bruche, in einen einzelnen Bruch. 77 bis 79. Wie sich der Werth eines Bruches verändere, wenn dessen Zähler oder Nenner mit etwas multipliciret oder dividiret wird. 80. Abkürzung der Brüche. 81. Das größte gemeinschaftliche Maß von zwey gegebenen Zahlen zu finden. 82 und 83. Brüche von gleicher, von verschiedener Benennung; letztere auf gleiche Benennung zu bringen. 84. Von mehreren Zahlen das kleinste Vielfache zu finden. 85. Verwandlung eines Bruches in einen andern von gegebenen Nenner oder Zähler. 86. Veränderung des Bruches, wenn zum Zähler und Nenner etwas hinzu addiret, oder davon subtrahiret wird.

II. Abschnitt, von der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Brüche.

§. 87 bis 90. Regeln der Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Brüche. 91. Werth eines gebrochenen Bruches. 92. Verwandlung ungleichnahmiger Größen in Brüche. 93. Rechnungsarten mit benannten Brüchen. 94. Einige Beyspiele zur Anwendung.

III. Abschnitt, von den Decimalbrüchen.

§. 95 bis 97. Bezeichnung der Decimalbrüche; Werthe der Decimalstellen; Decimalbrüche auf gleiche Benennung zu bringen. 98. Verwandlung der gemeinen in Decimalbrüche. 99 bis 104. Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Decimalbrüche. 105. Den Werth eines benannten Decimalbruches in Einheiten kleinerer Gattung anzugeben. 106. Abgekürzte Multiplication und Division der Decimalbrüche, nebst einigen andern Abkürzungen.

IV. Abschnitt, von zusammenhängenden Brüchen.

§. 107. Entstehung eines zusammenhängenden Bruches. 108. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen zusammenhängenden. 109. Aus dem zusammenhängenden Bruche lassen sich mehrere Brüche ableiten, die sich dem wahren Werthe im-

mer mehr und mehr nähern. 110. Großer und wichtiger Nutzen davon bey Abkürzung der Brüche. 111 und 112. Practische Regel um die abgekürzten Brüche abzuleiten sowohl bey eigentlichen, als auch uneigentlichen Brüchen.

## Dritte Vorlesung, von den Rechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln.

### I. Abschnitt, von den Potenzen und Wurzeln überhaupt.

§. 113 bis 117. Potenz oder Dignität, Wurzel, Exponent; zweyte, dritte Potenz, oder Quadrat, Cubus; Quadrat- und Cubikwurzel; *m*te Potenz; *m*te Wurzel; Bezeichnung der Wurzel. 118. Potenzen von positiven, von negativen Wurzeln. 119. Wurzeln aus positiven, aus negativen Größen. 120 bis 123. Potenz eines Productes, eines Bruches. 124 und 125. Irrationale, rationale Wurzeln. 126 und 127. Einige Verwandlungen der Potenzen, z. B. $a^0$, $a^{-m}$ u. s. w. 128 und 129. Einnahmige Potenzen wieder auf andere Potenzen zu erheben, und Wurzeln daraus zu ziehen. 130 bis 132. Die Theile des Quadrats einer zwey- und mehrnahmigen Größe anzugeben. 133 bis 135. Und eben so die Theile des Cubus. 136. Wie auch die Theile der vierten, fünften Potenz u. einer zwey- oder mehrnahmigen Größe. 137. Zwey Grundsätze.

### II. Abschnitt, von der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus zusammengesetzten Größen insbesondere.

§. 138 bis 140. Regeln für die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus mehrnahmigen algebraischen Größen. 141 bis 144. Untersuchungen, wie die verschiedenen Theile der Quadratzahlen in Beziehung auf deren Wurzel nach der decadischen Ordnung mit einander verbunden sind. 145 bis 148. Daraus abgeleitete Regeln für die Ausziehung der Quadratwurzel aus jeder vorgelegten Zahl. 149 bis 154. Eben solche Untersuchungen und daraus abgeleitete Regeln für die Ausziehung der Cubikwurzel. Nutzen der Tafeln von Quadrat- und Cubikzahlen.

### III. Abschnitt, von den Wurzelgrößen, und ihren Rechnungsarten.

§. 155. Wurzelgrößen von der nähmlichen, von verschiedener Benennung. 156. Verwandlung der Wurzelgrößen in Bruchpotenzen, und umgekehrt. 157. Solche auf eine andere Benennung zu bringen. 158 und 159. Abkürzungen und andere Verwandlungen der Wurzelgrößen. 160. Solche auf gleiche Benennung zu bringen; gleichartige Wurzelgrößen. 161. Wurzelgrößen zu addiren und zu subtrahiren. 162. Zu multipliciren. 163. Zu dividiren; eine zusammengesetzte irrationale Größe aus dem Nenner wegzuschaffen. 164. Multiplication und Division der unmöglichen Größen. Ob es jederzeit willkührlich sey, bey der Wurzel eines geraden Exponenten + oder — zu nehmen; wenn dieses wäre, so könnte man jede negative Größe in eine positive, ja sogar jede unmögliche Größe in eine mögliche verwandeln. 165. Wurzelgrößen auf Potenzen zu erheben. 166. Wurzeln daraus zu ziehen. 167. Die Regeln für die Rechnungsarten der Potenzen mit ganzen Exponenten gelten auch bey gebrochenen Exponenten. 168. Bey einer angezeigten Potenz einer zusammengesetzten Größe ein Glied inner den Klammern von einem Factor zu befreyen. 169. Wie auch einen außer den Klammern befindlichen Factor hineinzuschaffen.

## Vierte Vorlesung, von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf verschiedene Rechnungsfragen.

### I. Abschnitt, von den Verhältnissen.

§. 170 bis 176. Verhältniß, arithmetisches, geometrisches; Differenz oder Nahmen beym ersten, und Quotient oder Exponent beym zweyten; vorderes, hinteres Glied; gleiche, ungleiche Verhältnisse; allgemeine Bezeichnung; das Verhältniß verbleibt in einigen Fällen ungeändert, wenn man die Glieder verändert; zusammengesetztes Verhältniß, quadratisches, cubisches, biquadratisches.

II. Abschnitt, von den Proportionen.

§. 177. Proportion, arithmetische, geometrische; Proportionalglieder, die äußeren, die inneren; stetigen oder zusammenhängenden. 178 bis 180. Allgemeine Bezeichnung der arithmetischen Proportion; deren Haupteigenschaft; einige Folgen; arithmetisches Mittel oder Durchschnitt. 181 bis 184. Bezeichnung oder allgemeine Formel der geometrischen Proportion; deren Haupteigenschaft; einige Folgen. 185. Aus zwey gleichen Producten eine Proportion abzuleiten. 186. Zwey Kennzeichen von der Richtigkeit einer Proportion. 187. Verschiedene Verwandlungen einer Proportion, durch Verwechselung, Umkehrung, Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Formirung der Potenzen und Wurzeln. 188. Der daraus entspringende Nutzen. 189 und 190. Zusammengesetzte Proportionen und verschiedene Abkürzungen derselben. 191. Merkwürdiger Satz von mehrern gleichen Verhältnissen.

III. Abschnitt, von der einfachen Regel Detri.

§. 192 bis 195. Einige Dinge, die im geometrischen Verhältnisse miteinander stehen. Bedeutung des Wortes Verhältniß im gemeinen Leben auch bey zwey ungleichnahmigen Dingen; gerades, verkehrtes Verhältniß; solches practisch leicht zu erkennen. Regel Detri, gerade, verkehrte; Fragezahl bey derselben 196 und 197. Anweisung, die einfache Regel Detri anzusetzen und aufzulösen, nebst der Anwendung auf verschiedene Beyspiele. 198 und 199. Sorgfältige Vergleichung verschiedener Gewichte und Maße gegeneinander, theils durch eigene Untersuchung, theils durch kritische Prüfung anderer Angaben bestimmet. Um solche Vergleichungen in kleinen Zahlen auszudrücken, ist die Lehre von zusammenhängenden Brüchen höchst nützlich.

IV. Abschnitt. Von der zusammengesetzten Regel Detri.

§. 200. Zusammengesetzte Regel Detri; der bekannte, der unbekannte Fall. 201. Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri durch Wiederhohlung der einfachen. 202 bis 204. Vorbereitung zur Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri durch

eine einzige Proportion, sowohl bey geraden, als auch bey verkehrten Verhältnissen. 205. Anweisung, die zusammengesetzte Regel Detri vortheilhaft anzusetzen und aufzulösen, oder die sogenannte Reesische Regel. 206. Anweisung, die sogenannte Kettenregel vortheilhaft anzusetzen und aufzulösen.

### V. Abschnitt, von der Gesellschaftsrechnung.

§. 207 und 208. Gebrauch der Gesellschaftsregel beym Gewinn und Verlust; bey gleichen, bey ungleichen Dauerzeiten der Einlage; wie auch bey den Mischungen verschiedener Ingredienzien nach bekannten Verhältnissen.

## Fünfte Vorlesung, von den Gleichungen des ersten und zweyten Grades, nebst deren Anwendung auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

### I. Abschnitt, von den Gleichungen und ihrer Auflösung.

§. 209 und 210. Gleichung, Theile, Glieder derselben; identische, wirkliche algebraische Gleichung. 211. Drey merkwürdige Sätze von den Gleichungen. 212. Der Werth einer unbekannten oder zu bestimmenden Größe in einer Gleichung. 213. Einfache, höhere, reine, verwickelte Gleichung 214. Beyspiele zur Auflösung der reinen Gleichungen. 215. Auflösung der verwickelten quadratischen Gleichungen durch mehrere Beyspiele erläutert.

### II. Abschnitt, von den algebraischen Aufgaben und ihrer Auflösung.

§. 216 bis 218. Algebraische Aufgabe mit einer, mit mehrern unbekannten Größen; bestimmte, unbestimmte, ungereimte Aufgaben. Was bey der Auflösung einer algebraischen Aufgabe überhaupt zu beobachten sey. 219. Auflösung der algebraischen Aufgaben mit einer unbekannten Größe, durch mehrere Beyspiele erläutert, die theils auf einfache, theils auf quadratische Gleichungen führen. 220 bis 222. Auflösung der bestimmten Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen. Hinwegschaffung der

unbekannten Größen 1) durch den Grundsatz, wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind solche auch unter sich gleich; 2) durch die Substitution; 3) am gewöhnlichsten durch Addition und Subtraction mit andern Kunstgriffen verbunden. Um die Verstandeskräfte der Anfänger zu schärfen, und solche zu analytischen Untersuchungen, und mathematischen Erfindungen geschickt auszubilden, sind in diesem Abschnitte mehrere algebraische Aufgaben mit verschiedenen Einkleidungen angebracht; welche theils aufgelöset, theils dem eigenen Fleiße des eifrigern Lehrlings überlassen sind. Die 16te Aufgabe im 219. §. zeiget deutlich, daß von den zwey Zeichen $\pm$ vor einer quadratischen Wurzelgröße zuweilen eines gänzlich ausgeschlossen sey. 223. Abkürzung der Wurzelgröße $\sqrt{(a \pm \sqrt{b})}$ in einigen Fällen. 224 und 225. Auflösung der unbestimmten Aufgaben. 226 und 227. Erinnerungen über die unmöglichen oder ungereimten Aufgaben. 228. Aus der Gleichung $a^x = b$ den Werth für $x$ zu bestimmen.

## Sechste Vorlesung, von den Reihen und ihrer Anwendung.

### I. Abschnitt, von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 229 bis 231. Von den Reihen überhaupt; das allgemeine, das summatorische Glied einer Reihe; aus dem summatorischen Gliede läßt sich das allgemeine sehr leicht herleiten. 232 bis 234. Arithmetische Reihe; deren allgemeine Bezeichnung; Formel für das $n^{te}$ Glied als erste Fundamentalgleichung; die Summe von $n$ Gliedern als die zweyte Fundamentalgleichung; daraus entstehen zusammen 20 verschiedene Formeln, von denen jede eine andere Frage beantwortet. 235. Anwendung dieser 20 Formeln auf die Auflösung verschiedener Aufgaben. 236 bis 238. Von den arithmetischen Reihen des zweyten Ranges. Formeln für das allgemeine und summatorische Glied, wie solches in jedem Falle bey einer solchen vorgelegten Reihe zu bestimmen sey. 239. Polygonal- und Pyramidalzahlen. 240 bis 243. Bestimmung der Formeln für die Berechnung der Kugelschlichtungen. 244.

Eine einzige allgemeine Regel, um die verschiedenen Kugelschlichtungen zu berechnen. 245. Umgekehrte Aufgaben von Kugelschlichtungen. 246 und 247. Von höheren arithmetischen Reihen; Formel für das allgemeine und für das summatorische Glied. 248 bis 252. Von den Verbindungen und Versetzungen der Größen. Formeln für die sogenannten Amben, Ternen, Quaternen ꝛc. aus der Lehre von höheren arithmetischen Reihen abgeleitet. Anwendung davon auf die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in der gewöhnlichen Lotterie etwas zu treffen; Gewinn der Lottokammer von der sämmtlichen Einlage aller Spieler. Berechnung der Wahrscheinlichkeit beym Würfelspiele. 253 und 254. Von den geometrischen Reihen; deren allgemeine Bezeichnung; zwey Fundamentalformeln, eine für das allgemeine, und die andere für das summatorische Glied; woraus wieder zusammen 20 verschiedene Gleichungen abgeleitet werden, um eben so viele Fragen zu beantworten.

## II. Abschnitt, von den Logarithmen.

§. 255 und 256. Erklärung und Entstehung der Logarithmen; Grundzahl eines logarithmischen Systems. 257. Die merkwürdigsten Eigenschaften der Logarithmen. 258 bis 270. Von dem gemeinen oder briggischen System der Logarithmen; Möglichkeit ihrer Berechnung; Kennziffer oder Charakteristik. Anweisung zum Gebrauch der logarithmischen Tafeln; deren großer Nutzen. 271. Modul eines logarithmischen Systems.

## III. Abschnitt, Anwendung der geometrischen Reihen und der Logarithmen auf die Auflösung verschiedener Aufgaben.

§. 272 bis 275. Verschiedene Aufgaben, besonders alle merkwürdigen Fälle bey der zusammengesetzten Interessenrechnung, wo die logarithmischen Tafeln vorzüglich nützlich sind.

## IV. Abschnitt, von den Functionen und ihren Verwandlungen.

§. 276 bis 282. Veränderliche, unveränderliche Größen in einer Gleichung. Function von einer, von mehreren veränderlichen Größen. Ganze, gebrochene, rationale, irrationale Func-

tionen. Die Glieder einer Function zu ordnen, und kurz zu bezeichnen. Die Rechnungsarten mit Functionen. 283. Merkwürdiger und sehr nützlicher Lehrsatz bey einer geordneten und auf Null gebrachten Function einer veränderlichen Größe. 284 und 285. Auflösung gebrochener und auch irrationaler Functionen in gleichgültige Reihen. Erwähnung der recurrenten Reihen. 286. Aus einem rationalen allgemeinen Gliede einer Reihe, das dazugehörige summatorische Glied unmittelbar abzuleiten. 287. Zerlegung gebrochener Functionen in mehrere einfache ausgedrückte Brüche. 288. Umkehrung der Functionen, oder umgekehrte Methode der Reihen. Erinnerung, wie da die wahre Gestalt der Reihe, oder das Gesetz der Exponenten beschaffen seyn müsse.

## V. Abschnitt, Anwendung der Reihen auf die Berechnung der Logarithmen.

§. 289. Für jede Zahl $1 + x$ läßt sich der zugehörige Logarithmus nach den wenigen bisher angeführten Gründen mittelst einer Reihe angeben. 290. Diese logarithmische Reihe wird in eine andere verwandelt, die sehr schnell abnimmt. 291. Eine ungemein schnell abnehmende Reihe für die Berechnung der Logarithmen der Primzahlen. 292 und 293. Natürliche oder hyperbolische Logarithmen, bey denen der Modul $= 1$ ist. Der Modul des briggischen Systems. Verwandlung der natürlichen Logarithmen in Briggische, und umgekehrt. Zu einem gegebenen logarithmischen Modul die zugehörige Grundzahl, und umgekehrt, zu finden. Berechnung der Grundzahl $= h$ der natürlichen Logarithmen. 294 und 295. Eine Reihe für $h^x$, und auch für $a^x$. 296. Eine Anwendung der Grundzahl $h$ der natürlichen Logarithmen.

## VI. Abschnitt, Anwendung der Reihen auf eine allgemeine Entwicklung der Potenzen.

§. 297 und 298. Der binomische Lehrsatz für ganze positive Exponenten wird aus der Lehre von höheren arithmetischen Reihen abgeleitet. 299. Daß solcher für jeden Exponenten gelte, wird mittelst der logarithmischen Reihe dargethan. 300 bis 304. Geschmeidige Einrichtung des binomischen Lehrsatzes, und def-

sen Anwendung auf verschiedene Beyspiele. Abkürzungen bey der Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. Eine andere Reihe für die *m*te Potenz eines Binomiums.

VII. Abschnitt, von der Summirung einiger besondern, theils endlichen, theils unendlichen Reihen, nebst vorläufigen Begriffen von dem unendlich Großen und unendlich Kleinen.

§. 305 bis 309. Gewöhnliche Begriffe von dem unendlich Großen und unendlich Kleinen für die Anfänger, um den Vortrag in verschiedenen höchst nützlichen mathematischen Schriften verstehen zu können. 310. Summirung einer unendlichen Reihe von Brüchen, deren Nenner in einer geometrischen Progression wachsen, nebst Anwendung auf verschiedene Beyspiele. 311 und 312. Summirung der Reihen, welche aus arithmetischen und geometrischen Progressionen zusammengesetzt sind. 313. Summirung einiger besondern Reihen, wo die Nenner in höhern arithmetischen Progressionen steigen. Erwähnung einer besondern Reihe, die sich nicht genau summiren läßt. 314. Nutzen der Reihen beym Bombenwerfen. 315. Allgemeine Interpolationsformel; wie auch allgemeines und summatorisches Glied für jede höhere arithmetische Reihe. 316. Summirung der *m*ten Potenzen der natürlichen Zahlen; Bestimmung der sogenannten bernoullischen Zahlencoefficienten. 317. Summe einer unendlichen Reihe von Potenzen der natürlichen Zahlen. Erinnerung über das Weglassen, oder Verschwinden einiger Größen bey arithmetischen Untersuchungen, und über die verschiedenen Ordnungen des Unendlichen, wie auch über den Rest bey steigenden Reihen. 318 und 319. Summirung der *m*ten Potenzen einer arithmetischen Reihe sowohl für einen positiven, als auch für einen negativen Exponenten.

## Siebente Vorlesung, von den höheren Gleichungen.

Von den Eigenschaften und der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen.

§. 320 bis 322. Verwickelte höhere Gleichungen, vollständige, unvollständige; wie solche zu ordnen; allgemeine Bezeich-

nung einer geordneten höheren Gleichung; Wurzeln derselben. 323 und 324. Entstehung der höhern Gleichungen aus der Multiplication binomischer Factoren, und daraus abgeleitete Eigenschaften derselben. 325 und 326. Bestimmung der rationalen Wurzeln. Wie die gleichen rationalen Wurzeln zu finden. Zerlegung algebraischer Größen in Factoren. 327 bis 330. Einige Verwandlungen der höheren Gleichungen; als Vermehrung und Verminderung der Wurzeln um jede beliebige Zahl, Hinwegschaffung des zweyten Gliedes. Verminderung der Factoren des letzten Gliedes. 331 bis 333. Multiplication und Division der Wurzeln; Hinwegschaffung der gebrochenen, und auch der irrationalen Coefficienten. 334 und 335. Bestimmung der Gränzen für die irrationalen Wurzeln; solche durch eine Annäherung anzugeben; wie die unmöglichen Wurzeln zu erkennen. 336. Allgemeine Näherungsformel für die Bestimmung der Wurzeln aus jeder geordneten höheren Gleichung. 337. Eine eben solche Näherungsformel für die Ausziehung der Potenzwurzeln aus vorgelegten Zahlen. 338 und 339. Die Auflösung der cubischen Gleichungen mittelst der Cardanischen Formeln, und die Zerlegung der biquadratischen in zwey gemeine quadratische Gleichungen, wird als eine bloß theoretische Übung nur kurz berührt. 340. Und so auch die Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen von zwey veränderlichen Größen mittelst unendlicher Reihen, wo zugleich gezeiget wird, wie die Exponenten bey solchen Reihen zu bestimmen sind. Endlich eine Schlußanmerkung, worin eine kurze Anweisung enthalten ist, wie die scharfsinnigen Anfänger, nachdem sie sich schon bereits einen guten Vorrath der nützlichsten mathematischen Wahrheiten eigen gemacht haben, die Schlußfolgen nach der gemeinen Induction bey analytischen Untersuchungen in verschiedenen Fällen in eine schärfere Beweisart verwandeln können.

# Anhang
## von einigen Tafeln.

1) Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5, nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10500.
2) Tafel der 2., 3., 4., 5. und 6. Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 100.
3) Tafel der Quadratzahlen der natürlichen Wurzeln von 1 bis 1000.
4) Tafel der Cubikzahlen der natürlichen Wurzeln von 1 bis 1000.
5) Tafel der Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.
6) Tafel der Cubikwurzeln der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.
7) Tafel, um Fuße, Zolle, Linien und Puncte des zwölftheiligen Maßes in Decimaltheile der Klafter, des Fußes und des Zolles; wie auch umgekehrt, zu verwandeln.

Gedruckt bey J. P. Sollinger.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Vega, Georg <<von>>,

Vorlesungen über die Mathematik

Bd.: 1

Wien 1829

Math.p. 599 b-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082984-5